การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน
กับการประยุกต์

จากสัญญาณ ภาพ และเกม
สู่ทฤษฎีบทที่ทำให้มันทำงาน

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



เอกชัย ทวินันท์

การวิเคราะห์เชิงฟังก์ชันกับการประยุกต์

จากสัญญาณ ภาพ และเกม สู่ทฤษฎีบทที่ทำให้มันทำงาน

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

© 2026 เอกชัย ทวินันท์ สงวนลิขสิทธิ์ · ฉบับร่างเผยแพร่ให้อ่านฟรี ·
ห้ามคัดลอก ดัดแปลง หรือเผยแพร่ต่อโดยไม่ได้รับอนุญาต
https://ekktha-home.pages.dev

สารบัญ

I ปริภูมิและสัญญาณ **1**

1 จากหน้าจอสู่ปริภูมิ: ระยะทาง นอร์ม และความบริบูรณ์ **2**
- 1.1 ระยะทางบนหน้าจอ: เมตริก นอร์ม และผลคูณภายใน . . . 3
- 1.2 ลู่เข้า ต่อเนื่อง และลำดับ Cauchy . . . 13
- 1.3 ความบริบูรณ์และนอร์มที่เทียบกันได้ . . . 26

2 ปริภูมิของฟังก์ชัน: ความต่อเนื่อง ปริภูมิ L^p และสังวัตนาการ **39**
- 2.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง ความเรียบ และ Hölder . . . 40
- 2.2 ปริภูมิ L^p และอสมการสำคัญ . . . 51
- 2.3 สังวัตนาการและความหนาแน่น . . . 63

3 เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต: การฉายและกำลังสองน้อยที่สุด **74**
- 3.1 เรขาคณิตของผลคูณภายในและมุม . . . 75
- 3.2 ทฤษฎีบทการฉายและการแทนของเฟรเชต์–รีสซ์ . . . 86
- 3.3 กำลังสองน้อยที่สุดและตัวดำเนินการฉาย . . . 95

4 ฐานเชิงตั้งฉาก อนุกรมฟูเรียร์ และการบีบอัดเสียง **107**
- 4.1 ระบบเชิงตั้งฉากปรกติและอสมการเบสเซล . . . 108
- 4.2 ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ อนุกรมฟูเรียร์ และเอกลักษณ์ปาร์เซวาล . . . 115
- 4.3 DFT บนสัญญาณตัวอย่างและการบีบอัดเสียง . . . 126

II ตัวดำเนินการและฟังก์ชันนัล **137**

5 ตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค **138**
- 5.1 ตัวดำเนินการมีขอบเขตและนอร์มของตัวดำเนินการ . . . 139
- 5.2 คู่เชิง ตัวดำเนินการผูกพัน และอนุกรมนอยมันน์ . . . 148
- 5.3 ฮาห์น–บานาค: การขยายฟังก์ชันนัล . . . 160
- 5.4 การแยกเซตนูนและคู่เชิงของ $C(K)$ . . . 170

6 ทฤษฎีบทหลักสามข้อ: แบร์ ขอบเขตเอกรูป เปิด/กราฟปิด **179**
- 6.1 ทฤษฎีบทของแบร์และหลักการมีขอบเขตเอกรูปสำหรับปริภูมิบานาค . . . 180
- 6.2 การส่งเปิด ตัวผกผันมีขอบเขต และกราฟปิด . . . 188
- 6.3 การประยุกต์: อนุกรมฟูเรียร์ ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ และการฉาย . . . 196

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

III เครื่องมืออ่อนและสเปกตรัม **211**

7 การลู่เข้าแบบอ่อน ความสะท้อนกลับ และค่าต่ำสุด **212**
7.1 การลู่เข้าแบบอ่อนและอ่อน-ดาว: ภาพรวม 213
7.2 ความสะท้อนกลับและเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน 222
7.3 วิธีตรง อสมการปวงกาเร และการมีอยู่ของค่าต่ำสุด 230

8 ตัวดำเนินการกระชับ เฟรดโฮล์ม และการคลายเบลอ **241**
8.1 ตัวดำเนินการกระชับและทฤษฎีบทของชอเดอร์ 242
8.2 รีสซ์–ชอเดอร์และทางเลือกของเฟรดโฮล์ม 252
8.3 ฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ ค่าเอกฐาน และการคลายเบลอ 263

9 ทฤษฎีเชิงสเปกตรัม: โหมดสั่นสะเทือนและลาปลาซบนกราฟ **274**
9.1 ทฤษฎีบทหลักของตัวดำเนินการกระชับที่ผูกพันในตัวและสเปกตรัม 275
9.2 แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันสำหรับตัวดำเนินการกระชับปรกติและผูกพันในตัว 284
9.3 ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต: โดเมน ตัวดำเนินการปิด และลาปลาซที่ผูกพันในตัว 291
9.4 ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟและโหมดการสั่น 299

IV ดิสทริบิวชัน สมการอ่อน และจุดตรึง **306**

10 ดิสทริบิวชันและโซโบเลฟ **307**
10.1 ฟังก์ชันทดสอบและดิสทริบิวชัน 308
10.2 อนุพันธ์อ่อนและปริภูมิโซโบเลฟ 316
10.3 การฝังตัว เรลลิช และเทรซ 326

11 คำตอบแบบอ่อน แลกซ์–มิลแกรม และวิธีสมาชิกจำกัด **336**
11.1 รูปแบบอ่อนและบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม 338
11.2 กาเลอคิน บทตั้งของเซอา และวิธีสมาชิกจำกัด 345
11.3 การลู่เข้าและค่าประมาณความคลาดเคลื่อน 355
11.4 การเติมเต็มภาพด้วยสมการปัวซง 367

12 จุดตรึง: จากฟิสิกส์ในเกมถึงอันดับของหน้าเว็บ **376**
12.1 หลักการหดตัวของบานาคและฟิสิกส์ในเกม 377
12.2 จุดตรึงของเบราเวอร์และชอเดอร์ 385
12.3 คะแนนความสำคัญของหน้า: การทำซ้ำและความเร็วการลู่เข้า 395

ดรรชนี (ไทย – English) **404**

ดรรชนี (English – ไทย) **408**

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ภาค I

ปริภูมิและสัญญาณ

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 1

จากหน้าจอสู่ปริภูมิ: ระยะทาง นอร์ม และความบริบูรณ์

ฉบับร่าง preprint · 2026-10-24

สถานการณ์สมมติ: สองภาพใกล้กันแค่ไหน

สมมติว่าเราถ่ายรูปหนึ่งรูปด้วยโทรศัพท์. **พิกเซล** (pixel) คือช่องเล็ก ๆ ของภาพ แต่ละช่องเก็บค่าความสว่างหนึ่งค่า. แอปแสดงรูปเดียวกันสองแบบ: แบบ 720p ซึ่งมี 1280×720 พิกเซล และแบบ 1080p ซึ่งมี 1920×1080 พิกเซล. เมื่อย่อแบบ 1080p ลงมาให้เท่ากับ 720p เพื่อเทียบทีละพิกเซล ค่าของแต่ละพิกเซลจะไม่เท่ากันเป๊ะ เพราะการย่อต้องเฉลี่ยพิกเซลข้างเคียงเข้าด้วยกัน.

คำถามแรกคือ สองภาพนี้ “เหมือนกัน” แค่ไหน. ถ้าเราตอบด้วยตัวเลขตัวเดียว ตัวเลขนั้นควรวัดอะไร: ผลรวมของผลต่างทุกพิกเซล, รากของผลรวมกำลังสอง, หรือผลต่างที่มากที่สุดของพิกเซลใดพิกเซลหนึ่ง. ทั้งสามแบบให้คำตอบต่างกัน และไม่มีแบบใด “ถูก” โดยไม่มีบริบท.

ปลายบทเราจะเจอภาพบุคคลอีกภาพหนึ่ง ซึ่งตาข้างหนึ่งหายไป. ค่าเฉลี่ยของผลต่างต่อพิกเซลเล็กมาก เพราะตาคิดเป็นพื้นที่เพียงไม่กี่ส่วนของภาพ แต่พิกเซลที่แย่ที่สุดต่างกันมาก. คำถามเดียวกันนี้จะได้คำตอบว่า *ที่ความละเอียดเดียวกัน การพลิกอันดับเกิดจากการเลือกนอร์มที่ใช้วัด ไม่ได้มาจากความละเอียด*; ความละเอียดเป็นเพียงตัวกำหนดขนาดของช่องว่าง. หัวข้อ 1.3 จะตอบคำถาม 720p กับ 1080p นี้ด้วยตัวเลขที่คำนวณและทดสอบไว้.

สถานการณ์ทั้งสองเป็นสถานการณ์สมมติ. ตัวเลขที่มาจากการคำนวณของเราจะถูกยืนยันด้วยแบบทดสอบในโค้ดของบทนี้.

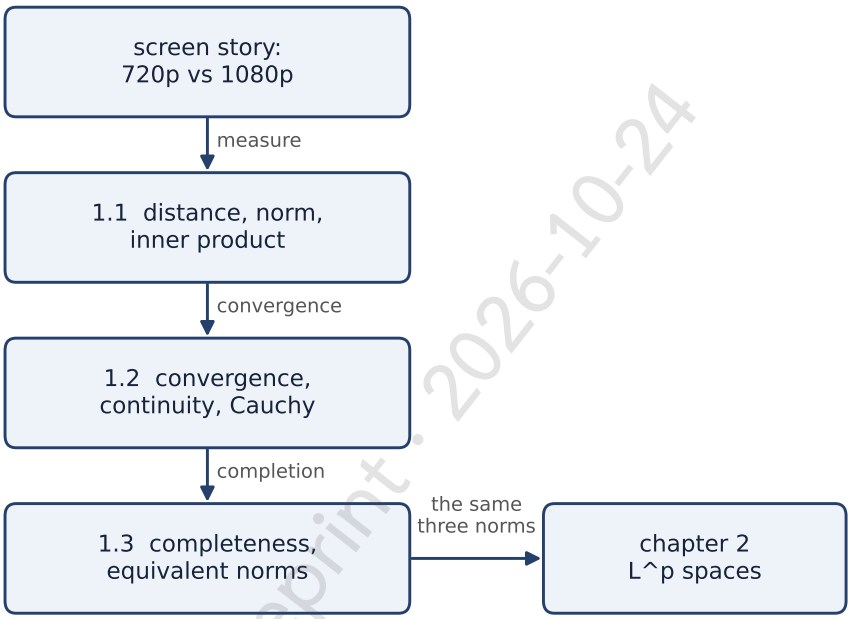
ภาพรวมบท

บทนี้ตอบคำถามเดียว: เราจะวัดว่า “ใกล้” หรือ “เหมือน” ได้อย่างไร. เราเริ่มจากวัตถุดิบที่จอให้มา คือตารางตัวเลข แล้วสร้างโครงสร้างสามชั้น.

- **เมตริก** (metric) คือฟังก์ชันที่ให้ระยะทางระหว่างจุดสองจุด. มันตอบคำถาม “สองภาพห่างกันแค่ไหน” โดยไม่ต้องมีเวกเตอร์.
- **นอร์ม** (norm) คือฟังก์ชันที่ให้ขนาดของเวกเตอร์หนึ่งตัว. เมื่อมีนอร์ม เราได้เมตริกมาฟรี ๆ จาก $d(x, y) = \|x - y\|$.
- **ผลคูณภายใน** (inner product) คือฟังก์ชันที่บอกว่าสองเวกเตอร์ไปทางเดียวกันแค่ไหน. เมื่อมีผลคูณภายใน เราได้นอร์มมาฟรี ๆ จาก $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

ลำดับการสร้างคือ ผลคูณภายใน → นอร์ม → เมตริก. แต่ละชั้นมีเงื่อนไขของตัวเอง นอร์มให้เมตริกได้ แต่เมตริกไม่ให้นอร์มเสมอไป. ภาพที่ต้องจำคือสามชั้นนี้ พร้อมตัวอย่างที่แสดงว่าชั้นบนแทนชั้นล่างไม่ได้.
หัวข้อ 1.1 สร้างสามชั้นนี้และพิสูจน์อสมการโคชี–ชวาร์ซ ซึ่งเป็นเครื่องมือหลัก. หัวข้อ 1.2 ถามว่าลำดับของภาพลู่เข้าหาภาพหนึ่งหมายความว่าอย่างไร และความต่อเนื่องเกี่ยวข้องอย่างไร. หัวข้อ 1.3 เติมความบริบูรณ์ และอธิบายปริศนาตาที่หายไปด้วยการเปรียบเทียบนอร์ม.

ภาพต่อไปนี้แสดงลำดับของหัวข้อในบทนี้ และสิ่งที่แต่ละหัวข้อส่งต่อให้หัวข้อถัดไป.



ฉบับร่าง. Preprint. 2026-10-24

รูปที่ 1.1: แผนผังของบทนี้. กล่องบนสุดคือสถานการณ์เปิดบท; หัวข้อ 1.1 สร้างเครื่องมือวัด; หัวข้อ 1.2 ใช้เครื่องมือนั้นนิยามการลู่เข้าและความต่อเนื่อง; หัวข้อ 1.3 เติมความบริบูรณ์และเปรียบเทียบนอร์ม ก่อนส่งต่อไปยังปริภูมิ L^p ในบท“ปริภูมิของฟังก์ชัน” (สร้างจาก `code/funkana/ch01.py`).

1.1 ระยะทางบนหน้าจอ: เมตริก นอร์ม และผลคูณภายใน

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพว่าภาพหนึ่งภาพถูกคลี่ออกเป็นรายการตัวเลขยาว ๆ. การถามว่าสองภาพใกล้กันแค่ไหนก็คือการถามว่ารายการสองรายการอยู่ห่างกันแค่ไหน. แต่เราต้องมีฟังก์ชันที่รับรายการสองรายการแล้วคืนค่าหนึ่งค่า และค่านั้นต้องทำตัวเหมือนระยะทาง. ในหัวข้อนี้เราสร้างฟังก์ชันนั้นจากสามชั้น: ผลคูณภายในให้ความยาว, ความยาวให้ระยะทาง, และระยะทางให้คำตอบสุดท้าย. ภาพที่ต้องจำคือสามเหลี่ยมของชั้นทั้งสามนี้.

ภาพขาวดำขนาด 8×8 มี 64 ตัวเลข. ภาพสีแบบ **RGB** (แดง เขียว น้ำเงิน สามช่อง) มีสามชั้น สีละ 64 ตัว. ถ้าเรียงตัวเลขทั้งหมดเป็นรายการเดียว ภาพก็กลายเป็น**เวกเตอร์** (vector) หนึ่งตัว ซึ่งคือรายการตัวเลขที่มีจำนวนช่องคงที่. เซตของเวกเตอร์ที่บวกกันและคูณด้วยจำนวนจริงได้ โดยผลยังอยู่ในเซตเดิม เรียกว่า**ปริภูมิเวกเตอร์** (vector space). ภาพ 8×8 แบบขาวดำจึงเป็น

เวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^{64}$ และภาพ RGB ขนาดเดียวกันเป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^{192}$.

เมื่อภาพเป็นเวกเตอร์ เราถามได้สามคำถาม: สองภาพห่างกันแค่ไหน (ระยะ), ภาพหนึ่งใหญ่แค่ไหน (ขนาด), และสองภาพไปทางเดียวกันแค่ไหน (มุม). คำถามทั้งสามเชื่อมกัน แต่ละคำถามมีฟังก์ชันของตัวเอง. เราเริ่มจากตัวอย่างเล็ก ๆ ที่คำนวณด้วยมือได้ทั้งหมด. แต่ก่อนอื่น เราต้องมีนอร์มสามตัวที่ใช้บ่อย.

นิยาม 1.1.1: นอร์มผลบวก นอร์มแบบยุคลิด และนอร์มค่าสูงสุด

สำหรับ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ กำหนด

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

เราเรียก $\|\cdot\|_1$ ว่า**นอร์มผลบวก** (sum norm), $\|\cdot\|_2$ ว่า**นอร์มแบบยุคลิด** (Euclidean norm) และ $\|\cdot\|_\infty$ ว่า**นอร์มค่าสูงสุด** (maximum norm). ในตารางและรูปของหัวข้อนี้ เราเขียน $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ แทนนอร์มทั้งสามนี้ตามลำดับ.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- $\|x\|_1$ บวกขนาดของทุกช่องเข้าด้วยกัน จึงนับทุกช่องเท่ากัน.
- $\|x\|_2$ คือความยาวแบบเส้นตรงที่เรารู้จักจากเรขาคณิต.
- $\|x\|_\infty$ ดูเฉพาะช่องที่ขนาดใหญ่ที่สุด ช่องอื่นไม่มีผลต่อค่านี้.

ตัวอย่าง: สำหรับ $x = (2, -6, 3)$ จะได้ $\|x\|_1 = 11$, $\|x\|_2 = 7$ และ $\|x\|_\infty = 6$.

ทั้งสามจะมีสมบัติครบของนอร์มเมื่อเรานิยามนอร์มด้านล่าง: กรณี $\|\cdot\|_1$ ตรวจได้ตรง ๆ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์, กรณี $\|\cdot\|_2$ ตามมาจากอสมการโคชี–ชวาร์ซด้านล่าง และกรณี $\|\cdot\|_\infty$ เป็นแบบฝึกหัด 2.

ลองเอง: ภาพ 8×8 สามคู่

ให้ภาพฐาน A มีค่า $A_{ij} = 10 + 8i + j$ สำหรับ $i, j = 0, \dots, 7$. ค่าจึงเริ่มที่ 10 และจบที่ 73. เราสร้างภาพใหม่อีกสามภาพ:

- B_1: บวก 1 ทุกพิกเซล;
- B_2: บวก 40 ที่พิกเซล $(0, 0)$ เพียงพิกเซลเดียว;
- B_3: บวก 15 ที่สี่พิกเซล $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$.

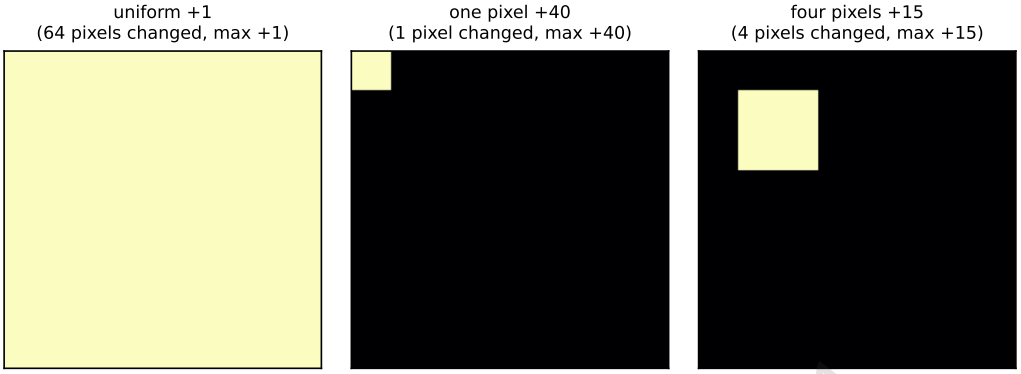
จงคำนวณ ℓ^1, ℓ^2 และ ℓ^∞ ของผลต่าง $A - B_k$ ทั้งสามคู่.

คู่	พิกเซลที่เปลี่ยน	ℓ^1	ℓ^2	ℓ^∞
B_1	64	64	8	1
B_2	1	40	40	40
B_3	4	60	30	15

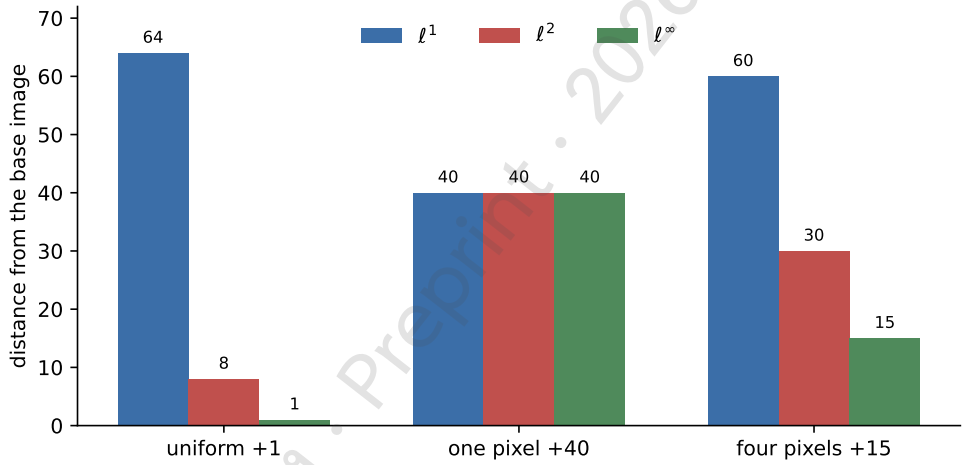
แถวแรก: ผลต่างเป็น 1 ทุกช่อง จึง $\ell^1 = 64 \cdot 1 = 64$, $\ell^2 = \sqrt{64} = 8$ และ $\ell^\infty = 1$. แถวที่สอง: มีช่องเดียวที่ต่าง 40

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

จึงได้ทั้งสามค่าเท่ากับ 40. แถวที่สาม: สี่ช่องต่าง 15 จึง $\ell^1 = 4 \cdot 15 = 60$, $\ell^2 = \sqrt{4 \cdot 15^2} = 30$ และ $\ell^\infty = 15$. ตัวเลขเหล่านี้มาจากโค้ดของเราและมีแบบทดสอบยืนยัน.



รูปที่ 1.2: ผลต่างของภาพทั้งสามคู่. สีสว่างคือพิกเซลที่ค่าต่างจากภาพฐานมาก. ทั้งสามภาพใช้มาตราส่วนสีของตัวเอง เพื่อให้เห็นพิกเซลที่เปลี่ยนได้ชัด (สร้างจาก `code/funkana/ch01.py`).



รูปที่ 1.3: ระยะทั้งสามแบบของภาพสามคู่ในตาราง. ℓ^1 จัดให้คู่ที่เปลี่ยนทุกพิกเซลเป็นคู่ที่แย่ที่สุด แต่ ℓ^2 และ ℓ^∞ จัดให้คู่ที่เปลี่ยนพิกเซลเดียวเป็นคู่ที่แย่ที่สุด (สร้างจาก `code/funkana/ch01.py`).

ตารางและรูปในหัวข้อนี้แสดงจุดสำคัญแล้ว: คู่ภาพเดียวกันอาจถูกจัดลำดับต่างกันเมื่อใช้คนละนอร์ม. ℓ^1 มองว่าการเปลี่ยน 1 หน่วยในทุกพิกเซลเป็นเรื่องใหญ่ เพราะผลรวมมาก. ℓ^2 ให้ความสำคัญกับพิกเซลที่เปลี่ยนมากเป็นพิเศษ เพราะยกกำลังสอง. ℓ^∞ สนใจเฉพาะพิกเซลที่แย่ที่สุด. เราจะกลับมาที่เรื่องนี้ในหัวข้อ 1.3 เมื่ออธิบายตาที่หายไป.

ร่างหนังสือ · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 1.1.2: เมตริกและปริภูมิอิงระยะทาง

ให้ X เป็นเซต. ฟังก์ชัน $d : X \times X \to \mathbb{R}$ เป็น**เมตริก** บน X ถ้าสำหรับทุก $x, y, z \in X$ มี

(M1) $d(x, y) \geq 0$ และ $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

เราเรียก $d(x, y)$ ว่า**ระยะทาง** (distance) ระหว่าง x กับ y และเรียก (X, d) ว่า**ปริภูมิอิงระยะทาง** (metric space).

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (M1) บอกว่าระยะไม่ติดลบ และเป็นศูนย์เฉพาะเมื่อจุดสองจุดเป็นจุดเดียวกัน. ถ้าเราตัดทิศทาง "$d(x, y) = 0$ แล้ว $x = y$" ออก แต่ยังคงให้ $d(x, x) = 0$ จะได้**กึ่งเมตริก** (semimetric) ซึ่งยอมให้จุดต่างกันมีระยะเป็นศูนย์.
- (M2) บอกว่าเดินไปกลับได้ระยะเท่ากัน.
- (M3) บอกว่าทางอ้อมผ่าน z ไม่สั้นกว่าทางตรง.

ตัวอย่างที่คุ้นเคยคือ $d(x, y) = |x - y|$ บน $\mathbb{R}$. ตัวอย่างค้านคือ $d(x, y) = (x - y)^2$: เงื่อนไข (M3) ผิด เพราะ $d(0, 2) = 4$ แต่ $d(0, 1) + d(1, 2) = 1 + 1 = 2$.

เมตริกวัดระยะระหว่างสองจุดโดยไม่ต้องมีโครงสร้างเวกเตอร์. แต่เมื่อเรามีเวกเตอร์ เราอยากวัดขนาดของเวกเตอร์หนึ่งตัวเป็นขั้นแรก แล้วค่อยสร้างระยะจากขนาดของผลต่าง. นั่นคือแนวคิดของนอร์ม.

นิยาม 1.1.3: กึ่งนอร์ม นอร์ม และปริภูมินอร์ม

ตลอดนิยามนี้ ให้ X แทนปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{K}$, โดย $\mathbb{K}$ เป็น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$. เราจะเรียกฟังก์ชัน $p : X \to [0, \infty)$ ว่า**กึ่งนอร์ม** (seminorm) เมื่อเงื่อนไขสองข้อนี้ถือสำหรับทุก $x, y \in X$ และทุก $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ สำหรับทุก $\lambda \in \mathbb{K}$ และ $x \in X$;

(b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$.

ถ้าเพิ่มเงื่อนไข

(c) $p(x) = 0$ แล้ว $x = 0$

เราจะเรียก p ว่า**นอร์ม** และเขียน $\|x\| = p(x)$. เราเรียก (X, p) ว่า**ปริภูมิกึ่งนอร์ม** (seminormed space) หรือ**ปริภูมินอร์ม** (normed space) ตามลำดับ.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (a) คือ**ภาวะเอกพันธุ์** (homogeneity): คูณเวกเตอร์ด้วย λ ขนาดก็คูณด้วย $|\lambda|$. เครื่องหมายลบไม่ทำให้ขนาดติดลบ.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

- (b) คือ**อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม** (triangle inequality): ทางตรงไม่ยาวกว่าทางอ้อม.
- (c) บอกว่าเวกเตอร์เดียวที่มีขนาดศูนย์คือเวกเตอร์ศูนย์. จาก (a) กับ $\lambda = 0$ เราได้ $p(0) = 0$; ถ้าไม่มีข้อนี้ เราได้เพียงกึ่งนอร์ม.

ตัวอย่าง: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ บน $\mathbb{R}^n$. ตัวอย่างค้าน: $\|x\| = x_1^2 + x_2^2$ ไม่เป็นนอร์ม เพราะ (a) ผิด: $\|(2,0)\| = 4$ แต่ $2\|(1,0)\| = 2$.

ทฤษฎีบท 1.1.1: นอร์มสร้างเมตริก

ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม. กำหนด $d(x,y) = \|x - y\|$ สำหรับ $x, y \in X$. แล้ว d เป็นเมตริกบน X.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ตรวจสามข้อของเมตริกโดยใช้สามข้อของนอร์ม. ข้อที่ต้องใช้เงื่อนไข (c) คือการแยก $d(x,y) = 0$.

1. **ไม่ติดลบและเป็นศูนย์เฉพาะจุดเดียวกัน.** $d(x,y) = \|x - y\| \geq 0$. ถ้า $d(x,y) = 0$ แล้ว $\|x - y\| = 0$ ดังนั้น $x - y = 0$ โดย (c) นั่นคือ $x = y$. ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x,y) = \|0\| = 0$.
2. **สมมาตร.** $d(y,x) = \|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1|\,\|x - y\| = d(x,y)$.
3. **อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม.** เขียน $x - z = (x - y) + (y - z)$ แล้วใช้ (b):

$$d(x,z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

สรุป: ทุกข้อของเมตริกมาจากข้อของนอร์มโดยตรง และ (c) ทำให้ระยะเป็นศูนย์ได้เฉพาะเมื่อจุดเดียวกัน. □

นอร์มบอกขนาด แต่ไม่บอกมุม. ถ้าเราต้องการวัดว่าสองภาพไปทางเดียวกันแค่ไหน เราต้องมีผลคูณภายใน. ในทางกลับกัน ผลคูณภายในให้ทั้งขนาดและมุม.

นิยาม 1.1.4: ผลคูณภายในและปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์บน $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$. การส่ง $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ เป็น**ฟอร์มเซสควิลิเนียร์** (sesquilinear form) ถ้าสำหรับทุก $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$,

(S1) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$ และ $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x,y)$;

(S2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ และ $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

ถ้า $(x,y) = \overline{(y,x)}$ สำหรับทุก x, y เราเรียกมันว่า**ฟอร์มแฮร์มีต** (Hermitian form) (หรือฟอร์มสมมาตร). ฟอร์มแฮร์มีตเป็น**กึ่งบวกแน่นอน** (positive semidefinite) ถ้า $(x,x) \geq 0$ สำหรับทุก x, และเป็น**บวกแน่นอน** (positive definite) ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่า $(x,x) = 0$ แล้ว $x = 0$. ฟอร์มแฮร์มีตที่บวกแน่นอนเรียกว่า**ผลคูณภายใน** และ $(X, (\cdot,\cdot))$ เรียกว่า**ปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต** (pre-Hilbert space). เรานิยาม $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ช่องแรกเป็นเชิงเส้นเต็มที่: ดึงสเกลาร์ออกมาได้ตรง ๆ. ช่องที่สองเป็นเชิงเส้นแบบสังยุค: ดึงสเกลาร์ออกมาแล้วต้องติดสังยุค. ในกรณีจริง $\overline{\alpha} = \alpha$ ทั้งสองช่องจึงเป็นเชิงเส้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

- ฟอร์มแอร์มีตสลับสองช่องแล้วได้ค่าสังยุค. โดยเฉพาะ (x,x) เป็นจำนวนจริง จึงเปรียบเทียบกับศูนย์ได้.
- บวกแน่นอนหมายความว่าเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ศูนย์มี “พลังงาน” มากกว่าศูนย์เสมอ.

ตัวอย่าง: $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ บน $\mathbb{C}^n$; ในกรณีจริงก็คือผลคูณภายในแบบยุคลิด. ตัวอย่างค้าน: $(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$ บน $\mathbb{R}^2$ ไม่เป็นกึ่งบวกแน่นอน เพราะ $\big((0,1),(0,1)\big)=-1$.

ภาพรวมก่อนอ่าน

อสมการโคชี–ชวาร์ซเป็นเครื่องมือเดียวที่หัวข้อนี้ใช้ซ้ำตลอด: มันบอกว่าผลคูณภายในของสองเวกเตอร์ถูกควบคุมด้วยผลคูณของขนาด. จากอสมการนี้เองที่ได้อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมของ $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. เราจึงพิสูจน์มันก่อน แล้วค่อยเก็บข้อที่เหลือ.
จุดที่ต้องระวังคือสมมติฐาน. เราสมมติเพียงว่าฟอร์มแอร์มีตนั้นกึ่งบวกแน่นอน ดังนั้น $\|x\|=0$ อาจเกิดกับ $x\neq 0$ ได้. ผลที่ได้จึงเป็นสมบัติของ**กึ่งนอร์ม** ไม่ใช่นอร์ม.

ทฤษฎีบท 1.1.2: อสมการโคชี–ชวาร์ซและสมบัติของกึ่งนอร์ม

สมมติว่า $(\cdot,\cdot)$ เป็นฟอร์มแอร์มีตแบบกึ่งบวกแน่นอนบนปริภูมิเวกเตอร์ X และเขียน $\|x\|$ แทน $\sqrt{(x,x)}$. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุก $x,y\in X$ และทุกสเกลาร์ α:

(1) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

(2) $|(x,y)|\le \|x\|\,\|y\|$ (**อสมการโคชี–ชวาร์ซ** (Cauchy–Schwarz inequality));

(3) $\|x+y\|\le \|x\|+\|y\|$ (อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม);

(4) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\big(\|x\|^2+\|y\|^2\big)$ (**เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** (parallelogram identity)).

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิสูจน์อสมการโคชี–ชวาร์ซก่อน เพราะมันเป็นเครื่องมือของข้อ (3). ข้อ (1) และ (4) มาจากการกระจายผลคูณภายในโดยตรง. จุดที่ต้องระวังคือกรณี $\|y\|=0$ ซึ่งยังเกิดขึ้นได้เพราะเราเพียงกึ่งบวกแน่นอน.

1. **อสมการโคชี–ชวาร์ซ.** ถ้า $\|y\|=0$ ให้พิจารณา $\|x-\lambda y\|^2$ สำหรับ $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$0\le \|x-\lambda y\|^2=\|x\|^2-2\,\mathrm{Re}\big(\overline{\lambda}(x,y)\big).$$

ถ้า $(x,y)\neq 0$ เราเลือก $\lambda=t(x,y)$ ด้วย $t>\|x\|^2/(2|(x,y)|^2)$. แล้ว $0\le\|x\|^2-2t|(x,y)|^2<0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้. เพราะฉะนั้น $(x,y)=0$ และ (2) เป็นจริงแบบทั้งสองข้างเป็นศูนย์. สมมติต่อไปว่า $\|y\|>0$. สำหรับ $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$0\le \|x-\lambda y\|^2=\|x\|^2-2\,\mathrm{Re}\big(\overline{\lambda}(x,y)\big)+|\lambda|^2\|y\|^2.$$

เลือก $\lambda=(x,y)/\|y\|^2$. แล้ว $\overline{\lambda}(x,y)=|(x,y)|^2/\|y\|^2$ และ $|\lambda|^2\|y\|^2=|(x,y)|^2/\|y\|^2$. ดังนั้น

$$0\le \|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2},$$

ซึ่งให้ $|(x,y)|^2\le\|x\|^2\|y\|^2$. ทั้งสองข้างไม่ติดลบ เราจึงถอดรากที่สองได้ และได้ $|(x,y)|\le\|x\|\,\|y\|$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2. **อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม.** กระจายผลคูณภายใน:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \le (\|x\| + \|y\|)^2.$$

ขั้นสุดท้ายใช้ (2). ทั้งสองข้างไม่เป็นลบ จึงถอดรากที่สองได้.

3. **ภาวะเอกพันธุ์.** ถ้า $\alpha = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. ถ้าไม่ใช่,

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) = |\alpha|^2\|x\|^2.$$

ถอดรากที่สองได้ $|\alpha|\,\|x\|$.

4. **เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.** กระจายทั้งสองพจน์:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2, \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x,y) + \|y\|^2.$$

บวกกันแล้วพจน์กลางหักล้าง เหลือ $2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

สรุป: อสมการโคชี–ชวาร์ซควบคุมผลคูณภายในด้วยผลคูณของขนาด และนำไปสู่อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม. เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นเครื่องหมายว่ากึ่งนอร์มนั้นมาจากผลคูณภายใน. □

นิยาม 1.1.5: เชิงตั้งฉากและส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก

ให้ X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต และ $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

(1) ถ้า $(x,y) = 0$ เราเรียก x กับ y ว่า**เชิงตั้งฉาก** (orthogonal) กัน และเขียน $x \perp y$. แล้ว

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(ทฤษฎีบทพีทาโกรัส).

(2) สำหรับ**ปริภูมิย่อย** (subspace) Y, Z ของ X กำหนด $Y+Z = \{y+z : y \in Y,\ z \in Z\}$. ถ้า $Y \cap Z = \{0\}$ เราเรียกผลบวกนี้ว่า**ผลบวกตรง** (direct sum) และเขียน $Y \oplus Z$. ถ้า $(y,z) = 0$ สำหรับทุก $y \in Y$ และ $z \in Z$ เราเรียก Y กับ Z ว่าตั้งฉากกัน. สำหรับปริภูมิย่อย Y กำหนด $Y^{\perp}$ เป็นเซตของ $x \in X$ ทั้งหมดที่ $(y,x) = 0$ สำหรับทุก $y \in Y$; เราเรียก $Y^{\perp}$ ว่า**ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก** (orthogonal complement) ของ Y. แล้ว $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$ เพราะถ้า x อยู่ในทั้งสองเซต จะได้ $(x,x) = 0$ จึง $x = 0$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (1) บอกว่าเวกเตอร์สองตัวตั้งฉากกันเมื่อผลคูณภายในเป็นศูนย์. เมื่อตั้งฉากกันแล้ว กำลังสองของผลต่างเท่ากับผลบวกของกำลังสองแต่ละตัว นี่คือทฤษฎีบทพีทาโกรัสในปริภูมิทั่วไป.
- (2) ปริภูมิย่อย คือเซตย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ที่ยังบวกและคูณด้วยสเกลาร์ได้ภายในเซตนั้นเอง. ถ้าปริภูมิย่อยสองปริภูมิมีเพียงเวกเตอร์ศูนย์ร่วมกัน ผลบวกของทั้งสองเรียกว่าผลบวกตรง. ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก $Y^{\perp}$ คือเซตของเวกเตอร์ทั้งหมดที่ตั้งฉากกับทุกตัวใน Y.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): เมื่อใดอสมการโคชี–ชวาร์ซเป็นสมการ

สำหรับ $x, y \neq 0$ ให้ $\gamma = (x,y)/(\|x\|\,\|y\|)$. อสมการโคชี–ชวาร์ซบอกว่า $|\gamma| \leq 1$. ถ้า $y = \lambda x$ กับ $\lambda \neq 0$ แล้ว $\gamma = \overline{\lambda}/|\lambda|$ จึง $|\gamma| = 1$. กลับกัน ถ้า $|\gamma| = 1$ ให้ $\alpha = \|x\|$ และ $\beta = \overline{\gamma}\,\|y\|$. แล้ว $(x/\alpha, y/\beta) = 1$ และ $|\beta| = \|y\|$ ดังนั้น

$$\left\| \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right\|^2 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

เพราะฟอร์มบวกแน่นอน เราจึงได้ $x/\alpha = y/\beta$ และ x, y ขึ้นต่อกันเชิงเส้น. (ถ้า $x = 0$ หรือ $y = 0$ ข้อความจริงโดยตรง.) นี่คือความหมายของ “ตัวหนึ่งเป็นจำนวนเท่าของอีกตัว”.

ในกรณีจริง เรานิยามมุม $\theta \in [0, \pi]$ ระหว่าง $x, y \neq 0$ ด้วย $\cos\theta = (x,y)/(\|x\|\,\|y\|)$. ค่านี้อยู่ใน $[-1, 1]$ เพราะอสมการโคชี–ชวาร์ซ จึงหามุม θ ได้เสมอ; แล้ว $x \perp y$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = \pi/2$.

พิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส. **แนวคิด.** กระจาย $\|x - y\|^2$ แล้วใช้ $(x,y) = 0$.

$$\|x - y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

ขั้นสุดท้ายใช้ $(x,y) = 0$ และ $(y,x) = \overline{(x,y)} = 0$.

สรุป: เมื่อสองเวกเตอร์ตั้งฉากกัน กำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของอีกสองด้าน. □

เรารู้แล้วว่าผลคูณภายใน $\to$ นอร์ม $\to$ เมตริก. คำถามคือลูกศรย้อนกลับใช้ได้ไหม. คำตอบคือไม่. ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นเมตริกที่ไม่ได้มาจากนอร์ม.

นิยาม 1.1.6: เมตริกเฟรเชต์

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $\rho : X \to \mathbb{R}$. สมมติว่าสำหรับทุก $x, y \in X$,

(F1) $\rho(x) \geq 0$ และ $\rho(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$;

(F2) $\rho(x) = \rho(-x)$;

(F3) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

แล้ว $d(x,y) = \rho(x - y)$ เป็นเมตริกบน X. เราเรียก ρ ว่า**เมตริกเฟรเชต์** (Fréchet metric).

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (F1) บอกว่า ρ ไม่ติดลบ และเป็นศูนย์เฉพาะที่เวกเตอร์ศูนย์. (F2) บอกว่าสลับเครื่องหมายแล้วระยะไม่เปลี่ยน. (F3) เป็นอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมแบบเดียวกับนอร์ม.
- ต่างจากนอร์มตรงที่ ρ ไม่จำเป็นต้องเป็นเอกพันธุ์ ดังนั้นเมตริกเฟรเชต์จึงกว้างกว่านอร์ม. ตัวอย่างด้านล่างแสดงว่ามีเมตริกประเภทนี้ที่ไม่มาจากนอร์มจริง.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ตรวจสามข้อของเมตริกโดยแทน $x - y$ ใน (F1)–(F3).

1. $d(x,y) = \rho(x-y) \geq 0$, และ $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x - y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$.
2. $d(y,x) = \rho(y-x) = \rho(-(x-y)) = \rho(x-y) = d(x,y)$.

ตัวอย่าง . Preprint . 2026-10-24

3. $d(x,z) = \rho((x-y)+(y-z)) \le \rho(x-y)+\rho(y-z) = d(x,y)+d(y,z)$.

สรุป: เมตริกที่สร้างจากเมตริกเฟรเชต์เป็นเมตริกที่เข้ากับการเลื่อนจุด. □

เนื่องจากนอร์มมีสมบัติ (F1)–(F3) ทุกนอร์มจึงเป็นเมตริกเฟรเชต์. เมตริกที่มันเหนี่ยวนำคือ $d(x,y) = \|x-y\|$ และเป็นเมตริกตามทฤษฎีบท 1.1.1.

ตัวอย่าง: บน $\mathbb{R}^n$ ให้ $\rho(x) = \|x\|_2/(1+\|x\|_2)$. เงื่อนไข (F1) และ (F2) ตรวจได้ตรง ๆ. สำหรับ (F3) ใช้ฟังก์ชัน $\varphi(s) = s/(1+s)$ ซึ่งเพิ่มขึ้นและ $\varphi(s_1+s_2) \le \varphi(s_1)+\varphi(s_2)$ สำหรับ $s_1, s_2 \ge 0$ (การคูณไขว้ให้ผลต่าง $s_1 s_2(2+s_1+s_2)$ หารด้วยตัวส่วนบวก). เพราะ $\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ (อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมของนอร์มแบบยุคลิด) และ φ เพิ่มขึ้น จึงได้ $\rho(x+y) = \varphi(\|x+y\|_2) \le \varphi(\|x\|_2+\|y\|_2) \le \varphi(\|x\|_2)+\varphi(\|y\|_2) = \rho(x)+\rho(y)$. แต่ ρ ไม่เป็นนอร์ม เพราะ $\rho(2e_1) = 2/3$ ในขณะที่ $2\rho(e_1) = 1$. ถ้า d มาจากนอร์ม ν ใด ๆ แล้ว $\rho(z) = d(z,0) = \nu(z)$ จะเป็นนอร์มด้วย ดังนั้นเมตริกนี้ไม่ได้มาจากนอร์ม.

ข้อควรระวัง: หน่วยและมาตราส่วน

การเปลี่ยนหน่วยภาพ เช่นจาก 0–255 เป็น 0–1 หารระยะทุกตัวด้วย 255. ลำดับของคู่ภาพไม่เปลี่ยน แต่ค่าตัวเลขและเกณฑ์ที่ตั้งไว้เปลี่ยน. ถ้าเราเปรียบเทียบภาพจากสองแหล่ง ต้องแปลงให้หน่วยเดียวกันก่อน. อีกข้อ: ภาพสองภาพที่ใกล้กันใน ℓ^∞ อาจห่างกันมากใน ℓ^1 ถ้าผลต่างเล็ก ๆ กระจายอยู่หลายพิกเซล. ตรงกันข้าม ถ้าใกล้กันใน ℓ^1 แล้ว $\ell^\infty \le \ell^1$ จึงใกล้กันใน ℓ^∞ ด้วย.

สรุปใจความ

- เมตริกวัดระยะระหว่างจุดสองจุด; นอร์มวัดขนาดของเวกเตอร์; ผลคูณภายในวัดทั้งขนาดและมุม.
- ผลคูณภายใน → นอร์ม → เมตริก. ลูกศรย้อนกลับใช้ไม่ได้: มีเมตริกที่ไม่ได้มาจากนอร์ม.
- อสมการโคชี–ชวาร์ซและอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมเป็นเครื่องมือที่ทำให้ทฤษฎีทำงาน.
- คู่ภาพเดียวกันอาจถูกจัดลำดับต่างกันภายใต้ ℓ^1, ℓ^2 และ ℓ^∞.

อ่านต่อ. หัวข้อ 1.2 จะถามว่า “ภาพชุดหนึ่งลู่เข้าหาภาพหนึ่ง” หมายความว่าอย่างไร และการลู่เข้าขึ้นกับเมตริกที่เลือกเพียงใด.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $u = (3,-1,2)$ และ $v = (1,4,-2)$. จงหา $\|u\|_1, \|u\|_2, \|u\|_\infty, \|v\|_1, \|v\|_2, \|v\|_\infty$, ระยะทั้งสามแบบระหว่าง u กับ v, และ (u,v). ตรวจสอบอสมการโคชี–ชวาร์ซและเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน.

2. จงแสดงว่า $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ เป็นนอร์มบน $\mathbb{R}^n$. ใช้สมบัติของค่าสัมบูรณ์: $|\alpha x_i| = |\alpha|\,|x_i|$ และ $|x_i+y_i| \le |x_i|+|y_i|$.

3. ให้ $d(x,y) = \min(|x-y|, 1)$ บน $\mathbb{R}$. (a) จงแสดงว่า d เป็นเมตริก. (b) จงแสดงว่าไม่มีนอร์มใดบน $\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $d(x,y) = \|x-y\|$ สำหรับทุก x, y.

4. ตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลหรือตัวอย่างค้าน: (a) ทุกนอร์มเป็นเมตริก; (b) ทุกเมตริกมาจากนอร์ม; (c) ทุกผลคูณภายในให้กึ่งนอร์ม; (d) ทุกฟอร์มแอร์มีตเป็นผลคูณภายใน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

5. ภาพสีหนึ่งพิกเซลเขียนเป็น (R, G, B). สมมติเราแปลงเป็นภาพขาวดำด้วยค่าเฉลี่ย $g = (R + G + B)/3$. ให้ $p = (255, 0, 0)$ (แดง) และ $q = (0, 255, 0)$ (เขียว). (a) จงหา $g(p)$ และ $g(q)$. (b) จงหาระยะ ℓ^1 ระหว่าง p, q ในปริภูมิ RGB และระยะ ℓ^1 ระหว่างภาพขาวดำ. (c) อธิบายว่าทำไมการแปลงเป็นขาวดำจึงทำให้ภาพสองภาพที่ต่างกันมากกลายเป็นภาพเดียวกัน.

6. รัน `code/funkana/ch01.py` หรือเปิดรูป `code/figures/ch01-distance-bars.pdf`. (a) เติมตารางระยะของสามคู่ในหัวข้อ 1.1. (b) เรียงลำดับคู่ภาพจากแย่ที่สุดไปดีที่สุดตาม ℓ^1, ℓ^2 และ ℓ^∞. (c) อธิบายว่าทำไมลำดับจึงต่างกัน.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ขนาดและระยะ.**

$$\|u\|_1 = 3 + 1 + 2 = 6, \qquad \|u\|_2 = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}, \qquad \|u\|_\infty = 3,$$
$$\|v\|_1 = 1 + 4 + 2 = 7, \qquad \|v\|_2 = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}, \qquad \|v\|_\infty = 4.$$

ผลต่างคือ $u - v = (2, -5, 4)$ ดังนั้น

$$\|u - v\|_1 = 2 + 5 + 4 = 11, \qquad \|u - v\|_2 = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45}, \qquad \|u - v\|_\infty = 5.$$

ผลคูณภายในคือ $(u, v) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 3 - 4 - 4 = -5$. อสมการโคชี–ชวาร์ซให้ $|(u, v)| = 5 \le \sqrt{14}\sqrt{21} = \sqrt{294} \approx 17.15$, จริง. เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน: $u + v = (4, 3, 0)$ และ $u - v = (2, -5, 4)$ ดังนั้น $\|u + v\|_2^2 = 25$, $\|u - v\|_2^2 = 45$, ผลรวมคือ 70; ทางขวาคือ $2(14 + 21) = 70$.

2. **นอร์มซูพรีมัม.** (a) $|\alpha x_i| = |\alpha||x_i|$ ทุก i จึง $\max_i |\alpha x_i| = |\alpha| \max_i |x_i|$. (b) สำหรับแต่ละ i, $|x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$; เพราะด้านขวาไม่ขึ้นกับ i, $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. (c) ถ้า $\|x\|_\infty = 0$ แล้ว $|x_i| = 0$ ทุก i จึง $x = 0$. เงื่อนไขที่ไม่เป็นลบชัดเจน.

3. **เมตริกที่ไม่มีนอร์ม.** (a) (M1) และ (M2) ตรงจากนิยาม. สำหรับ (M3): ถ้า $|x - z| \ge 1$ หรือ $|z - y| \ge 1$ แล้วด้านขวา $\ge 1 \ge d(x, y)$; ถ้าทั้งสองน้อยกว่า 1 แล้ว $d(x, y) \le |x - y| \le |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$. (b) สมมติมีนอร์ม ν ที่ให้ d. ตามภาวะเอกพันธุ์ $d(0, 2) = \nu(-2) = 2\nu(1)$ และ $d(0, 1) = \nu(-1) = \nu(1)$ ดังนั้น $d(0, 2) = 2d(0, 1)$ แต่ $d(0, 2) = 1$ และ $2d(0, 1) = 2$ ขัดแย้ง.

4. **จริงหรือเท็จ.** (a) จริง: ทฤษฎีบทนอร์มสร้างเมตริก. (b) เท็จ: $d(x, y) = \min(|x - y|, 1)$ เป็นเมตริกแต่ไม่ได้มาจากนอร์ม (ข้อ 3). (c) จริง: ข้อ (1)–(3) ของทฤษฎีบทข้างต้นคือสามข้อของกึ่งนอร์ม. (d) เท็จ: $(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ เป็นฟอร์มแอร์มีตแต่ไม่กึ่งบวกแน่นอน เพราะ $\big((0, 1), (0, 1)\big) = -1$.

5. **RGB กับขาวดำ.** (a) $g(p) = (255 + 0 + 0)/3 = 85$ และ $g(q) = (0 + 255 + 0)/3 = 85$. (b) ระยะ ℓ^1 ใน RGB คือ $|255 - 0| + |0 - 255| + |0 - 0| = 510$; ระยะ ℓ^1 ระหว่างภาพขาวดำคือ $|85 - 85| = 0$. (c) การเฉลี่ยสีทิ้งข้อมูลว่าแสงมาจากช่องสีใด. สีแดงและสีเขียวต่างกันมากใน RGB แต่ให้ค่าเฉลี่ยเท่ากัน จึงกลายเป็นพิกเซลเดียวกันหลังแปลง.

6. **ตารางและการจัดลำดับ.** (a) ตารางคือ $(64, 8, 1)$, $(40, 40, 40)$ และ $(60, 30, 15)$ สำหรับ B_1, B_2, B_3 ตามลำดับ. (b) ตาม ℓ^1: B_1 แย่ที่สุด (64), แล้ว B_3 (60), แล้ว B_2 (40). ตาม ℓ^2: B_2 (40), แล้ว B_3 (30), แล้ว B_1 (8). ตาม ℓ^∞: B_2 (40), แล้ว B_3 (15), แล้ว B_1 (1). (c) ℓ^1 รวมผลต่างทุกพิกเซล การเปลี่ยน 1 หน่วยใน 64 พิกเซลจึงได้ 64.

ฉบับร่าง Preprint, 2026-10-24

ℓ^2 ยกกำลังสองผลต่าง พิกเซลเดียวที่ต่าง 40 จึงมีน้ำหนักมาก. ℓ^∞ มองเฉพาะพิกเซลที่แย่ที่สุด จึงให้ความสำคัญกับ B_2 มากที่สุด.

1.2 ลู่เข้า ต่อเนื่อง และลำดับ Cauchy

ภาพรวมก่อนอ่าน

หัวข้อ 1.1 ให้เครื่องมือวัดระยะแล้ว. หัวข้อนี้ถามคำถามที่ตามมา: ภาพชุดหนึ่ง “เข้าใกล้” ภาพเป้าหมายได้อย่างไร, การแปลงภาพอย่างการตัดค่าสีให้อยู่ในช่วง 0–255 จะรักษาความใกล้ไว้หรือไม่, และถ้าเราเปลี่ยนนอร์ม คำตอบจะเปลี่ยนหรือเปล่า. ภาพที่ต้องจำคือ**บอล** (ball) เล็ก ๆ รอบจุดหนึ่ง: “ใกล้” หมายถึง “อยู่ในบอลลูกนั้น”.

สมมติว่าโทรศัพท์เก็บวิดีโอ 30 ภาพต่อวินาที และแต่ละภาพต่างจากภาพก่อนหน้าเพียงเล็กน้อย. เราอยากพูดว่า “ภาพที่ k เข้าใกล้ภาพสุดท้ายเมื่อ k โตขึ้น” ให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์. ประโยคนี้ต้องมีสองส่วน: ระยะทางระหว่างภาพ กับเกณฑ์ว่า “เล็กพอ” หมายถึงเท่าไร. สองส่วนนี้คือเมตริกและบอล.

1.2.1 ระยะถึงเซต บอล และเซตมีขอบเขต

ระยะระหว่างจุดสองจุดมีอยู่แล้ว. แต่คำถามของภาพมักเป็นคำถามถึง*เซต*ของภาพ: ภาพนี้ห่างจาก “ภาพที่มีดพอ” แค่ไหน, กลุ่มภาพหนึ่งมีขนาดใหญ่แค่ไหน. เราจึงขยายระยะให้รับเซต.

นิยาม 1.2.1: ระยะทางระหว่างเซต บอล และเส้นผ่านศูนย์กลาง

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง.

(1) สำหรับ $A_1, A_2 \subset X$ กำหนด**ระยะทางระหว่างเซต** (distance between sets)

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) = \inf\{d(x, y) : x \in A_1,\ y \in A_2\}.$$

ถ้าเซตใดเซตหนึ่งว่าง ให้ $\inf \emptyset = +\infty$ จึงได้ $\operatorname{dist}(A, \emptyset) = +\infty$.

(2) สำหรับ $x \in X$ และ $A \subset X$ กำหนด $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{dist}(\{x\}, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

(3) สำหรับ $r > 0$ กำหนด $B_r(A) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < r\}$ และ $B_r(x) = B_r(\{x\}) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. เราเรียก $B_r(x)$ ว่า**บอลเปิด** (open ball) รัศมี r รอบ x.

(4) **เส้นผ่านศูนย์กลาง** (diameter) ของ $A \subset X$ คือ $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ เมื่อ $A \neq \emptyset$ และ $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. เซต A เรียกว่า**มีขอบเขต** (bounded) ถ้า $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (1) ระยะระหว่างเซตใช้ inf เพราะคู่ที่ใกล้ที่สุดอาจไม่มี. $[0, 1]$ กับ $]2, 3]$ มีระยะ 1 แต่ไม่มีคู่ใดห่างพอดี 1.
- (2) ระยะจากจุดถึงเซตคือระยะถึงเซตเดี่ยว. ถ้า $x \in A$ ระยะเป็นศูนย์ แต่ระยะศูนย์ไม่ได้แปลว่า $x \in A$.
- (3) เครื่องหมาย “น้อยกว่า” สำคัญ: $B_1(0)$ ใน $\mathbb{R}$ คือ $]-1, 1[$ ไม่มี 1 และ -1. จุดที่อยู่พอดีขอบจึงไม่อยู่ในบอล. เราเรียก $B_1(0)$ ว่า**บอลหนึ่งหน่วย** (unit ball).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

- (4) เซตที่มีขอบเขตคือเซตที่สองจุดใด ๆ ในนั้นห่างกันไม่เกินจำนวนหนึ่ง. เช่น $\mathbb{R}$ ไม่มีขอบเขต.

ลองเอง: ระยะถึงเซตของภาพ

ให้ภาพฐาน A มีค่า $A_{ij} = 10 + 8i + j$ สำหรับ $i, j = 0, \dots, 7$ ดังในหัวข้อ 1.1 และให้

$$S = \{B : B_{00} < 9\}$$

เป็นเซตของภาพที่พิกเซลมุมซ้ายบนมืดกว่า 9.

(a) จงหา $\operatorname{dist}(A, S)$ ใน ℓ^1.

(b) ระยะนี้มีจุดที่บรรลุหรือไม่.

(c) จงหา diam ของเซตของภาพ 8×8 ทั้งหมดที่มีค่าใน $[0, 255]$, ใน ℓ^2 และใน ℓ^∞.

(a) พิกเซลเดียวที่ทำให้ระยะเปลี่ยนคือ $A_{00} = 10$. ค่าที่เป็นไปได้ของ B_{00} คือทุกจำนวนที่น้อยกว่า 9 ดังนั้น $\operatorname{dist}(A, S) = \inf\{|10 - t| : t < 9\} = 1$. (b) ไม่บรรลุ เพราะ $B_{00} = 9$ ถูกตัดออก; ทุกภาพใน S มีระยะมากกว่า 1 แต่เข้าใกล้ 1 ได้. (c) ใน ℓ^2 ภาพที่ไกลกันที่สุดคือภาพที่มีค่า 0 ทุกช่องกับภาพที่มีค่า 255 ทุกช่อง: ระยะคือ $255\sqrt{64} = 2040$. ใน ℓ^∞ ระยะเดียวกันคือ 255. ตัวเลขทั้งสองนี้ตรวจได้ด้วยการคำนวณตรง ๆ และมีแบบทดสอบยืนยัน.

1.2.2 เซตเปิด เซตปิด และทอพอโลยี

บอลให้คำว่า “ใกล้”. เซตเปิดคือเซตที่ทุกจุดมีบอลเล็ก ๆ อยู่ข้างในทั้งหมด. นี่คือคำจำกัดความที่ทำให้เราพูดถึง “ย่าน” ได้โดยไม่ต้องระบุรัศมีทุกครั้ง.

นิยาม 1.2.2: ภายใน ส่วนปิดคลุม เซตเปิด และเซตปิด

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $A \subset X$. เราเก็บจุดที่ “มีที่ว่างรอบตัว” ไว้ในเซตเดียว:

$$\operatorname{intr}(A) = \{x \in X : \exists \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \subset A\}.$$

เรียกเซตนี้ว่า**ภายใน** (interior) ของ A. ในทางกลับกัน เราเก็บจุดที่ “แตะ A ได้ทุกระยะ”:

$$\operatorname{clos}(A) = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

เรียกเซตนี้ว่า**ส่วนปิดคลุม** (closure) ของ A. ถ้า $\operatorname{intr}(A) = A$ เราเรียก A ว่า**เซตเปิด** (open set); ถ้า $\operatorname{clos}(A) = A$ เราเรียก A ว่า**เซตปิด** (closed set). ส่วนเติมเต็มของเซตปิดเป็นเซตเปิด และส่วนเติมเต็มของเซตเปิดเป็นเซตปิด.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ภายในคือจุดที่ “มีที่ว่างรอบตัว” ยังอยู่ในเซต. จุดขอบไม่นับ เพราะบอลทุกลูกรอบจุดขอบล้นออกนอกเซต.
- ส่วนปิดคลุมคือจุดที่ “แตะเซตได้ทุกขนาด”. จุดที่อยู่นอกเซตแต่เข้าใกล้ได้ไม่จำกัดก็นับ.
- ใน $\mathbb{R}$ ให้ $A = [0, 1[$. แล้ว $\operatorname{intr}(A) =]0, 1[$ และ $\operatorname{clos}(A) = [0, 1]$. เซตนี้ไม่เปิด (จุด 0 ไม่มีที่ว่างด้านซ้าย) และไม่ปิด (จุด 1 แตะเซตได้แต่ไม่อยู่ในเซต).

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

- $\mathbb{Q}$ ใน $\mathbb{R}$ มีภายในว่างและมีส่วนปิดคลุมเป็น $\mathbb{R}$ ทั้งหมด; จึงไม่เปิดและไม่ปิด.

ตัวอย่างสั้น ๆ: ใน $\mathbb{R}^4$ เซต $U = \{x : \text{ค่าเฉลี่ยของ } x < 100\}$ เปิด เพราะถ้า x มีค่าเฉลี่ย 99 และ $\|y - x\|_1 < 4$ แล้วค่าเฉลี่ยของ y ยังต่ำกว่า 100; เซต $\{x : \text{ค่าเฉลี่ย} \le 100\}$ ปิด แต่ไม่เปิด.

เซตเปิดที่ได้จากเมตริกไม่ได้มีแบบใดแบบหนึ่ง. มันทำตามกฎสามข้อที่นักคณิตศาสตร์เรียกว่าทอพอโลยี.

นิยาม 1.2.3: ทอพอโลยีและปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

ให้ X เป็นเซต และ $\mathcal{T}$ เป็นเซตของเซตย่อยของ X. เราเรียก $\mathcal{T}$ ว่า**ทอพอโลยี** (topology) บน X ถ้า

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ และ $X \in \mathcal{T}$;

(T2) ถ้า $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ แล้ว $\bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \in \mathcal{T}$;

(T3) ถ้า $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ แล้ว $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

สมาชิกของ $\mathcal{T}$ เรียกว่าเซตเปิด. เราเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่า**ปริภูมิเชิงทอพอโลยี** (topological space). ถ้าเพิ่มเงื่อนไข

(T4) สำหรับ $x \neq y$ มี $U, V \in \mathcal{T}$ ที่ $x \in U$, $y \in V$ และ $U \cap V = \emptyset$,

เราเรียก $(X, \mathcal{T})$ ว่า**ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ** (Hausdorff space).

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (T1) เซตว่างกับทั้งปริภูมิเปิดเสมอ.
- (T2) รวมเซตเปิดกี่เซตก็ได้ แม้จะมีอนันต์เซต ผลยังเปิด.
- (T3) ตัดกันสองเซตแล้วยังเปิด; ตัดกันหลายเซตแบบจำกัดก็เปิด โดยทำทีละคู่.
- (T4) สองจุดต่างกันมี “บ้าน” เปิดคนละหลังที่ไม่ทับกัน. เงื่อนไขนี้ทำให้ลิมิตมีได้ตัวเดียว.

ตัวอย่าง: บน $X = \{1, 2\}$ เซต $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ เป็นทอพอโลยี แต่ไม่เป็นเฮาส์ดอร์ฟ เพราะเซตเปิดเดียวที่บรรจุ 2 คือ X ซึ่งบรรจุ 1 ด้วย.

ทฤษฎีบท 1.2.1: เซตเปิดของเมตริกก่อกำเนิดทอพอโลยีเฮาส์ดอร์ฟ

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ

$$\mathcal{T} = \{A \subset X : \operatorname{intr}(A) = A\}$$

เป็นเซตของเซตเปิดตามนิยามของเซตเปิด. แล้ว $(X, \mathcal{T})$ เป็นปริภูมิเชิงทอพอโลยี และเป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ. ยิ่งกว่านั้น สำหรับทุก $A \subset X$ ภายในและส่วนปิดคลุมที่คำนวณจากบอลกับที่คำนวณจากเซตเปิดให้ผลเดียวกัน.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** เราใช้บอลรอบจุดเพื่อพิสูจน์สัจพจน์ (T1) ถึง (T3) ทีละข้อ. ข้อที่ยากคือ (T3): ต้องหาบอลลูกเดียวที่อยู่ในบอลสองลูกพร้อมกัน. (T4) ใช้รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของระยะระหว่างจุด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

1. **บอลเป็นเซตเปิด.** ให้ $y \in B_r(x)$ และ $\rho = r - d(x,y) > 0$. ถ้า $z \in B_\rho(y)$ แล้ว
$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \rho = r,$$
จึง $z \in B_r(x)$. เพราะฉะนั้น $B_\rho(y) \subset B_r(x)$ และ $B_r(x)$ เปิด.

2. **(T1) และ (T2).** เซตว่างเปิดเพราะไม่มีจุดให้ตรวจ; X เปิดเพราะทุกบอลอยู่ใน X. ถ้า x อยู่ในยูเนียนของเซตเปิด ก็มีเซตหนึ่งในนั้นที่บรรจุ x; เซตนั้นมีบอลรอบ x อยู่ข้างใน ยูเนียนจึงมีด้วย.

3. **(T3).** ให้ U_1, U_2 เปิด และ $x \in U_1 \cap U_2$. มี $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ที่ $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U_1$ และ $B_{\varepsilon_2}(x) \subset U_2$. ให้ $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$; แล้ว $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$. ทุกจุดของ $U_1 \cap U_2$ มีสมบัตินี้ จึงเป็นเซตเปิด.

4. **(T4).** ให้ $x \neq y$ และ $r = d(x,y)/2 > 0$. ถ้า $z \in B_r(x) \cap B_r(y)$ แล้ว
$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) < 2r = d(x,y),$$
ซึ่งเป็นไปไม่ได้. บอลสองลูกจึงไม่ทับกัน และบอลทั้งสองลูกเปิดตามข้อ 1.

5. **ภายในและส่วนปิดคลุมตรงกัน.** จุด x อยู่ในส่วนปิดคลุมตามบอลก็ต่อเมื่อทุกบอลรอบ x ตัด A. ทุกเซตเปิดที่บรรจุ x มีบอลรอบ x อยู่ข้างใน เงื่อนไขทั้งสองจึงตรงกัน; ส่วนภายในได้จากการหาส่วนเติมเต็มของเซต.

สรุป: เซตเปิดของเมตริกทำตาม (T1)–(T3) และแยกจุดได้ด้วยบอลครึ่งระยะ จึงเป็นทอพอโลยีเฮาส์ดอร์ฟ. □

1.2.3 ทอพอโลยีจากนอร์ม: แบบใดละเอียดกว่ากัน

เมื่อมีสองเมตริกบนเซตเดียวกัน คำถามธรรมชาติคือ เมตริกหนึ่ง “เห็น” เซตเปิดมากกว่าอีกเมตริกหรือไม่. และถ้าเป็นนอร์ม คำถามนี้ตอบได้ด้วยอสมการหนึ่งบรรทัด.

นิยาม 1.2.4: ทอพอโลยีที่แรงกว่าและนอร์มที่สมมูลกัน

ให้ $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ เป็นทอพอโลยีสองแบบบนเซต X. เรากล่าวว่า $\mathcal{T}_2$**แรงกว่าหรือละเอียดกว่า** (stronger or finer) $\mathcal{T}_1$ ถ้า $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$; ในทางกลับกัน $\mathcal{T}_1$ อ่อนกว่าหรือหยาบกว่า $\mathcal{T}_2$. ถ้า $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ เราเรียกสองทอพอโลยีนั้นว่า**สมมูล** (equivalent).

ถ้า $\|\cdot\|_1$ และ $\|\cdot\|_2$ เป็นนอร์มบนปริภูมิเวกเตอร์ X ที่ก่อกำเนิด $\mathcal{T}_1$ และ $\mathcal{T}_2$ ตามลำดับ เราใช้คำเดียวกันกับนอร์ม. นอร์มสองตัวสมมูลกันก็ต่อเมื่อมีจำนวน $0 < m \le M$ ที่
$$m\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le M\|x\|_2 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- $\mathcal{T}_2$ ละเอียดกว่า $\mathcal{T}_1$ เมื่อทุกเซตเปิดของ $\mathcal{T}_1$ ยังเป็นเซตเปิดของ $\mathcal{T}_2$ (แต่อาจมีเซตเปิดเพิ่มเติม).
- ตัวอย่าง: บน $\mathbb{R}^2$ นอร์ม $\|\cdot\|_\infty$ และ $\|\cdot\|_1$ สมมูลกัน เพราะ $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le 2\|x\|_\infty$. ถ้าไม่มีค่าคงตัวรองรับอสมการใดอสมการหนึ่ง นอร์มสองตัวนั้นไม่สมมูลกัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 1.2.2: นอร์มที่แรงกว่าคืออสมการระหว่างนอร์ม

ให้นอร์มสองตัวบน X เช่นในนิยามการเปรียบเทียบนอร์มข้างต้น. แล้ว $\|\cdot\|_2$ แรงกว่า $\|\cdot\|_1$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวน $C>0$ ที่

$$\|x\|_1 \le C\|x\|_2 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ทิศไป: ถ้านอร์มแรกมีบอลหนึ่งหน่วยที่เปิดในทอพอโลยีที่สอง บอลเล็ก ๆ ของนอร์มที่สองรอบ 0 ก็อยู่ในนั้น. ทิศกลับ: ถ้าอสมการควบคุมนอร์มได้ บอลเล็กของนอร์มที่สองก็อยู่ข้างในบอลของนอร์มแรก.

1. **สมมติว่ามี C.** ให้ A เปิดเทียบกับ $\|\cdot\|_1$ และ $x\in A$. มี $r>0$ ที่ $B_r^1(x)\subset A$. ถ้า $\|y-x\|_2<r/C$ แล้ว $\|y-x\|_1\le C\|y-x\|_2<r$ จึง $y\in B_r^1(x)\subset A$. ดังนั้น $B_{r/C}^2(x)\subset A$ และ A เปิดเทียบกับ $\|\cdot\|_2$ ด้วย.
2. **สมมติว่า $\|\cdot\|_2$ แรงกว่า.** บอล $B_1^1(0)$ เปิดเทียบกับ $\|\cdot\|_1$ จึงเปิดเทียบกับ $\|\cdot\|_2$ ด้วย. โดยเฉพาะ 0 เป็นจุดภายในจึงมี $\varepsilon>0$ ที่ $B_\varepsilon^2(0)\subset B_1^1(0)$.
3. **ยืดหดเวกเตอร์.** ให้ $x\neq 0$ และ $y=\dfrac{\varepsilon x}{2\|x\|_2}$. แล้ว $\|y\|_2=\varepsilon/2<\varepsilon$ จึง $\|y\|_1<1$. จากภาวะเอกพันธุ์ของ $\|\cdot\|_1$,
$$\frac{\varepsilon}{2\|x\|_2}\|x\|_1<1, \qquad \text{นั่นคือ} \qquad \|x\|_1<\frac{2}{\varepsilon}\|x\|_2.$$
สำหรับ $x=0$ อสมการเป็นจริงโดยตรง. ใช้ $C=2/\varepsilon$ ได้.

สรุป: การเปรียบเทียบทอพอโลยีของการเหนี่ยวนอร์ม คือการมีค่าคงตัวคูณที่ควบคุมนอร์มหนึ่งด้วยอีกนอร์มหนึ่ง. □

ใน $\mathbb{R}^n$ นอร์มทั้งสามของหัวข้อ 1.1 ไม่ได้แค่เปรียบเทียบกันได้ แต่ควบคุมกันด้วยค่าคงตัวที่เขียนออกมาได้ชัด.

ทฤษฎีบท 1.2.3: นอร์ม ℓ^p บน $\mathbb{R}^n$ สมมูลกัน

ให้ $1\le p<\infty$ และ $x\in\mathbb{R}^n$. แล้ว

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty.$$

โดยเฉพาะ $\|\cdot\|_p$ สมมูลกับ $\|\cdot\|_\infty$ ด้วยค่าคงตัว 1 และ $n^{1/p}$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** อสมการซ้ายได้เพราะทุกช่องไม่เกินค่าที่ใหญ่ที่สุด. อสมการขวาได้เพราะมี n ช่อง แต่ละช่องไม่เกิน $\|x\|_\infty$.

1. ให้ j เป็นช่องที่ $|x_j|=\|x\|_\infty$. แล้ว $\|x\|_p^p=\sum_i|x_i|^p\ge|x_j|^p=\|x\|_\infty^p$ จึง $\|x\|_p\ge\|x\|_\infty$.
2. แต่ละช่องมี $|x_i|\le\|x\|_\infty$ จึง $\|x\|_p^p=\sum_i|x_i|^p\le n\|x\|_\infty^p$ และได้อสมการขวาเมื่อถอดรากที่ p.

สรุป: ℓ^p กับ ℓ^∞ ให้ระยะที่ต่างกันไม่เกินค่าคงตัว $\sqrt[p]{n}$ ซึ่งขึ้นกับจำนวนช่องเท่านั้น. □

สำหรับ $p=1$ และ $p=2$ อสมการข้างต้นให้

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

อสมการกลางที่ใช้บ่อยคือ $\|x\|_2\le\|x\|_1\le\sqrt{n}\,\|x\|_2$: อันแรกได้จากการกระจายกำลังสองของผลบวก และอันที่สองได้จากอสมการโคชี–ชวาร์ซ. ทั้งสามนอร์มจึงสมมูลกันบน $\mathbb{R}^n$ และค่าคงตัวขึ้นกับ n. ค่าคงตัวนี้จะกลับมาเป็นตัวเอกในหัวข้อ 1.3.

ในมิติอนันต์การสมมูลอาจล้มเหลว; ตัวอย่าง $f_k(t)=t^k$ บน $C[0,1]$ อยู่ในหัวข้อ 1.3.5.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

1.2.4 การลู่เข้าและลิมิต

ตอนนี้เรามีคำว่าใกล้และเซตเปิดแล้ว. การลู่เข้าคือการที่พจน์ท้าย ๆ ของลำดับเข้าไปอยู่ในบอลทุกลูกรอบจุดเป้าหมาย.

นิยาม 1.2.5: การลู่เข้าในปริภูมิอิงระยะทาง

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับใน X และ $x \in X$. เรากล่าวว่าลำดับนี้**ลู่เข้า** (converge) สู่ x และเขียน $x_k \to x$ ถ้า

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k > K : \quad d(x_k, x) < \varepsilon.$$

เราเรียก x ว่า**ลิมิต** (limit) ของลำดับ. ลำดับที่ลู่เข้าเรียกว่าลำดับลู่เข้า; ลำดับที่ไม่ลู่เข้าเรียกว่าลำดับลู่ออก.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- เงื่อนไขบอกว่า “ไม่ว่าจะตั้งบอลเล็กแค่ไหน รอบ x มีพจน์ของลำดับอยู่ข้างในเกือบทั้งหมด”. คำว่าเกือบทั้งหมดหมายถึงทุกพจน์ตั้งแต่ตัวที่ $K+1$ ไป.
- ε เลือกก่อน แล้วจึงหา K. K ขึ้นกับ ε ได้ แต่ต้องใช้ได้กับทุก $k > K$ พร้อมกัน.
- $d(x_k, x) \to 0$ ใน $\mathbb{R}$ เป็นเงื่อนไขเดียวกัน. เราใช้รูปใดรูปหนึ่งตามสะดวก.

ทฤษฎีบท 1.2.4: ลิมิตมีได้ตัวเดียว

ในปริภูมิอิงระยะทาง ลำดับหนึ่งมีลิมิตได้ไม่เกินหนึ่งตัว.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ถ้ามีสองลิมิต ระยะระหว่างสองลิมิตถูกบีบด้วยระยะไปยังพจน์ท้าย ๆ ซึ่งเล็กเท่าไรก็ได้.

1. สมมติ $x_k \to x$ และ $x_k \to y$. ให้ $\varepsilon > 0$.
2. มี K_1 ที่ $d(x_k, x) < \varepsilon/2$ สำหรับ $k > K_1$ และมี K_2 ที่ $d(x_k, y) < \varepsilon/2$ สำหรับ $k > K_2$. ให้ $K = \max(K_1, K_2)$ และเลือก $k > K$.
3. อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมให้ $d(x, y) \le d(x, x_k) + d(x_k, y) < \varepsilon$. เพราะ $\varepsilon > 0$ เป็นค่าใดก็ได้ จึง $d(x, y) = 0$ และ $x = y$.

สรุป: สองลิมิตที่ต่างกันต้องมีระยะเป็นบวก แต่ระยะนั้นเล็กกว่าทุก ε จึงเป็นศูนย์. □

ลองเอง: ลำดับของภาพที่ค่อย ๆ สว่างขึ้น

ให้ A เป็นภาพฐานในหัวข้อ 1.1 และ $p = (0, 0)$. กำหนดภาพ X_k โดยให้ $X_k = A$ ทุกช่อง ยกเว้นช่อง p ซึ่งมีค่า $A_{00} + 1/k$. จงแสดงว่า $X_k \to A$ ใน ℓ^1, ℓ^2 และ ℓ^∞ พร้อมหาค่า $\|X_k - A\|$ ทั้งสามแบบ.

ผลต่างมีเพียงช่องเดียวและมีค่า $1/k$. ดังนั้น $\|X_k - A\|_1 = \|X_k - A\|_2 = \|X_k - A\|_\infty = 1/k$. สำหรับ $\varepsilon > 0$ เลือก $K > 1/\varepsilon$; ทุก $k > K$ ให้ระยะ $1/k < \varepsilon$. ลำดับจึงลู่เข้าในทั้งสามนอร์ม. ตัวเลข $1/k$ ใช้ได้กับทุกนอร์มเพราะมีช่องเดียว; ถ้าผลต่างกระจายหลายช่อง สามนอร์มจะให้ค่าต่างกัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ข้อควรระวัง: ลำดับที่สลับค่าไปมาไม่ลู่เข้า

ให้ $y_k = (-1)^k$ ใน $\mathbb{R}$. ลำดับนี้ไม่ลู่เข้าสู่ 1: เลือก $\varepsilon = 1$ แล้วทุกพจน์คี่มีระยะ $|(-1) - 1| = 2 \geq \varepsilon$. ในทำนองเดียวกันก็ไม่ลู่เข้าสู่ -1 และไม่ลู่เข้าสู่จำนวนใดเลย (เพราะ $|x-1| + |x+1| \geq 2$ ทำให้ระยะจาก x ถึง 1 หรือถึง -1 อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่น้อยกว่า 1). ลำดับที่มีขอบเขตจึงไม่จำเป็นต้องลู่เข้า. ในภาพหนึ่งพิกเซลที่สลับค่าระหว่าง 0 กับ 255 ทุกเฟรมคือตัวอย่างเดียวกัน: ค่าไม่นิ่ง แม้จะอยู่ในช่วงเดิมตลอด.

ทฤษฎีบท 1.2.5: บทแทรกการลิมิตซ้อน

ให้ $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_{k,i})_{k,i\in\mathbb{N}}$ และ $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ เป็นจำนวนจริงไม่ลบ. สมมติว่า

$$a_i \leq b_{k,i} + c_k \qquad \text{สำหรับทุก } i, k \in \mathbb{N},$$

และสำหรับแต่ละ k คงที่ $b_{k,i} \to 0$ เมื่อ $i \to \infty$, ขณะที่ $c_k \to 0$ เมื่อ $k \to \infty$. แล้ว $a_i \to 0$ เมื่อ $i \to \infty$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** แบ่ง ε เป็นสองครึ่ง: ครึ่งหนึ่งกลืน c_k ด้วยการเลือก k ก่อน แล้วอีกครึ่งกลืน $b_{k,i}$ ด้วยการเลือก i หลังจากนั้น.

1. ให้ $\varepsilon > 0$. เลือก k_0 ที่ $c_{k_0} < \varepsilon/2$; ทำได้เพราะ $c_k \to 0$.
2. สำหรับ k_0 นี้ เลือก i_0 ที่ $b_{k_0,i} < \varepsilon/2$ สำหรับทุก $i > i_0$; ทำได้เพราะ $b_{k_0,i} \to 0$ เมื่อ $i \to \infty$.
3. สำหรับ $i > i_0$ จะได้ $a_i \leq b_{k_0,i} + c_{k_0} < \varepsilon$. เพราะ ε เป็นค่าใดก็ได้ $a_i \to 0$.

สรุป: ลำดับการเลือกสำคัญ: k ก่อน แล้ว i; ถ้าสลับกัน ค่าของ c_k จะยังไม่ถูกควบคุม. □

1.2.5 ความต่อเนื่อง

การแปลงภาพเป็นการส่งจากปริภูมิหนึ่งไปอีกปริภูมิหนึ่ง. เราอยากรู้ว่า “ภาพที่ใกล้กัน” ยังได้ผลลัพธ์ที่ใกล้กันหรือไม่. นี่คือความต่อเนื่อง.

นิยาม 1.2.6: ความต่อเนื่องที่จุด

ให้ (X, d_X) และ (Y, d_Y) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง, $A \subset X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in \operatorname{clos}(A)$ และ $y_0 \in Y$. เรากล่าวว่า $f(x) \to y_0$ เมื่อ $x \to x_0$ ถ้า

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A: \qquad d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

ถ้า $x_0 \in A$ และ $y_0 = f(x_0)$ เราเรียก f ว่า**ต่อเนื่อง** (continuous) ที่ x_0.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ε คือความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ที่ปลายทาง; δ คือระยะที่ยอมให้เปลี่ยนที่ต้นทาง. เราต้องหา δ ให้ได้ทุกครั้งที่ได้ ε มา.
- δ ขึ้นกับ ε และขึ้นกับ x_0 ได้. ถ้าเลือก δ ตัวเดียวใช้ได้ทุก x_0 เราเรียกความต่อเนื่องนั้นว่า**เอกรูป** (uniform).
- ตัวอย่าง: $f(t) = t^2$ บน $\mathbb{R}$ ต่อเนื่องทุกจุด. ตัวอย่างค้าน: ฟังก์ชันขั้นบันไดที่กระโดดที่ 0 ไม่ต่อเนื่องที่ 0.

ร่างพิมพ์ · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 1.2.6: เกณฑ์ลำดับสำหรับความต่อเนื่อง

ให้ $A \subset X$, $f : A \to Y$ และ $x_0 \in A$. ข้อความสองข้อต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) f ต่อเนื่องที่ x_0 ตามนิยามความต่อเนื่องข้างต้น;

(ii) สำหรับทุกลำดับ (x_k) ใน A ที่ $x_k \to x_0$ จะได้ $f(x_k) \to f(x_0)$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ทิศ (i)⇒(ii) ต่อท่อ ε ไปยัง δ ไปยังดัชนี K. ทิศกลับใช้การเขียนนิเสธ: ถ้า (i) ผิด เราสร้างลำดับที่เข้าใกล้ x_0 แต่ภาพไม่เข้าใกล้ $f(x_0)$.

1. **(i)⇒(ii).** ให้ $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$ ตาม (i). ถ้า $x_k \to x_0$ มี K ที่ $d_X(x_k, x_0) < \delta$ สำหรับ $k > K$. สำหรับ k เหล่านั้น $d_Y(f(x_k), f(x_0)) < \varepsilon$. จึง $f(x_k) \to f(x_0)$.
2. **นิเสธของ (i).** ถ้า (i) ไม่จริง มี $\varepsilon > 0$ ที่สำหรับทุก $\delta > 0$ มี $x \in A$ ที่ $d_X(x, x_0) < \delta$ แต่ $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$.
3. **สร้างลำดับตัวร้าย.** เลือก $\delta = 1/k$ แล้วได้ $x_k \in A$ ที่ $d_X(x_k, x_0) < 1/k$ และ $d_Y(f(x_k), f(x_0)) \geq \varepsilon$.
4. **ข้อขัดแย้ง.** ลำดับนี้ลู่เข้าสู่ x_0 แต่ภาพไม่ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$ ซึ่งขัดกับ (ii). ดังนั้น (ii) ลาก (i) ได้.

สรุป: ในปริภูมิอิงระยะทาง ตรวจความต่อเนื่องด้วยลำดับได้ เพราะบอลรัศมี $1/k$ เล็กลงจนเป็นศูนย์. □

ลองเอง: การตัดค่าสีและธรณีประตู

กำหนดการตัดค่าสี $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $c(t) = \min(\max(t, 0), 255)$ และกำหนดธรณีประตู $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $h(t) = 1$ ถ้า $t \geq 128$ และ $h(t) = 0$ ถ้า $t < 128$.

(a) จงแสดงว่า $|c(s) - c(t)| \leq |s - t|$ สำหรับทุก s, t.

(b) จงแสดงว่า h ไม่ต่อเนื่องที่ 128.

(a) ถ้า s, t อยู่ฝั่งเดียวกันของ $[0, 255]$ ทั้งคู่ c เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์หรือค่าคงที่ จึงได้อสมการ. ถ้า $s < 0 < t$ แล้ว $c(s) = 0$ และ $c(t) \leq t$ จึง $|c(s) - c(t)| \leq t = t - s$. กรณีอื่นได้ในทำนองเดียวกัน. (b) ให้ $t_k = 128 - 1/k$. แล้ว $t_k \to 128$ แต่ $h(t_k) = 0$ ทุก k ขณะที่ $h(128) = 1$. ระยะระหว่างภาพจึงเป็น 1 ตลอด ไม่เล็กตาม ε ที่เลือก.

ผลข้อ (a) ใช้กับภาพได้ทันที: ถ้า c ถูกใช้ทีละพิกเซล แล้ว $\|c(x) - c(y)\|_p \leq \|x - y\|_p$ สำหรับ $p = 1, 2, \infty$ เพราะแต่ละช่องไม่เพิ่มระยะ. การตัดค่าสีจึงต่อเนื่องในทุกนอร์มเหล่านี้ ด้วย $\delta = \varepsilon$. ตรงกันข้าม ธรณีประตูทำให้พิกเซลหนึ่งกระโดดเต็มหน่วยเมื่อค่าข้าม 128 แม้การเปลี่ยนแปลงที่ต้นทางจะเล็กมาก.

1.2.6 นอร์มสมมูลให้ลำดับลู่เข้าเดียวกัน

เรารู้แล้วว่านอร์ม ℓ^p บน $\mathbb{R}^n$ สมมูลกัน. คำถามคือ “สมมูล” แปลว่าอะไรในภาษาของลำดับ. คำตอบคือ ลำดับลู่เข้าเหมือนกันและมีลิมิตเดียวกัน.

ร่างปริญญา · Preprint · 2025-10-24

ทฤษฎีบท 1.2.7: นอร์มสมมูลกันก็ต่อเมื่อลำดับลู่เข้าเหมือนกัน

ให้นอร์มสองตัว $\|\cdot\|$ และ $\|\cdot\|'$ บนปริภูมิเวกเตอร์ X. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) นอร์มทั้งสองสมมูลกัน;

(ii) ลำดับหนึ่งลู่เข้าเทียบกับ $\|\cdot\|$ ก็ต่อเมื่อลู่เข้าเทียบกับ $\|\cdot\|'$ และลิมิตเท่ากัน;

(iii) ลำดับหนึ่งลู่เข้าศูนย์เทียบกับ $\|\cdot\|$ ก็ต่อเมื่อลู่เข้าศูนย์เทียบกับ $\|\cdot\|'$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** (i)⇒(ii)⇒(iii) ตรงไปตรงมา. ทิศ (iii)⇒(i) ใช้ข้อขัดแย้ง: ถ้าไม่มีค่าคงตัวคูณ จะสร้างลำดับที่เล็กในนอร์มหนึ่งแต่ไม่เล็กในอีกนอร์มหนึ่ง.

1. **(i)⇒(ii).** ให้ $m\|x\|' \le \|x\| \le M\|x\|'$. ถ้า $\|x_k - x\| \to 0$ แล้ว $\|x_k - x\|' \le \frac{1}{m}\|x_k - x\| \to 0$. ถ้า $\|x_k - x\|' \to 0$ แล้ว $\|x_k - x\| \le M\|x_k - x\|' \to 0$. ลิมิตที่ได้จากทั้งสองทิศจึงเป็นตัวเดียวกัน เพราะลิมิตในปริภูมินอร์มมีได้ตัวเดียว.

2. **(ii)⇒(iii).** การลู่เข้าศูนย์หมายความว่าลิมิตเป็นเวกเตอร์ศูนย์. จาก (ii) ลิมิตนั้นไม่ขึ้นกับว่าใช้นอร์มใด จึงเป็น 0 ทั้งสองนอร์ม.

3. **(iii)⇒(i).** สมมติว่าไม่มี $M > 0$ ที่ $\|x\| \le M\|x\|'$ สำหรับทุก x. สำหรับแต่ละ k จึงมี $x_k \neq 0$ ที่ $\|x_k\| > k\|x_k\|'$. ให้ $z_k = x_k/\|x_k\|$. แล้ว $\|z_k\| = 1$ ทุก k และ

$$\|z_k\|' = \frac{\|x_k\|'}{\|x_k\|} < \frac{1}{k} \longrightarrow 0.$$

ลำดับ z_k ลู่เข้าศูนย์เทียบกับ $\|\cdot\|'$ แต่ไม่ลู่เข้าศูนย์เทียบกับ $\|\cdot\|$ เพราะนอร์มของทุกพจน์เป็น 1. ขัดกับ (iii). สลับบทบาทของสองนอร์มแล้วทำแบบเดิม จะได้ $m > 0$ ที่ $m\|x\|' \le \|x\|$ สำหรับทุก x. รวมสองอสมการจึงได้การสมมูล.

สรุป: การสมมูลของนอร์มคือการที่ทั้งสองนอร์มมองเห็น “ลำดับที่เล็ก” ชุดเดียวกัน; ค่าคงตัวคูณคือสะพานระหว่างสองมุมมอง. □

ข้อควรระวัง: ลู่เข้าเหมือนกัน ไม่ได้แปลว่าตัวเลขเท่ากัน

ทฤษฎีบท 1.2.7 บอกว่าลำดับลู่เข้าหรือไม่ลู่เข้าไม่เปลี่ยนเมื่อเปลี่ยนไปใช้ ℓ^p ตัวอื่นบน $\mathbb{R}^n$. แต่*ระยะทาง*ของแต่ละคู่ภาพเปลี่ยน และ*ค่าที่วัดได้*เปลี่ยน. การจัดลำดับภาพตาม “แย่ที่สุด” จึงอาจพลิกได้ แม้การลู่เข้าจะเหมือนเดิม. หัวข้อ 1.3 จะทำให้เรื่องนี้ชัดด้วยตัวอย่างตาที่หายไป.

1.2.7 ลำดับ Cauchy

การลู่เข้าอ้างถึงลิมิต ซึ่งบางครั้งเราไม่รู้ว่าคืออะไร. ลำดับ Cauchy อธิบาย “การนิ่ง” ของลำดับโดยไม่ต้องรู้ลิมิต: พจน์ท้าย ๆ อยู่ใกล้กันเอง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-04

นิยาม 1.2.7: ลำดับ Cauchy

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง. ลำดับ (x_k) ใน X เป็น**ลำดับโคชี** (Cauchy sequence) ถ้า

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall k, l > N : \quad d(x_k, x_l) < \varepsilon.$$

เงื่อนไขนี้พูดถึงเฉพาะระยะระหว่างพจน์ของลำดับเอง ไม่ต้องมีลิมิตให้อ้างถึงล่วงหน้า.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- เงื่อนไขพูดถึงคู่พจน์ท้าย ๆ ทุกคู่ ไม่ใช่แค่พจน์ติดกัน. ต้องบังคับทีเดียวทั้งหางของลำดับ.
- ลำดับลู่เข้าทุกลำดับเป็นลำดับ Cauchy: ถ้าพจน์ท้ายอยู่ใกล้ลิมิต พจน์ท้ายสองตัวก็อยู่ใกล้กัน (อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม).
- กลับกันไม่จริงในทุกปริภูมิ, แต่จริงใน $\mathbb{R}^n$. ตัวอย่างที่กลับกันไม่จริงคือ $\mathbb{Q}$ กับลำดับที่ลู่เข้าสู่ $\sqrt{2}$, ซึ่งไม่อยู่ใน $\mathbb{Q}$.

ทฤษฎีบท 1.2.8: ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับ Cauchy

ในปริภูมิอิงระยะทาง ทุกลำดับที่ลู่เข้าเป็นลำดับ Cauchy.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** พจน์ท้ายสองตัวอยู่ใกล้ลิมิตตัวเดียวกัน จึงอยู่ใกล้กันไม่เกินผลบวกของระยะทั้งสอง.

1. ให้ $x_k \to x$ และ $\varepsilon > 0$. มี N ที่ $d(x_k, x) < \varepsilon/2$ สำหรับ $k > N$.
2. สำหรับ $k, l > N$ อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมให้ $d(x_k, x_l) \le d(x_k, x) + d(x, x_l) < \varepsilon$.

สรุป: ลิมิตทำหน้าที่เป็นจุดกลางที่พจน์ท้ายทุกตัวล้อมรอบ. □

ข้อควรระวัง: พจน์ติดกันใกล้กันไม่พอ

ให้ $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$. แล้ว $s_{k+1} - s_k = 1/(k+1) \to 0$ แต่ (s_k) ไม่เป็นลำดับ Cauchy: สำหรับ $l = 2k$,

$$s_{2k} - s_k = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i} \ge \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$

ดังนั้นเลือก $\varepsilon = 1/2$ แล้วไม่มี N ใดใช้ได้. ในภาษาภาพ: สไลเดอร์ที่เลื่อนทีละน้อยลงเรื่อย ๆ ยังเดินทางไกลไม่จำกัด; ระยะระหว่างเฟรมติดกันเล็ก แต่ระยะระหว่างเฟรมต้นกับเฟรมท้ายไม่เล็ก. การเป็น Cauchy จึงเป็นเงื่อนไขที่แรงกว่าการที่ผลต่างติดกันลู่เข้าศูนย์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 1.2.9: ลำดับ Cauchy มีขอบเขต

ในปริภูมินอร์ม ทุกลำดับ Cauchy มีขอบเขต.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ใช้ $\varepsilon = 1$ เพื่อดึงพจน์ท้ายทั้งหมดเข้ามาอยู่ในบอลหนึ่งลูก แล้วเหลือพจน์ต้นเพียงจำนวนจำกัด.

1. มี N ที่ $\|x_k - x_l\| < 1$ สำหรับ $k, l > N$. โดยเฉพาะ $\|x_k\| < \|x_{N+1}\| + 1$ สำหรับ $k > N$.
2. ให้ $R = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|, \|x_{N+1}\| + 1\}$. แล้ว $\|x_k\| \le R$ ทุก k.

สรุป: หางของลำดับอยู่ในบอลหนึ่งลูก และส่วนหัวมีเพียงจำนวนจำกัด. □

สรุปใจความ

- บอลทำให้คำว่า “ใกล้” เป็นรูปธรรม; เซตเปิดคือเซตที่ทุกจุดมีบอลอยู่ข้างใน. เซตเปิดของเมตริกทำตาม (T1)–(T3) และแยกจุดได้ด้วยบอลครึ่งระยะ จึงเป็นทอพอโลยีเฮาส์ดอร์ฟ.
- การลู่เข้าคือการที่พจน์ท้ายอยู่ในทุกบอลรอบลิมิต; ลิมิตมีได้ตัวเดียว.
- ความต่อเนื่องตรวจได้ด้วยลำดับ, และการตัดค่าสีต่อเนื่องในทุก ℓ^p ขณะที่ธรณีประตูไม่ต่อเนื่อง.
- นอร์ม ℓ^p บน $\mathbb{R}^n$ สมมูลกันด้วยค่าคงตัวที่ขึ้นกับ n; ลำดับลู่เข้าเหมือนกันทุกนอร์ม แต่ตัวเลขที่วัดได้ต่างกัน.
- ลำดับ Cauchy คือนิ่งโดยไม่ต้องรู้ลิมิต; ลำดับลู่เข้าเป็น Cauchy เสมอ แต่กลับกันไม่จริงในทุกปริภูมิ.

อ่านต่อ. หัวข้อ 1.3 จะถามว่าเมื่อใดลำดับ Cauchy จะมีลิมิตอยู่ในปริภูมิจริง ๆ และจะใช้ค่าคงตัว n จากการเปรียบเทียบนอร์มตอบปริศนาตาที่หายไปได้อย่างไร.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $x = (2, -3, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ และ $A = \{y \in \mathbb{R}^4 : y_1 + y_2 = 0,\ y_3 = 1,\ y_4 = 0\}$. จงหา $\operatorname{dist}(x, A)$ ใน ℓ^1, ℓ^2 และ ℓ^∞, และบอกว่าค่าใดบรรลุที่จุดใด.
2. จงแสดงข้อความต่อไปนี้ใน $\mathbb{R}^n$.
   (a) เซต $\{x : \|x\|_1 < 1\}$ เป็นเซตเปิด.
   (b) เซต $\{x : \|x\|_1 \le 1\}$ เป็นเซตปิด.
   (c) ยกตัวอย่างเซตใน $\mathbb{R}$ ที่ไม่เปิดและไม่ปิด พร้อมอธิบาย.
3. กำหนด $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ และ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ โดย $g(x) = \max_i x_i$.
   (a) จงแสดงว่า f ต่อเนื่องเมื่อต้นทางใช้ ℓ^1 และปลายทางใช้ค่าสัมบูรณ์ พร้อมหา δ ในรูปของ ε และ n.
   (b) จงแสดงว่า g ต่อเนื่องเมื่อต้นทางใช้ ℓ^∞.
   (c) ให้ $h(x) = \#\{i : x_i \ge 128\}$. จงแสดงว่า h ไม่ต่อเนื่องที่ $x^* = (128, \ldots, 128)$.
4. ให้ $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) จงพิสูจน์ $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

(b) จงหาเวกเตอร์ที่ทำให้แต่ละอสมการเป็นสมการ.

(c) สำหรับ $n = 64$ จงเขียนค่าคงตัวทั้งสองและยกตัวอย่างเวกเตอร์ที่ทำให้อสมการขวาเป็นสมการ.

5. (a) จงพิสูจน์ว่า ถ้าลำดับ (x_k) เป็นลำดับ Cauchy และมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าสู่ x แล้ว $x_k \to x$.

(b) ใช้ข้อ (a) กับทฤษฎีบทโบลซาโน–ไวเออร์ชตราส (ทุกลำดับที่มีขอบเขตใน $\mathbb{R}$ มีลำดับย่อยลู่เข้า) เพื่อแสดงว่าทุกลำดับ Cauchy ใน $\mathbb{R}$ ลู่เข้า.

6. เปิดรูป `code/figures/ch01-norm-balls.pdf` หรือรัน `code/funkana/ch01.py`.

(a) จุด $(1, 1)$ มีนอร์มเท่าไรในแต่ละนอร์ม $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$.

(b) จงเติมค่าคงตัว C ในอสมการ $\|x\|_1 \le C\|x\|_\infty$ สำหรับ $n = 64$, $n = 192$ และ $n = 2073600$.

(c) ถ้าเราต้องการรับประกันว่า “ทุกพิกเซลต่างกันไม่เกิน 5 หน่วย” ควรใช้ข้อความแบบใด และอสมการ $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ ช่วยอะไรได้บ้าง.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ระยะถึงเซตในสามนอร์ม.**

(a) จุดใน A เขียนได้เป็น $y = (t, -t, 1, 0)$ กับ $t \in \mathbb{R}$. ผลต่างคือ $x - y = (2 - t, -3 + t, 0, 0)$.

(b) ใน ℓ^1:

$$\|x - y\|_1 = |2 - t| + |t - 3|.$$

ผลบวกของระยะจาก t ถึง 2 และถึง 3 มีค่าน้อยสุดเมื่อ t อยู่ระหว่าง 2 กับ 3 และค่านั้นคือ 1. ดังนั้น $\operatorname{dist}(x, A) = 1$ และบรรลุที่ทุก $t \in [2, 3]$.

(c) ใน ℓ^2: $\|x - y\|_2^2 = (t-2)^2 + (t-3)^2 = 2(t - \tfrac{5}{2})^2 + \tfrac{1}{2}$. ค่าน้อยสุดคือ $\tfrac{1}{2}$ ที่ $t = \tfrac{5}{2}$ จึง $\operatorname{dist}(x, A) = \sqrt{1/2} \approx 0.7071$.

(d) ใน ℓ^∞: $\|x - y\|_\infty = \max(|t-2|, |t-3|)$. ค่าที่น้อยสุดเกิดเมื่อสองค่าเท่ากัน คือ $t = \tfrac{5}{2}$ และค่าเป็น $\tfrac{1}{2}$. ทั้งสามค่านี้ต่างกัน: 1, 0.7071 และ 0.5.

2. **เซตเปิดและเซตปิด.**

(a) ให้ $\|x\|_1 < 1$ และ $r = 1 - \|x\|_1 > 0$. ถ้า $\|y - x\|_1 < r$ แล้ว $\|y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y - x\|_1 < 1$. จึง $B_r(x) \subset \{x : \|x\|_1 < 1\}$ และเซตนี้เปิด.

(b) ให้ $x_k \in \{x : \|x\|_1 \le 1\}$ และ $x_k \to x$. จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมย้อนกลับ $|\|x_k\|_1 - \|x\|_1| \le \|x_k - x\|_1$ ได้ $\|x\|_1 \le 1$. ทุกลิมิตของลำดับในเซตจึงอยู่ในเซต เซตนี้จึงปิด. (อีกวิธี: ส่วนเติมเต็ม $\{\|x\|_1 > 1\}$ เปิดด้วยเหตุผลเดียวกับข้อ (a).)

(c) $[0, 1[$ ใน $\mathbb{R}$: จุด 0 ไม่มีบอลใดอยู่ในเซต จึงไม่เปิด; จุด 1 อยู่ในส่วนปิดคลุมแต่ไม่อยู่ในเซต จึงไม่ปิด.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-21

3. **ความต่อเนื่องของฟังก์ชันภาพ.**

   (a) สำหรับ x, y,

   $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{n}\sum_i (x_i - y_i)\right| \le \frac{1}{n}\sum_i |x_i - y_i| = \frac{1}{n}\|x - y\|_1.$$

   เลือก $\delta = n\varepsilon$. ถ้า $\|x - y\|_1 < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   (b) ให้ $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. สำหรับทุก i จะได้ $x_i < y_i + \varepsilon \le g(y) + \varepsilon$ และในทำนองเดียวกัน $y_i < g(x) + \varepsilon$. ดังนั้น $g(x) \le g(y) + \varepsilon$ และ $g(y) \le g(x) + \varepsilon$ นั่นคือ $|g(x) - g(y)| \le \|x - y\|_\infty < \varepsilon$. ใช้ $\delta = \varepsilon$.

   (c) ให้ $\varepsilon = 1$ และ $\delta > 0$ ใด ๆ. ให้ y เหมือน x^* แต่พิกัดแรกเป็น $128 - \delta/2$. แล้ว $\|y - x^*\|_\infty = \delta/2 < \delta$ แต่ $h(y) = n - 1$ และ $h(x^*) = n$ ต่างกัน $1 \ge \varepsilon$. จึงไม่มี δ ที่ใช้ได้.

4. **สองนอร์มบน $\mathbb{R}^n$.**

   (a) อสมการซ้าย: $\left(\sum_i |x_i|\right)^2 = \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} |x_i||x_j| \ge \sum_i x_i^2$. อสมการขวา: จากอสมการโคชี–ชวาร์ซกับเวกเตอร์ $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ และ $(1, \ldots, 1)$,

   $$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \cdot 1 \le \Big(\sum_i |x_i|^2\Big)^{1/2} \sqrt{n} = \sqrt{n}\,\|x\|_2.$$

   (b) อสมการซ้ายเป็นสมการเมื่อมีช่องที่ไม่เป็นศูนย์ได้ไม่เกินหนึ่งช่อง เช่น $x = e_1$: $\|e_1\|_2 = \|e_1\|_1 = 1$. อสมการขวาเป็นสมการเมื่อทุกช่องมีขนาดเท่ากัน เช่น $x = (1, \ldots, 1)$: $\|x\|_1 = n$ และ $\sqrt{n}\,\|x\|_2 = \sqrt{n}\cdot\sqrt{n} = n$.

   (c) สำหรับ $n = 64$ ค่าคงตัวคือ 1 และ $\sqrt{64} = 8$. เวกเตอร์ $(1, \ldots, 1)$ ให้ $\|x\|_1 = 64$ และ $8\|x\|_2 = 8 \cdot 8 = 64$; อสมการขวาจึงเป็นสมการ.

5. **Cauchy และลำดับย่อย.**

   (a) ให้ $\varepsilon > 0$. มี N ที่ $d(x_k, x_l) < \varepsilon/2$ สำหรับ $k, l > N$. ให้ k_j เป็นดัชนีของลำดับย่อยที่ $x_{k_j} \to x$. มี J ที่ $d(x_{k_j}, x) < \varepsilon/2$ สำหรับ $j > J$ และ $k_j > N$. สำหรับ $k > N$ เลือก $j > J$ ที่ $k_j > N$; แล้ว

   $$d(x_k, x) \le d(x_k, x_{k_j}) + d(x_{k_j}, x) < \varepsilon.$$

   (b) ให้ (x_k) เป็น Cauchy ใน $\mathbb{R}$. ตามทฤษฎีบท 1.2.9 ลำดับนี้มีขอบเขต. ตามทฤษฎีบทโบลซาโน–ไวเออร์ชตราส มีลำดับย่อย $x_{k_j} \to x$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ บางตัว. ใช้ข้อ (a) กับคู่ (x_k) และ (x_{k_j}): ลำดับลู่เข้าสู่ x.

6. **บอลหนึ่งหน่วยและค่าคงตัว.**

   (a) จุด $(1, 1)$ มี $\|(1,1)\|_1 = 2$, $\|(1,1)\|_2 = \sqrt{2} \approx 1.4142$ และ $\|(1,1)\|_\infty = 1$. ในรูป บอลหนึ่งหน่วยเปิดของ ℓ^1 และ ℓ^2 ไม่บรรจุจุดนี้ เพราะนอร์มมากกว่า 1; บอลหนึ่งหน่วยปิดของ ℓ^∞ มีจุดนี้อยู่ที่มุมพอดี เพราะนอร์มเท่ากับ 1.

   (b) $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$, จึง $C = n$: สำหรับ $n = 64$ ได้ $C = 64$; $n = 192$ ได้ $C = 192$; $n = 2073600$ (ภาพ 1920×1080) ได้ $C = 2073600$.

   (c) ข้อความ “ทุกพิกเซลต่างกันไม่เกิน 5” คือ $\|x - y\|_\infty \le 5$. อสมการ $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ ให้ทิศเดียว: ถ้า $\|x - y\|_\infty \le 5$ แล้ว $\|x - y\|_1 \le 5n$. แต่การรู้ $\|x - y\|_1$ ไม่ได้บอกขอบเขตของพิกเซลเดียว. ต้องใช้ ℓ^∞ เมื่อต้องการรับประกันรายพิกเซล.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

1.3 ความบริบูรณ์และนอร์มที่เทียบกันได้

ภาพรวมก่อนอ่าน

หัวข้อ 1.2 ตอบว่า “ลู่เข้า” หมายถึงอะไร แต่ลำดับ Cauchy อาจไม่มีลิมิตในปริภูมิ. สมบัติที่ทำให้ทุกลำดับ Cauchy มีลิมิตเรียกว่าความบริบูรณ์; หัวข้อนี้ยังอธิบายด้วยว่าทำไมภาพที่ตาหายไปจึงมีค่าเฉลี่ยของความผิดพลาดเล็ก แต่พิกเซลที่แย่ที่สุดผิดพลาดมาก.

กลับไปที่ภาพบุคคลจากหน้าเปิดบท: ภาพขาวดำขนาด 64×64 ($n = 4096$) กับภาพที่ตาซ้ายหายไป. เราเทียบทั้งสองกับต้นฉบับในสามนอร์ม และเทียบกับภาพที่เบลอด้วยตัวกรองเฉลี่ย 3×3.



รูปที่ 1.4: ภาพบุคคลสังเคราะห์ขนาด 64×64 (สถานการณ์สมมติ), ภาพที่ตาซ้ายหายไป และแผนที่ของผลต่าง. ผลต่างไม่เป็นศูนย์ใน 31 พิกเซล แต่แต่ละพิกเซลต่างกัน 130 หน่วย (สร้างจาก `code/funkana/ch01.py`).

ภาพเทียบกับต้นฉบับ	ℓ^1	$\ell^1/4096$	ℓ^2	ℓ^∞
ตาซ้ายหายไป	4030	0.984	723.8	130
เบลอ 3×3	16289	3.977	819.2	72.2

ใน ℓ^1 ภาพที่ตาหายไปใกล้ต้นฉบับกว่าภาพเบลอประมาณ 4 เท่า และใน ℓ^2 ก็ยังใกล้กว่า; แต่ใน ℓ^∞ ภาพที่ตาหายไปกลับแย่กว่าเกือบสองเท่า. ลำดับคุณภาพจึงพลิกเมื่อเปลี่ยนนอร์ม. ค่าเฉลี่ยต่อพิกเซลคือ $4030/4096 = 0.984$ หน่วย แต่พิกเซลที่แย่ที่สุดต่างกันถึง 130 หน่วย หรือประมาณครึ่งหนึ่งของช่วงสี.

คำถามของหัวข้อนี้จึงมีสองชั้น: ลำดับ Cauchy มีลิมิตในปริภูมิหรือไม่ และค่าคงตัวที่เปรียบเทียบนอร์มอธิบายช่องว่างระหว่าง 0.984 กับ 130 ได้อย่างไร.

1.3.1 ลำดับ Cauchy และความบริบูรณ์

นิยามของลำดับ Cauchy อยู่ในหัวข้อ 1.2 แล้ว. สมบัติที่เราต้องการคือ “ทุกลำดับ Cauchy มีลิมิตอยู่ในปริภูมิเอง” ซึ่งเป็นสมบัติของปริภูมิ ไม่ใช่ของลำดับ.

ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 1.3.1: ความบริบูรณ์

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง. เราเรียก X ว่า**บริบูรณ์** (complete) ถ้าทุกลำดับ Cauchy ใน X ลู่เข้าสู่จุดหนึ่งของ X.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ต้องครบ *ทุก* ลำดับ Cauchy: ถ้ามีตัวเดียวที่ลิมิตหลุดออกนอกปริภูมิ ปริภูมินั้นไม่บริบูรณ์.
- $\mathbb{R}$ บริบูรณ์ แต่ $\mathbb{Q}$ ไม่บริบูรณ์: ทศนิยมที่ตัด $\sqrt{2}$ ไว้ k ตำแหน่งเป็น Cauchy ใน $\mathbb{Q}$ แต่ลิมิตคือ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- ความบริบูรณ์ขึ้นกับเมตริก ไม่ใช่เซต: เซตเดียวอาจบริบูรณ์ด้วยเมตริกหนึ่งแต่ไม่บริบูรณ์ด้วยอีกเมตริก.

ทฤษฎีบท 1.3.1: เซตปิดของปริภูมิบริบูรณ์ย่อมบริบูรณ์

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ และ $A \subset X$ เป็นเซตปิด. แล้ว (A, d) บริบูรณ์.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ลำดับ Cauchy ใน A ก็เป็นลำดับ Cauchy ใน X จึงมีลิมิตใน X; ความปิดของ A บังคับให้ลิมิตนั้นอยู่ใน A.

1. ให้ (x_k) เป็นลำดับ Cauchy ใน A. ในฐานะลำดับใน X มันยังเป็น Cauchy.
2. เพราะ X บริบูรณ์ มี $x \in X$ ที่ $x_k \to x$.
3. เพราะ $x_k \in A$ ทุก k จุด x อยู่ในส่วนปิดคลุมของ A. แต่ A ปิด จึง $\operatorname{clos}(A) = A$ และ $x \in A$.

สรุป: ลิมิตไม่สามารถหนีออกจากเซตปิดได้ เพราะเซตปิดบรรจุจุดที่ลำดับในเซตเข้าใกล้ได้ทั้งหมด. □

ทฤษฎีบท 1.3.2: $\mathbb{R}^n$ บริบูรณ์

ให้ $n \geq 1$. แล้ว $\mathbb{R}^n$ บริบูรณ์ด้วยเมตริก ℓ^∞.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** การลู่เข้าใน ℓ^∞ คือการลู่เข้าทีละพิกัดพร้อมกัน. เราใช้ข้อเท็จจริงจากคณิตวิเคราะห์ว่า $\mathbb{R}$ บริบูรณ์: ทุกลำดับ Cauchy ใน $\mathbb{R}$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริง. เมื่อแต่ละพิกัดมีลิมิต และจำนวนพิกัดมีจำกัด ลิมิตทั้งหมดจึงเกิดพร้อมกัน.

1. ให้ (x^k) เป็นลำดับ Cauchy ใน $\mathbb{R}^n$ เขียน $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$.
2. สำหรับแต่ละ i จะได้ $|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|_\infty$. ลำดับ $(x_i^k)_k$ จึงเป็น Cauchy ใน $\mathbb{R}$ และลู่เข้าสู่จำนวน x_i เพราะ $\mathbb{R}$ บริบูรณ์.
3. ให้ $x = (x_1, \ldots, x_n)$. ให้ $\varepsilon > 0$. สำหรับแต่ละ i มี K_i ที่ $|x_i^k - x_i| < \varepsilon$ เมื่อ $k > K_i$. ให้ $K = \max_i K_i$; สำหรับ $k > K$ ทุกพิกัดต่างกันน้อยกว่า ε จึง $\|x^k - x\|_\infty < \varepsilon$.

สรุป: ความบริบูรณ์ของ $\mathbb{R}^n$ มาจากความบริบูรณ์ของ $\mathbb{R}$ บวกกับจำนวนพิกัดที่มีจำกัด. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ข้อควรระวัง: Cauchy ไม่ได้แปลว่าลู่เข้าในทุกปริภูมิ

เซตของลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด อยู่ใน ℓ^2 แต่ไม่ปิด: ลำดับ $x^k = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} e_i$ เป็น Cauchy และลู่เข้าใน ℓ^2 สู่ $x = (2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots)$ ซึ่งมีพจน์ไม่เป็นศูนย์ไม่จำกัด. ลำดับนี้จึงเป็น Cauchy ในเซต แต่ลิมิตอยู่นอกเซต. เซตนั้นไม่บริบูรณ์.

1.3.2 ปริภูมิบานาค ปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิลำดับ

เมื่อเพิ่มความบริบูรณ์ให้ปริภูมินอร์มและปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต เราได้สองชื่อที่ใช้ตลอดเล่ม.

นิยาม 1.3.2: ปริภูมิบานาคและปริภูมิฮิลเบิร์ต

(1) ถ้าเมตริก $d(x, y) = \|x - y\|$ ทำให้ปริภูมินอร์ม X บริบูรณ์ เราเรียก X ว่า**ปริภูมิบานาค** (Banach space).

(2) ถ้าปริภูมิพรีฮิลเบิร์ตบริบูรณ์เทียบกับเมตริกที่ได้จากผลคูณภายใน เราเรียกปริภูมินั้นว่า**ปริภูมิฮิลเบิร์ต** (Hilbert space).

คำว่า “บริบูรณ์” ในที่นี้หมายถึงทุกลำดับ Cauchy ลู่เข้าหาจุดที่อยู่ในปริภูมิเอง; เราไม่ต้องรู้ล่วงหน้าว่าจุดนั้นคืออะไร.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- บานาค = นอร์ม + บริบูรณ์; $\mathbb{R}^n$ กับนอร์มใด ๆ เป็นบานาค เพราะนอร์มสมมูลกัน (หัวข้อ 1.3.4).
- ฮิลเบิร์ต = ผลคูณภายใน + บริบูรณ์; ทุกปริภูมิฮิลเบิร์ตเป็นบานาค. ตัวอย่างค้าน: $\mathbb{Q}$ ไม่เป็นบานาค.

นิยาม 1.3.3: ปริภูมิลำดับ ℓ^p และ ℓ^∞

ให้ $1 \le p < \infty$. กำหนด

$$\ell^p = \Big\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \Big\}, \qquad \|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{1/p},$$

$$\ell^\infty = \{ x : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

เราเรียก ℓ^p ว่า**ปริภูมิลำดับ** (sequence space).

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ℓ^p เก็บเฉพาะลำดับที่ผลรวมของขนาดยกกำลัง p จำกัด: $x_i = 1/i$ อยู่ใน ℓ^2 แต่ไม่อยู่ใน ℓ^1.
- ℓ^∞ เก็บลำดับมีขอบเขต; ทุก $\ell^p \subset \ell^\infty$ แต่กลับกันไม่จริง.
- e_i (พิกัดที่ i เป็น 1 ที่เหลือ 0) อยู่ในทุก ℓ^p และมีนอร์ม 1.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

ทฤษฎีบท 1.3.3: ℓ^p เป็นปริภูมิบานาค และ ℓ^2 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

ให้ $1 \le p < \infty$. ปริภูมิลำดับ ℓ^p พร้อมนอร์ม $\|\cdot\|_p$ เป็นปริภูมิบานาค; นี่คือตัวอย่างแรกของเราที่มิติไม่จำกัดแต่ยังบริบูรณ์. เมื่อ $p = 2$ ผลคูณภายใน $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ ทำให้ ℓ^2 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): อสมการมิงคอฟสกี

อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมของ $\|\cdot\|_p$ คืออสมการมิงคอฟสกี ซึ่งทำให้ $\|\cdot\|_p$ เป็นนอร์มบน ℓ^p. เราไม่พิสูจน์ในหัวข้อนี้.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** สามขั้น: หาลิมิตทีละพิกัด, แสดงว่าลิมิตอยู่ใน ℓ^p โดยใช้ขอบเขตของลำดับ Cauchy, แล้วควบคุมหางของผลต่าง. ขั้นที่สองไม่ต้องใช้ทฤษฎีการวัด เพราะผลบวกเป็นการบวกจำนวนนับได้ของจำนวนไม่ลบ.

1. **ลิมิตทีละพิกัด.** ให้ (x^k) เป็นลำดับ Cauchy ใน ℓ^p. สำหรับแต่ละ i จะได้ $|x_i^k - x_i^l| \le \|x^k - x^l\|_p$ จึงเป็น Cauchy ใน $\mathbb{R}$ และมีลิมิต x_i. ให้ $x = (x_i)$.

2. **ขอบเขตของผลบวกจำกัด.** ลำดับ Cauchy มีขอบเขต: มี M ที่ $\|x^k\|_p \le M$ ทุก k. สำหรับ N ใด ๆ และทุก k,
$$\Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i^k|^p\Big)^{1/p} \le \|x^k\|_p \le M.$$
ให้ $k \to \infty$ ในผลบวกจำกัด (มี N พจน์ แต่ละพจน์ลู่เข้า) จะได้ $\big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\big)^{1/p} \le M$. ปล่อย $N \to \infty$ ได้ $x \in \ell^p$ และ $\|x\|_p \le M$.

3. **หางของผลต่าง.** ให้ $\varepsilon > 0$. มี K ที่ $\|x^k - x^l\|_p < \varepsilon/2$ สำหรับ $k, l \ge K$. สำหรับ N คงที่และ $k, l \ge K$,
$$\Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i^k - x_i^l|^p\Big)^{1/p} < \varepsilon/2.$$
ให้ $l \to \infty$ ก่อน (ผลบวกจำกัด) แล้วให้ $N \to \infty$ จะได้ $\|x^k - x\|_p \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ สำหรับ $k \ge K$. ดังนั้น $x^k \to x$ ใน ℓ^p และ ℓ^p บริบูรณ์.

4. **กรณี $p = 2$.** สำหรับ N ใด ๆ อสมการโคชี–ชวาร์ซให้
$$\Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i|\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2\Big) \le \|x\|_2^2 \|y\|_2^2.$$
ปล่อย $N \to \infty$ จึงได้ $\sum_i |x_i y_i| \le \|x\|_2 \|y\|_2 < \infty$; ผลคูณภายในจึงลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และ $\|x\|_2^2 = (x, x)$. ความเป็นเชิงเส้นและสมมาตรสังยุคตรวจได้ทีละพิกัด ส่วนความบวกแน่นอนตามมาจาก $\|x\|_2 = 0$ ซึ่งบังคับให้ทุกพิกัดเป็นศูนย์. ความบริบูรณ์ของ ℓ^2 ได้จากขั้นที่ 1–3 ซึ่งใช้ได้ทุก p.

สรุป: ℓ^p บริบูรณ์เพราะ Cauchy ใน ℓ^p บังคับให้ทุกพิกัดนิ่ง และขอบเขตที่สม่ำเสมอทำให้ลิมิตยังมีนอร์มจำกัด. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

1.3.3 การทำให้บริบูรณ์ (completion) ของปริภูมิอิงระยะทาง

ปริภูมิที่ไม่บริบูรณ์ยังมีประโยชน์: เราสามารถ “เติม” จุดที่ขาดเข้าไปได้. ผลลัพธ์นี้ทำให้เราพูดถึงลิมิตของลำดับ Cauchy ได้เสมอ โดยยอมขยายปริภูมิ.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): คำว่า “หนาแน่น” และ “การทำให้บริบูรณ์”

เซต A ในปริภูมิอิงระยะทาง X เรียกว่า**หนาแน่น** (dense) ใน X ถ้า $\operatorname{clos}(A) = X$. ในภาษาของบอล เงื่อนไขนี้หมายความว่าทุก $x \in X$ และทุก $\varepsilon > 0$ มี $a \in A$ ที่ $d(x,a) < \varepsilon$. **การทำให้บริบูรณ์** (completion) คือการสร้างปริภูมิใหม่ที่บรรจุสำเนาของปริภูมิเดิมและจุดลิมิตที่ยังขาดอยู่ โดยระยะระหว่างจุดเดิมไม่เปลี่ยน.

ทฤษฎีบท 1.3.4: การทำให้บริบูรณ์ของปริภูมิอิงระยะทาง

ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง. แล้วมีปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ $(\widetilde{X},\tilde{d})$ และการส่ง $J : X \to \widetilde{X}$ ที่

(1) $\tilde{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$ สำหรับทุก $x,y \in X$ (**การส่งสมมิติ** (isometric mapping));

(2) $J(X)$ หนาแน่นใน $\widetilde{X}$: ทุก $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ และทุก $\varepsilon > 0$ มี $x \in X$ ที่ $\tilde{d}(\tilde{x}, J(x)) < \varepsilon$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** จุดที่ขาดคือ “ลิมิตที่ควรจะมี” ของลำดับ Cauchy. เราจึงสร้างจุดใหม่จากลำดับ Cauchy ทั้งหมด แล้วประกาศว่าสองลำดับที่ระยะระหว่างกันลู่เข้าศูนย์เป็นจุดเดียวกัน.

1. **สร้างเซต.** ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของลำดับ Cauchy ใน X. กำหนด $(x_j) \sim (y_j)$ เมื่อ $d(x_j,y_j) \to 0$. ความสัมพันธ์นี้เป็น**ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalence relation): การถ่ายทอดได้จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม. ให้ $\widetilde{X} = \mathcal{C}/\!\sim$ เป็นเซตของชั้นสมมูล และเขียน $[x_j]$ แทนชั้นของ (x_j). แต่ละชั้นมีตัวแทนได้หลายลำดับ; ขั้นต่อไปต้องแสดงว่าคำนิยามไม่ขึ้นกับตัวแทนที่เลือก.

2. **นิยามระยะ.** สำหรับชั้น $\tilde{x} = [x_j]$ และ $\tilde{y} = [y_j]$ กำหนด $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim_j d(x_j,y_j)$. ลิมิตนี้มีเพราะ
$$|d(x_j,y_j) - d(x_k,y_k)| \le d(x_j,x_k) + d(y_j,y_k) \to 0$$
เมื่อ $j,k \to \infty$; ลำดับของจำนวนจริงจึงเป็น Cauchy และ $\mathbb{R}$ บริบูรณ์. ค่าไม่ขึ้นกับตัวแทน: ถ้า $(x_j) \sim (x'_j)$ และ $(y_j) \sim (y'_j)$ แล้ว
$$|d(x_j,y_j) - d(x'_j,y'_j)| \le d(x_j,x'_j) + d(y_j,y'_j) \to 0,$$
ดังนั้นลิมิตทั้งสองเท่ากัน. $\tilde{d}$ จึงเป็นฟังก์ชันบนคู่ของชั้นสมมูล ไม่ใช่บนตัวแทนที่เลือก.

3. **ตรวจเมตริก.** ข้อ (M1)–(M3) ผ่านไปถึงลิมิต: ระยะไม่ติดลบ, สมมาตร, และอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมที่เป็นจริงทุก j ยังจริงเมื่อ $j \to \infty$. ระยะเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อลำดับทั้งสองสมมูลกัน.

4. **การส่งสมมิติและความหนาแน่น.** ให้ $J(x)$ เป็นชั้นของลำดับคงตัว $(x,x,\ldots)$. แล้ว $\tilde{d}(J(x),J(y)) = d(x,y)$. สำหรับ $\tilde{x} = [x_j]$ จะได้ $\tilde{d}(\tilde{x},J(x_i)) = \lim_j d(x_j,x_i)$, และค่านี้ลู่เข้าศูนย์เมื่อ $i \to \infty$ เพราะ (x_j) เป็น Cauchy. จึงมีจุดของ $J(X)$ ใกล้ $\tilde{x}$ เท่าไรก็ได้.

5. **ความบริบูรณ์.** ให้ $(\tilde{x}^k)$ เป็นลำดับ Cauchy ใน $\widetilde{X}$ และเลือกตัวแทน $(x^k_j)_j$ ของ $\tilde{x}^k$. เลือก n_k ที่ $d(x^k_j, x^k_{n_k}) < 2^{-k}$ สำหรับทุก $j \ge n_k$ (ทำได้เพราะเป็น Cauchy) และให้ $y_k = x^k_{n_k}$. สำหรับ k,l และ j ใหญ่พอ,
$$d(y_k,y_l) \le d(x^k_{n_k},x^k_j) + d(x^k_j,x^l_j) + d(x^l_j,x^l_{n_l}) < 2^{-k} + d(x^k_j,x^l_j) + 2^{-l}.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ให้ $j \to \infty$ โดยใช้ $\tilde{d}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l) = \lim_j d(x_j^k, x_j^l)$:

$$d(y_k, y_l) \le 2^{-k} + 2^{-l} + \tilde{d}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l).$$

เทอมขวาลู่เข้าศูนย์เพราะ $(\tilde{x}^k)$ เป็น Cauchy จึงได้ว่า (y_k) เป็น Cauchy ใน X. ให้ $\tilde{y} = [y_k]$. สุดท้ายแทรก $J(y_k)$:

$$\tilde{d}(\tilde{x}^k, \tilde{y}) \le \tilde{d}(\tilde{x}^k, J(y_k)) + \tilde{d}(J(y_k), \tilde{y}) \le 2^{-k} + \Big(2^{-k} + \lim_{l\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l)\Big) = 2^{1-k} + \lim_{l\to\infty} \tilde{d}(\tilde{x}^k, \tilde{x}^l),$$

เทอมแรก $\le 2^{-k}$ และเทอมที่สองคือ $\lim_l d(y_k, y_l)$; เทอมขวาลู่เข้าศูนย์เมื่อ $k \to \infty$ เพราะ $(\tilde{x}^k)$ เป็น Cauchy. ดังนั้น $\tilde{x}^k \to \tilde{y}$.

สรุป: ทุกปริภูมิอิงระยะทางมี “เปลือกที่บริบูรณ์” และปริภูมิเดิมนั่งอยู่ในเปลือกนั้นแบบรักษาระยะ. □

1.3.4 นอร์มบนปริภูมิมิติจำกัด: สมมูลกันทุกตัว

นี่คือทฤษฎีบทที่ตอบว่าทำไม $\mathbb{R}^n$ จึงไม่สนว่าคุณเลือกนอร์มใด ในแง่ของการลู่เข้า. ค่าคงตัวยังขึ้นกับ n แต่การมีอยู่ของค่าคงตัวไม่ขึ้น.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): คำว่า “เซตกระชับ”

เซต K ในปริภูมิอิงระยะทางเรียกว่า**กระชับ** (compact) ถ้าทุกลำดับใน K มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าหาจุดใน K. ใน $\mathbb{R}^n$ เซตปิดและมีขอบเขตเป็นเซตกระชับ (ทฤษฎีบทไฮเน–โบเรล); เราขอยืมข้อเท็จจริงนี้จากคณิตวิเคราะห์.

ทฤษฎีบท 1.3.5: นอร์มบนปริภูมิมิติจำกัดสมมูลกัน

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์มิติจำกัดบน $\mathbb{K}$ และ $\dim X = n \ge 1$. แล้วนอร์มสองตัวใด ๆ บน X สมมูลกัน.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** แปลงเวกเตอร์เป็นพิกัดในฐานหลัก แล้วเทียบนอร์มใด ๆ กับนอร์มแบบยุคลิดของพิกัด. ด้านบนตามจากอสมการที่รู้แล้ว. ด้านล่างต้องหาค่าต่ำสุดบนเซตที่ปิดและมีขอบเขต ซึ่งเป็นเซตกระชับในมิติจำกัด.

1. **ตั้งพิกัด.** ให้ $e_1, \dots, e_n$ เป็นฐานหลักของ X. แต่ละ $x \in X$ เขียนได้แบบเดียวเป็น $x = \sum_i \alpha_i e_i$. กำหนด $\|x\|_2 = (\sum_i |\alpha_i|^2)^{1/2}$; นี่เป็นนอร์มบน X.

2. **ขอบเขตบน.** ให้ $K = \max_i \|e_i\| > 0$. ประมาณผลรวมด้วยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม แล้วใช้โคชี–ชวาร์ซกับผลคูณที่เหลือ,
$$\|x\| \le \sum_i |\alpha_i| \, \|e_i\| \le K \sum_i |\alpha_i| \le K\sqrt{n}\, \|x\|_2.$$

3. **นอร์มต่อเนื่องเทียบกับ ℓ^2.** จากขั้นที่ 2, $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le K\sqrt{n}\, \|x - y\|_2$. การส่ง $x \mapsto \|x\|$ จึงต่อเนื่อง.

4. **ค่าต่ำสุดบนทรงกลมหน่วย (unit sphere).** ให้ $S = \{x : \|x\|_2 = 1\}$. เซตนี้ปิดและมีขอบเขตในปริภูมิมิติจำกัด จึงกระชับตามทฤษฎีบทไฮเน–โบเรล; และ $S \neq \emptyset$. เพราะ S กระชับและฟังก์ชันนี้ต่อเนื่อง ค่าต่ำสุดจึงมีจริง: มี $x_0 \in S$ ที่ $\|x_0\| = m := \min_{x\in S} \|x\|$.

5. **ค่าต่ำสุดเป็นบวก.** ถ้า $m = 0$ แล้ว $\|x_0\| = 0$ จึง $x_0 = 0$ ตามสัจพจน์ของนอร์ม แต่ $0 \notin S$ เพราะ $\|0\|_2 = 0 \neq 1$. ดังนั้น $m > 0$.

ฉบับร่าง. Preprint 2026-10-24

6. **ขอบเขตล่าง.** สำหรับ $x \neq 0$ เวกเตอร์ $x/\|x\|_2$ อยู่ใน S จึง $\|x/\|x\|_2\| \geq m$. จากภาวะเอกพันธุ์ $\|x\| \geq m\|x\|_2$. สำหรับ $x = 0$ อสมการเป็นจริงโดยตรง.

7. **สรุป.** รวมสองด้าน: $m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq K\sqrt{n}\,\|x\|_2$. นอร์ม $\|\cdot\|$ สมมูลกับ $\|\cdot\|_2$ และเพราะการสมมูลเป็นการถ่ายทอดได้ นอร์มสองตัวใด ๆ จึงสมมูลกัน.

สรุป: บนปริภูมิมิติจำกัด นอร์มทุกตัวให้ “ความใกล้” แบบเดียวกัน; ต่างกันได้เพียงค่าคงตัวคูณซึ่งขึ้นกับมิติ. □

ข้อควรระวัง: ค่าคงตัวขึ้นกับมิติ

ทฤษฎีบทบอกว่ามีค่าคงตัว แต่ไม่ได้บอกว่าค่าคงตัวเล็ก: สำหรับ $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ ค่าที่ต้องใช้คือ $\sqrt{n}$ และ n ซึ่งโตกับ n. การลู่เข้าจึงเหมือนกัน แต่ขนาดความผิดพลาดที่รายงานอาจต่างกันมาก.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ปริภูมิย่อยมิติจำกัดเป็นเซตปิด

ให้ U เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัดของปริภูมินอร์ม X, $\dim U = m$, และ $a = \sum_i \alpha_i e_i \in U$ ในฐาน $e_1, \ldots, e_m$. จากทฤษฎีบท 1.3.5 มี $m_U > 0$ ที่ $m_U\|(\alpha_i)\|_2 \leq \|a\|$. ถ้า $u_k = \sum_i \alpha_i^{(k)} e_i \to x$ แล้ว (u_k) เป็น Cauchy. ดังนั้น

$$m_U\|(\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(l)})_i\|_2 \leq \|u_k - u_l\| \to 0,$$

แต่ละลำดับพิกัด $(\alpha_i^{(k)})_k$ จึงเป็น Cauchy ใน $\mathbb{R}$ และมีลิมิต α_i. ให้ $u = \sum_i \alpha_i e_i \in U$; แล้ว $u_k \to u$ และเพราะลิมิตมีได้ตัวเดียว $x = u \in U$. ปริภูมิย่อย U จึงปิด.

1.3.5 เมื่อมิติเป็นอนันต์ บอลหนึ่งหน่วยหลุดความกระชับ

ในมิติอนันต์ สิ่งที่คุ้นเคยใน $\mathbb{R}^n$ หลายอย่างล้มเหลว. ตัวอย่างที่คมที่สุดคือบอลหนึ่งหน่วยปิดไม่กระชับ. เครื่องมือหลักคือบทตั้งของรีสซ์.

ทฤษฎีบท 1.3.6: บทตั้งของรีสซ์

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, U เป็นปริภูมิย่อยปิดของ X ที่ $U \neq X$, และ $0 < \delta < 1$. แล้วมี $x_\delta \in X$ ที่ $\|x_\delta\| = 1$ และ $\|x_\delta - u\| \geq 1 - \delta$ สำหรับทุก $u \in U$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** เลือกระยะจาก $x \notin U$ ถึง U เป็น $d > 0$ แล้วเลือกจุดใน U ที่เกือบใกล้ที่สุด. เวกเตอร์ที่ปรับให้ยาวหนึ่งหน่วยจะอยู่ห่างจาก U อย่างน้อย $1 - \delta$.

1. ให้ $x \in X \setminus U$ และ $d = \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{u \in U} \|x - u\|$.

2. $d > 0$: ถ้า $d = 0$ มีลำดับ $u_k \in U$ ที่ $\|u_k - x\| \to 0$; แล้ว $x \in \operatorname{clos}(U) = U$ ขัดแย้ง.

3. เลือก $u_\delta \in U$ ที่ $\|x - u_\delta\| < d/(1 - \delta)$; ทำได้เพราะ d เป็น**อินฟิมัม** (infimum) (ค่าต่ำสุดที่เข้าใกล้ได้ แม้ไม่มีจุดที่ทำถึงค่านั้น) และ $d/(1 - \delta) > d$.

4. ให้ $x_\delta = (x - u_\delta)/\|x - u_\delta\|$. แล้ว $\|x_\delta\| = 1$. สำหรับ $u \in U$,

$$\|x_\delta - u\| = \frac{\|x - (u_\delta + \|x - u_\delta\|u)\|}{\|x - u_\delta\|} \geq \frac{d}{\|x - u_\delta\|} > 1 - \delta,$$

เพราะ $u_\delta + \|x - u_\delta\|u \in U$ และ d เป็นระยะที่น้อยที่สุดถึง U.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุป: การปรับความยาวหนึ่งหน่วยทำให้ระยะถึง U เกือบเท่ากับ d หารด้วยระยะจาก x ถึง U. □

ทฤษฎีบท 1.3.7: บอลหนึ่งหน่วยปิดกระชับก็ต่อเมื่อมิติจำกัด

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) $\dim X < \infty$;

(ii) บอลหนึ่งหน่วยปิด $B_X = \{x : \|x\| \le 1\}$ เป็นเซตกระชับ;

(iii) ทุกลำดับที่มีขอบเขตใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** (i)⇒(ii) ใช้ไฮเน–โบเรลในพิกัด. (ii)⇒(iii) ปรับขนาดให้อยู่ในบอล. (iii)⇒(i) ใช้บทตั้งของรีสซ์สร้างลำดับที่ทุกคู่ห่างกันอย่างน้อย $\frac{1}{2}$ ซึ่งไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

1. **(i)⇒(ii).** ถ้า $\dim X = n$ เลือกพิกัดและนอร์ม ℓ^2. จากทฤษฎีบท 1.3.5 มี $m > 0$ ที่ $m\|x\|_2 \le \|x\|$; ดังนั้น $B_X \subset \{x : \|x\|_2 \le 1/m\}$ จึงมีขอบเขต. เซต B_X ปิดเพราะนอร์มต่อเนื่อง. เซตปิดและมีขอบเขตใน $\mathbb{R}^n$ กระชับตามไฮเน–โบเรล และความกระชับไม่ขึ้นกับนอร์ม เพราะนอร์มสมมูลกันให้ทอพอโลยีเดียวกัน.

2. **(ii)⇒(iii).** ให้ (x_k) มีขอบเขต, $\|x_k\| \le R$. ถ้า $R = 0$ ลำดับเป็นศูนย์ทั้งลำดับ. ถ้า $R > 0$ แล้ว $y_k = x_k/R$ อยู่ใน B_X และมีลำดับย่อย $y_{k_j} \to y$. แล้ว $x_{k_j} \to Ry$.

3. **(iii)⇒(i).** สมมติ $\dim X = \infty$. สร้างลำดับ x_k แบบเวียนเกิด: ให้ x_1 มี $\|x_1\| = 1$; เมื่อได้ $x_1, \dots, x_{k-1}$ ให้ $U_{k-1} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{k-1}\}$. ปริภูมิย่อยนี้มีมิติจำกัด จึงปิด (เกร็ดเพิ่มเติมด้านบน) และไม่เท่ากับ X เพราะ $\dim X = \infty$. เลือก $\delta = \frac{1}{2}$ แล้วเรียกบทตั้งของรีสซ์ จะได้ x_k ซึ่ง $\|x_k\| = 1$ และ $\operatorname{dist}(x_k, U_{k-1}) \ge \frac{1}{2}$.

4. สำหรับ $j < k$ จะได้ $x_j \in U_{k-1}$ จึง $\|x_k - x_j\| \ge \frac{1}{2}$. พจน์สองตัวใดของลำดับนี้ห่างกันอย่างน้อย $\frac{1}{2}$ ดังนั้นลำดับย่อยใด ๆ ไม่เป็น Cauchy และจึงไม่ลู่เข้า. ขัดกับ (iii).

สรุป: มิติจำกัดคือมิติที่บอลหนึ่งหน่วย “เล็กพอจะกระชับได้”; ในมิติอนันต์มีทิศทางใหม่ให้วางเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ห่างกันตลอด. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไมการสมมูลล้มเหลวในมิติอนันต์

ทฤษฎีบท 1.3.5 ใช้มิติจำกัดจริง ๆ. ในหัวข้อ 1.2 เราเห็นตัวอย่างบน $C[0,1]$ ที่นอร์มซูพรีมัมกับนอร์มปริพันธ์ไม่สมมูลกัน: ฟังก์ชัน $f_k(t) = t^k$ มี $\|f_k\|_\infty = 1$ แต่ $\|f_k\|_1 = 1/(k+1) \to 0$. ค่าคงตัวที่ขึ้นกับมิติจึงไม่มีอยู่เมื่อมิติไม่จำกัด.

1.3.6 กลับไปที่ตาที่หายไป

คำตอบสั้น ๆ คือ: *ที่ความละเอียดเดียวกัน ลำดับของภาพขึ้นกับการเลือกนอร์ม* ส่วนจำนวนพิกเซลกำหนดเพียงว่าช่องว่างใหญ่ได้เท่าไร.

ในตัวอย่าง $u = 255e_1$ กับ $v = (255/n)(1, \dots, 1)$ บน $\mathbb{R}^n$ ทั้งสองมี $\|u\|_1 = \|v\|_1 = 255$ ทุก n แต่ $\|u\|_\infty = 255$ และ $\|v\|_\infty = 255/n$ จึงต่างกัน n เท่า.

ถ้ารายงานด้วย ℓ^1 ภาพทั้งสอง “แย่เท่ากัน”; ด้วย ℓ^∞ ภาพหนึ่งแย่กว่าอีกภาพ n เท่า. คำถามว่า “ภาพใดเสียหายมากกว่า” จึงต้องระบุนอร์มก่อน. และเพราะอสมการทั้งสองด้าน

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$$

อยู่ในช่วง Preprint 2026-04-24

เป็นสมการได้คนละข้าง (อสมการซ้ายที่ u, อสมการขวาที่ v) ค่าคงตัว n จึงเป็นขอบเขตที่คม ไม่มีค่าคงตัวเล็กกว่านี้ที่ใช้ได้กับทุกภาพ.

คำถาม 720p กับ 1080p. ที่ 1280×720 ($n = 921600$) ภาพตาหายมีค่าเฉลี่ย 0.573 หน่วยต่อพิกเซลและพิกเซลแย่สุด 130; ภาพเบลอมี 1.677 และ 86.3. ที่ 1920×1080 ($n = 2073600$) ตัวเลขคือ 0.573, 130, 1.703 และ 86.2. ทั้งสองความละเอียดให้ลำดับเดียวกัน: ตาหายดีกว่าใน ℓ^1 แต่แย่กว่าใน ℓ^∞. เมื่อย่อภาพ 1080 ลงมา 720 ค่าเฉลี่ยต่างจากภาพ 720 เดิมเพียง 0.083 หน่วย แต่ที่ขอบคมบางพิกเซลต่างได้ถึง 108.9; ความต่างนี้มาจากกริดพิกเซล ไม่ได้มาจากนอร์ม. การเปลี่ยนความละเอียดจาก 720 เป็น 1080 จึงไม่พลิกอันดับ ขณะที่การเปลี่ยนนอร์มที่ความละเอียดเดิมพลิกอันดับ: นี่คือหลักฐานเชิงตัวเลขว่า “เป็นเรื่องของนอร์ม ไม่ใช่ความละเอียด”. ตัวเลขทั้งหมดข้างต้นมาจากการคำนวณของเราและมีแบบทดสอบยืนยัน.

ภาพทั้งสองในตารางเป็น 64×64 เท่ากัน; ที่ $n = 4096$ ช่องว่างที่วัดได้คือ $130/0.984 \approx 132.1$ เท่า ไม่ถึง 4096 เพราะผลต่างกระจายอยู่ 31 พิกเซล ไม่ได้กระจุกที่เดียว; กระนั้นก็พอที่จะพลิกการจัดลำดับระหว่าง ℓ^2 กับ ℓ^∞. ที่ 1920×1080 ค่าคงตัวคือ $n = 2073600$ แต่ช่องว่างที่วัดได้ยังเล็กกว่ามากด้วยเหตุผลเดียวกัน.

ข้อควรระวัง: อย่าเปรียบเทียบตัวเลขจากคนละการปรับมาตรฐาน

ค่า ℓ^1 ของภาพขนาด 64×64 กับภาพขนาด 1920×1080 เปรียบเทียบกันตรง ๆ ไม่ได้ เพราะจำนวนพิกเซลต่างกัน. ต้องหารด้วย n (ค่าเฉลี่ยต่อพิกเซล) หรือใช้ ℓ^∞ ซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนพิกเซล. แม้หารด้วย n แล้ว การจัดลำดับยังขึ้นกับนอร์ม; ตัวเลขสองตัวที่ปรับมาตรฐานแล้วจึงยังไม่ใช่คำตอบเดียว.

สรุปใจความ

- ทุกลำดับ Cauchy มีลิมิตในปริภูมิ = บริบูรณ์; $\mathbb{R}^n$ บริบูรณ์ แต่ $\mathbb{Q}$ ไม่บริบูรณ์ และเซตของลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัดใน ℓ^2 ก็ไม่บริบูรณ์.
- นอร์มบริบูรณ์ = บานาค; พรีฮิลเบิร์ตบริบูรณ์ = ฮิลเบิร์ต; ℓ^p เป็นบานาค, ℓ^2 เป็นฮิลเบิร์ต, และทุกปริภูมิอิงระยะทางมีการทำให้บริบูรณ์ที่รักษาระยะและมีภาพหนาแน่น.
- บนปริภูมิมิติจำกัด นอร์มทุกตัวสมมูลกัน; บน $\mathbb{R}^n$ มี $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$ และค่าคงตัวคม.
- ความคม: พิกเซลเดียวที่ต่าง 255 กับสีจาง $255/n$ ทุกช่องมี ℓ^1 เท่ากัน แต่ต่างกัน n เท่าใน ℓ^∞.
- บอลหนึ่งหน่วยปิดกระชับก็ต่อเมื่อมิติจำกัด; ในมิติอนันต์บทตั้งของรีสซ์สร้างลำดับที่ไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **นอร์มผลหาร.** ให้ $X = \mathbb{R}^2$ พร้อมนอร์ม ℓ^1 และ $U = \operatorname{span}\{(1,1)\}$. สำหรับ $x = (3,1)$ ให้ $[x] = x + U \in X/U$ และ $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, U)$.

   (a) จงหา $\|[x]\|$ ในนอร์มผลหารที่มาจาก ℓ^1 และบอกทุก $u \in U$ ที่ทำให้ระยะบรรลุค่าต่ำสุด.

   (b) ทำข้อ (a) ใหม่เมื่อนอร์มต้นทางเป็น ℓ^∞.

   (c) ให้ X เป็นปริภูมินอร์มและ U เป็นปริภูมิย่อยปิด. จงพิสูจน์ว่า $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, U)$ เป็นนอร์มบน X/U.

2. **ตารางตาที่หายไป.**

   (a) ใช้ตารางในหัวข้อ 1.3 (ภาพ 64×64, $n = 4096$): จงตรวจว่า $4030/4096 \approx 0.984$ และคำนวณ $130/(4030/4096)$.

   (b) จงหาอัตราส่วน ℓ^1 ของ “ตาหาย” ต่อ “เบลอ” และอัตราส่วน ℓ^∞ ของสองภาพเดียวกัน. ภาพใดใกล้ต้นฉบับกว่าในแต่ละนอร์ม.

   (c) เพราะเหตุใดอัตราส่วนใน ℓ^∞ จึงไม่เท่ากับ $n = 4096$ แม้ขอบเขตบนจะให้ค่าถึง n.

3. **พิกเซลเดียวกับสีจาง.** ให้ $n \geq 1$, $u = 255e_1$ และ $v = \frac{255}{n}(1, \ldots, 1)$ ใน $\mathbb{R}^n$.

   (a) จงหา $\|u\|_1, \|v\|_1, \|u\|_\infty, \|v\|_\infty$.

   (b) จงหา $\|u\|_\infty / \|v\|_\infty$ และ $\|u\|_1 / \|v\|_1$.

   (c) จงใช้ u และ v แสดงว่าค่าคงตัวใน $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ คมสำหรับทุก n.

4. **จริงหรือเท็จ.** จงตัดสินข้อความต่อไปนี้ พร้อมให้เหตุผลหรือตัวอย่างค้าน.

   (a) ในปริภูมินอร์มมิติอนันต์ บอลหนึ่งหน่วยปิดไม่กระชับ.

   (b) ทุกลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาคมีลำดับย่อยที่ลู่เข้า.

   (c) ปริภูมิย่อยมิติจำกัดของปริภูมินอร์มเป็นเซตปิดเสมอ.

   (d) บทตั้งของรีสซ์รับประกันเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีระยะเท่ากับ 1 พอดีจากปริภูมิย่อยปิดใด ๆ ที่ไม่ใช่ทั้งปริภูมิ.

5. **เซตปิดและความบริบูรณ์.**

   (a) ให้ $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. จงแสดงว่า A บริบูรณ์.

   (b) ให้ $B = \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$. จงแสดงว่า B ปิดและมีขอบเขต แต่ไม่กระชับ.

   (c) จงแสดงว่า $\mathbb{Q}$ ไม่บริบูรณ์.

6. **นอร์มถ่วงน้ำหนัก.** บน $\mathbb{R}^2$ กำหนด $\|x\| = |x_1| + 2|x_2|$.

   (a) จงหา $c, C > 0$ ที่ $c\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\|x\|_2$ สำหรับทุก x.

   (b) จงแสดงว่าค่าคงตัวทั้งสองคม.

   (c) จงหาค่าคงตัวที่คล้ายกันสำหรับ $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$ บน $\mathbb{R}^3$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **นอร์มผลหาร.**

   (a) จุดใน U เขียนได้เป็น $u = t(1, 1)$ กับ $t \in \mathbb{R}$. ดังนั้น

   $$\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \big(|3 - t| + |1 - t|\big).$$

   ถ้า $t \in [1, 3]$ ผลบวกคือ 2; ถ้า $t < 1$ หรือ $t > 3$ ผลบวกมากกว่า 2. ค่าต่ำสุดจึงเป็น 2 และบรรลุที่ทุก $t \in [1, 3]$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

(b) ตอนนี้

$$\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \max(|3-t|, |1-t|).$$

ถ้า $t < 2$ แล้ว $3 - t > 1$; ถ้า $t > 2$ แล้ว $t - 1 > 1$. ที่ $t = 2$ ทั้งสองค่าเท่ากับ 1. ค่าต่ำสุดจึงเป็น 1 และบรรลุที่ $u = (2, 2)$ เพียงจุดเดียว.

(c) ให้ $[x]$ แทนชั้น $x + U$.

- *นิยามดี:* ถ้า $x' = x + u_0$ กับ $u_0 \in U$ แล้ว

$$\operatorname{dist}(x', U) = \inf_{u\in U} \|x + u_0 - u\| = \inf_{v\in U} \|x - v\| = \operatorname{dist}(x, U),$$

เพราะ $v = u - u_0$ วิ่งทั่ว U เมื่อ u วิ่งทั่ว U.

- *ไม่ติดลบ เป็นศูนย์เฉพาะชั้นศูนย์ และภาวะเอกพันธ์:* ถ้า $\operatorname{dist}(x, U) = 0$ มี $u_k \in U$ ที่ $u_k \to x$; เพราะ U ปิด จึง $x \in U$ และ $[x] = [0]$. ถ้า $x \in U$ ระยะเป็นศูนย์เพราะเลือก $u = x$. สำหรับ $\lambda \neq 0$,

$$\operatorname{dist}(\lambda x, U) = \inf_{u\in U} \|\lambda x - u\| = |\lambda| \inf_{v\in U} \|x - v\| = |\lambda| \operatorname{dist}(x, U),$$

โดยแทน $u = \lambda v$; ที่ $\lambda = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์.

- *อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม:* ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $u, v \in U$ ที่ $\|x - u\| \leq \operatorname{dist}(x, U) + \varepsilon$ และ $\|y - v\| \leq \operatorname{dist}(y, U) + \varepsilon$. แล้ว

$$\operatorname{dist}(x+y, U) \leq \|(x+y)-(u+v)\| \leq \|x-u\|+\|y-v\| \leq \operatorname{dist}(x, U)+\operatorname{dist}(y, U)+2\varepsilon.$$

เพราะ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จึงได้ $\operatorname{dist}(x + y, U) \leq \operatorname{dist}(x, U) + \operatorname{dist}(y, U)$.

ทั้งสี่ข้อรวมกันแสดงว่า $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, U)$ เป็นนอร์มบน X/U.

2. **ตารางตาที่หายไป.**

(a) $4030/4096 = 0.98388671875 \approx 0.984$. อัตราส่วนคือ

$$\frac{130}{4030/4096} = \frac{130 \cdot 4096}{4030} = 132.129\ldots \approx 132.1.$$

(b) อัตราส่วน ℓ^1 คือ $4030/16288.888\ldots = 0.2474\ldots$ ดังนั้นภาพตาหายมีระยะ ℓ^1 ประมาณหนึ่งในสี่ของภาพเบลอ. อัตราส่วน ℓ^∞ คือ $130/72.222\ldots = 1.8$ ดังนั้นใน ℓ^∞ ภาพเบลอกลับใกล้กว่า. ใน ℓ^2 (723.8 กับ 819.2) ภาพตาหายก็ยังใกล้กว่า. การจัดลำดับจึงขึ้นกับนอร์ม.

(c) อัตราส่วน $n\|x\|_\infty/\|x\|_1$ เท่ากับ n ก็ต่อเมื่อ $\|x\|_\infty = \|x\|_1$ นั่นคือความผิดพลาดทั้งหมดกระจุกอยู่ที่พิกเซลเดียว. ในภาพตาหาย ความผิดพลาดกระจายอยู่ 31 พิกเซล แต่ละพิกเซลต่าง 130 หน่วย. ค่าที่วัดได้จึงเป็น

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_1/n} = \frac{n\|x\|_\infty}{\|x\|_1} = \frac{4096 \cdot 130}{4030} = 132.1,$$

ไม่ใช่ 4096: ค่าคงตัว n คม แต่ภาพนี้ไม่ได้ทำให้อสมการเป็นสมการ.

3. **พิกเซลเดียวกับสีจาง.**

(a) $\|u\|_1 = 255$, $\|v\|_1 = n \cdot (255/n) = 255$, $\|u\|_\infty = 255$ และ $\|v\|_\infty = 255/n$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

(b) $\|u\|_\infty/\|v\|_\infty = n$ และ $\|u\|_1/\|v\|_1 = 1$.

(c) สำหรับ u อสมการซ้ายเป็นสมการ: $\|u\|_\infty = 255 = \|u\|_1$. สำหรับ v อสมการขวาเป็นสมการ: $\|v\|_1 = 255 = n\cdot(255/n) = n\|v\|_\infty$. เพราะ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จึงไม่มีค่าคงตัวที่เล็กกว่า n ใช้ได้กับทุก n.

4. **จริงหรือเท็จ.**

(a) จริง. ตามทฤษฎีบทบอลหนึ่งหน่วยปิดกระชับก็ต่อเมื่อมิติจำกัด; ในมิติอนันต์บอลหนึ่งหน่วยปิดจึงไม่กระชับ.

(b) *เท็จ.* ใน ℓ^2 ให้ e_i เป็นเวกเตอร์หน่วยที่พิกัดที่ i เป็น 1. ลำดับ (e_i) มีขอบเขต เพราะ $\|e_i\|_2 = 1$ ทุก i. แต่ $\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$ เมื่อ $i \neq j$. ลำดับย่อยลู่เข้าต้องเป็น Cauchy แต่ทุกคู่ห่างกัน $\sqrt{2}$ จึงเป็นไปไม่ได้.

(c) จริง. ให้ U เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด และ $u_k \in U$ กับ $u_k \to x$. เขียน u_k ในฐานของ U. จากทฤษฎีบทนอร์มบนปริภูมิมิติจำกัดสมมูลกัน แต่ละลำดับพิกัดเป็น Cauchy จึงลู่เข้า; ลิมิตของ u_k จึงอยู่ใน U (เกร็ดเพิ่มเติมในหัวข้อ 1.3.4).

(d) *เท็จ.* บทตั้งของรีสซ์ให้เพียง $\geq 1-\delta$ สำหรับทุก $\delta > 0$, ไม่ได้ให้ระยะเท่ากับ 1. ตัวอย่างค้าน: ให้ $X = c_0$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม และ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_n$. แล้ว $\|f\| = 1$ แต่ $|f(x)| = 1$ ต้องมี $x_n = 1$ ทุก n ซึ่งเป็นไปไม่ได้ใน c_0. ให้ $U = \ker f$; สำหรับ $x \neq 0$, $\operatorname{dist}(x, U) = |f(x)| < \|x\|$, ดังนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทุกตัวมีระยะน้อยกว่า 1 จาก U.

5. **เซตปิดและความบริบูรณ์.**

(a) A เป็นภาพย้อนกลับของ $(-\infty, 1]$ ภายใต้ฟังก์ชันต่อเนื่อง $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$ จึงปิดใน $\mathbb{R}^2$. เซตปิดในปริภูมิบริบูรณ์ย่อมบริบูรณ์ (หัวข้อ 1.3.1) ดังนั้น A บริบูรณ์.

(b) B ปิดเพราะนอร์มเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ B เป็นภาพย้อนกลับของ $[0,1]$. B มีขอบเขตเพราะ $\|x\|_2 \leq 1$ ตามนิยาม. แต่ B ไม่กระชับ: ลำดับ e_i อยู่ใน B และ $\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$ เมื่อ $i \neq j$; จึงไม่มีลำดับย่อยที่เป็น Cauchy และไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

(c) ให้ x_k เป็นจำนวนตรรกยะที่ได้จากการตัดทศนิยมของ $\sqrt{2}$ ที่ตำแหน่ง k. สำหรับ $l > k$,

$$|x_k - x_l| \leq |x_k - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x_l| < 10^{-k} + 10^{-l} \leq 2\cdot 10^{-k},$$

ดังนั้น (x_k) เป็น Cauchy ใน $\mathbb{Q}$. ถ้า $x_k \to q \in \mathbb{Q}$ แล้วใน $\mathbb{R}$ ต้องได้ $q = \sqrt{2}$ เพราะลิมิตมีได้ตัวเดียว; ขัดกับ $q \in \mathbb{Q}$. ลำดับนี้จึงไม่มีลิมิตใน $\mathbb{Q}$.

6. **นอร์มถ่วงน้ำหนัก.**

(a) สำหรับ $x = (x_1, x_2)$,

$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq (|x_1| + 2|x_2|)^2 = \|x\|^2,$$

เพราะ $(a+2b)^2 - (a^2+b^2) = 4ab + 3b^2 \geq 0$ สำหรับ $a, b \geq 0$, จึงใช้ $c = 1$. ขอบเขตบนใช้ Cauchy–Schwarz กับ $(1, 2)$:

$$\|x\| = |x_1| + 2|x_2| \leq \sqrt{1^2 + 2^2}\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{5}\,\|x\|_2.$$

จึงเลือก $C = \sqrt{5}$.

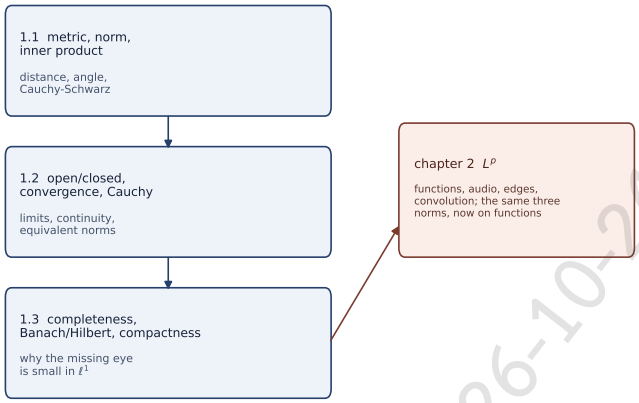
(b) ที่ $x = e_1$ จะได้ $\|e_1\| = 1 = \|e_1\|_2$; ค่าคงตัวล่างจึงคม. ที่ $x = (1, 2)$ จะได้ $\|x\| = 1 + 4 = 5$ และ $\|x\|_2 = \sqrt{5}$; อัตราส่วนคือ $5/\sqrt{5} = \sqrt{5}$; ค่าคงตัวบนจึงคม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

(c) สำหรับ $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$ บน $\mathbb{R}^3$ อสมการล่างยังได้เพราะทุกสัมประสิทธิ์มีขนาดอย่างน้อย 1; จึงใช้ $c = 1$. ขอบเขตบนมาจาก Cauchy–Schwarz กับ $(1, 2, 3)$:

$$\|x\| \le \sqrt{1 + 4 + 9}\, \|x\|_2 = \sqrt{14}\, \|x\|_2.$$

ทั้งสองคม: ที่ e_1 สำหรับค่าล่าง และที่ $x = (1, 2, 3)$ สำหรับค่าบน เพราะ $\|x\| = 14 = \sqrt{14}\|x\|_2$.



รูปที่ 1.5: แผนผังส่งท้ายบท: สิ่งที่แต่ละหัวข้อให้ และสิ่งที่บท“ปริภูมิของฟังก์ชัน” จะนำไปใช้ (สร้างจาก `code/funkana/ch01.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุปสูตรสำคัญของบทนี้

- นอร์มบน $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$, $\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$ และ $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. อสมการหลัก: $|(x, y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$, $\|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ และ $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$; ค่าคงตัว $\sqrt{n}$ และ n คม.
- เซตเปิดคือเซตที่ทุกจุดมีบอลอยู่ข้างใน; เซตปิดบรรจุลิมิตของทุกลำดับในเซต; ลู่เข้าคือพจน์ท้ายอยู่ในทุกบอลรอบลิมิต; ความต่อเนื่องตรวจได้ด้วยลำดับ; ลำดับ Cauchy คือนิ่งโดยไม่ต้องรู้ลิมิต.
- บริบูรณ์ = ทุกลำดับ Cauchy มีลิมิตในปริภูมิ; บานาค = นอร์ม + บริบูรณ์; ฮิลเบิร์ต = ผลคูณภายใน + บริบูรณ์; ℓ^p เป็นบานาค, ℓ^2 เป็นฮิลเบิร์ต; บอลหนึ่งหน่วยปิดกระชับก็ต่อเมื่อมิติจำกัด.

อ่านต่อ. บท“ปริภูมิของฟังก์ชัน” จะเปลี่ยนจากเวกเตอร์ที่มีช่องจำนวนจำกัดไปเป็นฟังก์ชัน เช่น เสียงและภาพที่มีค่าทุกจุดบนช่วง. เราจะนิยามปริภูมิ L^p ของฟังก์ชัน เปรียบเทียบกับ ℓ^p ที่เพิ่งเห็น และใช้สังวัตนาการเพื่อทำให้ขอบภาพที่นุ่มลง. คำถามเรื่อง “ใกล้ในนอร์มใด” จะกลับมาในรูปใหม่: ฟังก์ชันสองตัวอาจใกล้กันใน L^1 แต่ห่างกันมากใน L^∞.

บทที่ 2

ปริภูมิของฟังก์ชัน: ความต่อเนื่อง ปริภูมิ L^p และสังวัตนาการ

ฉบับร่าง Preprint 2025-10-24

สถานการณ์สมมติ: เสียงที่ได้ยิน และขอบที่มองเห็น

สมมติว่าเราเปิดเสียงบันทึกความยาวหนึ่งวินาที. ในไฟล์มีเสียงพูดเป็นช่วง ๆ และมีเสียงซ่าความถี่สูงแทรกอยู่ตลอด. เมื่อระดับเสียงดังเกินขีดจำกัดของผู้บันทึก ยอดคลื่นจะถูกตัดให้แบน. เราอยากตอบคำถามง่าย ๆ ว่า “เสียงนี้ดังแค่ไหน” แต่คำตอบขึ้นกับว่าเราใช้อะไรวัด. ถ้าวัดด้วยพลังงานทั้งหมด ค่าที่ได้จะมาจากช่วงที่มีเสียงพูดเป็นหลัก. ถ้าวัดด้วยยอดที่สูงที่สุด ค่าที่ได้จะหยุดอยู่ที่ขีดจำกัดของการตัดเสียง. ทั้งสองค่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องของคำถามคนละแบบ.

ภาพอีกภาพหนึ่งคือขอบในภาพวาดลายเส้น. ขอบที่คมคือฟังก์ชันที่กระโดดจาก 0 ไปเป็น 1 ทันที. ฟังก์ชันนี้อยู่ในปริภูมิ L^p ทุกตัว เพราะฟังก์ชันนี้มีขอบเขตและวัดได้บนช่วงจำกัด. แต่ฟังก์ชันนี้ไม่ต่อเนื่อง. ถ้าเราเฉลี่ยค่าของมันกับเพื่อนบ้านด้วยเคอร์เนลที่เรียบ ขอบจะกลายเป็นทางลาดที่ต่อเนื่อง และภาพจะดูเบลอขึ้นเล็กน้อย. คำถามคือ การเฉลี่ยนี้ทำให้ฟังก์ชันเข้าใกล้ขอบเดิมในความหมายใด และความหมายใดที่มันยังไม่เข้าใกล้.

สถานการณ์ทั้งสองเป็นสถานการณ์สมมติ. ตัวเลขทุกตัวที่อ้างในบทนี้มาจากการคำนวณของเรา และถูกยืนยันด้วยแบบทดสอบใน `code/tests/test_ch02.py`.

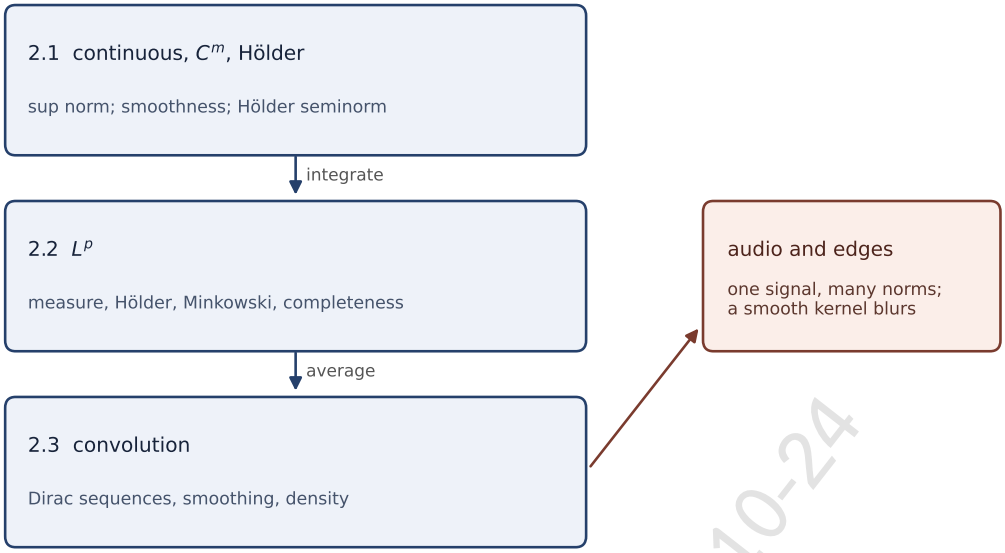
ภาพรวมบท

บทนี้เปลี่ยนจาก “รายการตัวเลขบนหน้าจอ” ในบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ” มาสู่ “ฟังก์ชัน” ซึ่งเป็นกฎที่ให้ค่าหนึ่งค่ากับทุกจุด. เราจะเจอปริภูมิสามกลุ่มที่วัดความเรียบต่างกัน.

- ปริภูมิ C^0 วัดความสูงของกราฟด้วย**ซูพรีมัมนอร์ม** (supremum norm). มันเห็นการกระโดด แต่ไม่เห็นความชัน.
- ปริภูมิ $C^{m,\alpha}$ วัดความเรียบถึงอนุพันธ์อันดับ m และวัดว่าเศษที่เหลือเล็กแค่ไหนเมื่อเทียบกับระยะห่างยกกำลัง α.
- ปริภูมิ L^p วัดขนาดด้วยปริพันธ์ของ $|f|^p$. มันไม่สนใจค่าที่เปลี่ยนบนเซตที่มีขนาดศูนย์ และยอมรับฟังก์ชันที่มีการกระโดดได้.

จากนั้นเราจะใช้**สังวัตนาการ** (convolution) ซึ่งคือการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยเคอร์เนล เพื่อเปลี่ยนฟังก์ชันที่หยาบให้เรียบขึ้น. ภาพที่ต้องจำคือ: ซูพรีมัมนอร์มมองยอดสูงสุด, L^p มองพื้นที่ใต้กราฟ, และสังวัตนาการคือการเลื่อนเคอร์เนลไปตามแกนแล้วเฉลี่ย.

ภาพต่อไปนี้แสดงลำดับของหัวข้อและเครื่องมือที่ส่งต่อจากหัวข้อหนึ่งไปยังอีกหัวข้อหนึ่ง.



รูปที่ 2.1: แผนผังของบทนี้. หัวข้อ 2.1 สร้างปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องและฟังก์ชันเรียบ; หัวข้อ 2.2 นิยามปริภูมิ L^p และพิสูจน์อสมการหลัก; หัวข้อ 2.3 ใช้สังวัตนาการเพื่อทำให้ฟังก์ชันเรียบและพิสูจน์ความหนาแน่น (สร้างจาก `code/funkana/ch02.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง ความเรียบ และ Hölder

ภาพรวมก่อนอ่าน

ฟังก์ชันหนึ่งตัวมีข้อมูลสองอย่างที่เราอาจสนใจ: ค่าสูงสุดของมัน และอัตราที่ค่าของมันเปลี่ยน. ซูพรีมัมนอร์มตอบคำถามแรก. อนุพันธ์ตอบคำถามที่สอง. ปริภูมิ C^m จึงต้องมีทั้งสองส่วนอยู่ในนอร์มเดียวกัน. ถ้าเราเก็บไว้เพียงความสูง ปริภูมิของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จะไม่บริบูรณ์ เพราะลำดับของเส้นโค้งเรียบอาจลู่เข้าไปยังเส้นโค้งที่มีมุมแหลม. ภาพที่ต้องจำคือ: ยิ่งเราต้องการความเรียบมากเท่าไร นอร์มก็ต้องบรรจุข้อมูลมากขึ้นเท่านั้น.

2.1.1 ฟังก์ชันมีขอบเขตและซูพรีมัมนอร์ม

เราเริ่มจากคำถามที่ง่ายที่สุด: ฟังก์ชันหนึ่งตัว “ใหญ่” แค่ไหน. ถ้าโดเมนเป็นเซต S และค่าของฟังก์ชันอยู่ในปริภูมิบานาค Y เราบอกว่าฟังก์ชันมีขอบเขตเมื่อภาพของมันอยู่ในบอลรัศมีจำกัดลูกหนึ่ง. ขนาดที่เล็กที่สุดของรัศมีนั้นคือนอร์มที่เราจะใช้.

นิยาม 2.1.1: ฟังก์ชันมีขอบเขตและซูพรีมัมนอร์ม

ให้ S เป็นเซต และ Y เป็นปริภูมิบานาคบนสนาม $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ ที่มีนอร์ม $|\cdot|$. กำหนด

$$B(S;Y) := \{f : S \to Y : \ f(S) \text{ เป็นเซตย่อยที่มีขอบเขตของ } Y\}.$$

สำหรับ $f \in B(S;Y)$ กำหนดซูพรีมัมนอร์ม

$$\|f\|_{B(S)} := \|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|.$$

เมื่อ $Y = \mathbb{K}$ เราเขียน $B(S)$ แทน $B(S;\mathbb{K})$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- “มีขอบเขต” หมายถึงมีค่าคงตัว C ค่าเดียวที่ $|f(x)| \le C$ สำหรับทุก $x \in S$. ค่า $\|f\|_\infty$ คือค่า C ที่เล็กที่สุดที่ใช้ได้.
- ซูพรีมัมอาจไม่ถูกบรรลุ. บน $S = (0,1)$ ฟังก์ชัน $f(x) = x$ มี $\|f\|_\infty = 1$ แต่ไม่มีจุดใดใน S ที่ให้ค่า 1.
- ระยะทางระหว่างสองฟังก์ชันคือ $\|f - g\|_\infty$. มันคือช่องว่างแนวยืนที่กว้างที่สุดระหว่างกราฟทั้งสอง.

ลองหาตัวอย่างที่ไม่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต. บน $S = (0,1]$ ฟังก์ชัน $f(x) = 1/x$ มีค่า $f(1/n) = n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n เพราะฉะนั้น $f(S)$ ไม่มีขอบเขตและ $f \notin B(S)$.

ลองเอง: ระยะทางระหว่างกราฟสองเส้น

บน $[0,1]$ ให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = x^2$. ผลต่างคือ $x - x^2 = x(1-x)$. ค่านี้ไม่เป็นลบและมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 1/2$ เพราะอนุพันธ์ $1 - 2x$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่จุดนั้น. ค่าสูงสุดคือ

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

ดังนั้น $\|f - g\|_\infty = 1/4$. ถ้าเลื่อนกราฟทั้งสองลงพร้อมกัน ระยะนี้ไม่เปลี่ยน แต่ถ้าเลื่อนเพียง g ลงหนึ่งหน่วย ระยะจะเป็น $\|f - (g-1)\|_\infty = 5/4$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.1.1: ปริภูมิของฟังก์ชันมีขอบเขตเป็นปริภูมิบานาค

ให้ S เป็นเซต และ Y เป็นปริภูมิบานาค. แล้ว $B(S;Y)$ ที่มีการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์แบบจุดต่อจุด และมีซูพรีมัมนอร์ม เป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ความบริบูรณ์ของ Y ทีละจุด แล้วใช้ซูพรีมัมควบคุมพร้อมกันทุกจุด.

1. **ตรวจสัจพจน์ของปริภูมิเวกเตอร์.** ถ้า $f,g \in B(S;Y)$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$ แล้ว $f+g$ และ αf มีขอบเขต เพราะ $|(f+g)(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ และ $|(\alpha f)(x)| \le |\alpha|\,\|f\|_\infty$. การตรวจสัจพจน์ที่เหลือทำทีละจุดเหมือนในปริภูมิเวกเตอร์ทั่วไป.

2. **สร้างลิมิตทีละจุด.** ให้ (f_k) เป็นลำดับ Cauchy ใน $B(S;Y)$. สำหรับแต่ละ $x \in S$ จะได้

$$|f_k(x) - f_l(x)| \le \|f_k - f_l\|_\infty.$$

เพราะฉะนั้น $(f_k(x))$ เป็นลำดับ Cauchy ใน Y ซึ่งบริบูรณ์ จึงมีลิมิต เรียกมันว่า $f(x)$.

3. **แสดงว่าลิมิตมีขอบเขตและลู่เข้าเอกรูป.** ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก N ที่ $\|f_k - f_l\|_\infty < \varepsilon$ ทุก $k,l \ge N$. ให้ $l \to \infty$ ในอสมการข้างบน จะได้ $|f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon$ ทุก x และทุก $k \ge N$. โดยเฉพาะ $f = f_N + (f - f_N)$ จึงมีขอบเขต และ $\|f_k - f\|_\infty \le \varepsilon$ ทุก $k \ge N$. นี่คือการลู่เข้าในซูพรีมัมนอร์ม.

สรุป: ลิมิตทีละจุดมีอยู่เพราะ Y บริบูรณ์ และซูพรีมัมทำให้การลู่เข้าเกิดพร้อมกันทุกจุด; ดังนั้น $B(S;Y)$ บริบูรณ์. □

ข้อควรระวัง: ซูพรีมัมไม่ใช่ค่าสูงสุดเสมอ

คำว่า “ซูพรีมัม” ไม่ได้แปลว่ามีจุดที่ฟังก์ชันบรรลุค่านั้น. บนเซตเปิดหรือช่วงเปิด ค่าสูงสุดอาจไม่มี แต่ซูพรีมัมยังมีได้. เวลาอ้างว่ามีจุดที่ทำให้ค่าเท่ากับซูพรีมัม เราต้องมีเหตุผลเพิ่ม เช่น โดเมนกระชับและฟังก์ชันต่อเนื่อง.

2.1.2 ความต่อเนื่องบนโดเมนปิดและจำกัด

ถ้าโดเมนเป็นเซตกระชับ ฟังก์ชันต่อเนื่องจะมีขอบเขตโดยอัตโนมัติ. นี่คือเหตุผลที่ปริภูมิ $C(K;Y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตกระชับ K เป็นปริภูมิย่อยของ $B(K;Y)$ และสืบทอดความบริบูรณ์มาได้.

นิยาม 2.1.2: ความต่อเนื่องบนโดเมนปิดและจำกัด

ให้ $K \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตปิดที่บรรจุในบอลรัศมีจำกัด และ Y เป็นปริภูมิบานาค. กำหนด

$$C^0(K;Y) := C(K;Y) := \{ f : K \to Y : \ f \text{ ต่อเนื่องบน } K \}.$$

บนปริภูมินี้ใช้ซูพรีมัมนอร์ม

$$\|f\|_{C^0(K)} := \|f\|_{B(K)} = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

ร่างหนังสือ · Preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- K ปิดและมีขอบเขตใน $\mathbb{R}^n$ จึงกระชับ. เมื่อ $Y = \mathbb{R}$ ฟังก์ชันต่อเนื่องบน K มีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดจริง ๆ ไม่ใช่เพียงซูพรีมัม.
- $C^0(K;Y)$ เป็นเซตย่อยของ $B(K;Y)$ เพราะฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตกระชับมีขอบเขต.
- เมื่อ $Y = \mathbb{K}$ การคูณแบบจุดต่อจุดทำให้ $C^0(K)$ เป็นพีชคณิตบานาค: ผลคูณยังต่อเนื่องและ $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

ทฤษฎีบท 2.1.2: ปริภูมิฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตกระชับเป็นปริภูมิบานาค

ให้ $K \subset \mathbb{R}^n$ กระชับ และ Y เป็นปริภูมิบานาค. แล้ว $C^0(K;Y)$ เป็นเซตปิดใน $B(K;Y)$ และเมื่อใช้ซูพรีมัมนอร์ม จึงเป็นปริภูมิบานาค. ถ้า $Y = \mathbb{K}$ มันยังเป็นพีชคณิตบานาคที่สลับที่ด้วย.

พิสูจน์. **แนวคิด.** การลิมิตเอกรูปไม่ทำลายความต่อเนื่อง; เมื่อรวมกับความบริบูรณ์ของ $B(K;Y)$ ก็ได้ความบริบูรณ์ของ $C^0(K;Y)$.

1. $C^0(K;Y)$ **เป็นปริภูมิย่อย.** ผลบวกและผลคูณด้วยสเกลาร์ของฟังก์ชันต่อเนื่องยังต่อเนื่อง และฟังก์ชันศูนย์ต่อเนื่อง.
2. **ตรวจว่าลิมิตต่อเนื่อง.** ให้ $f_j \in C^0(K;Y)$ และ $f_j \to f$ ในซูพรีมัมนอร์ม. ตรึง $x_0 \in K$ และให้ $\varepsilon > 0$. เลือก j ที่ $\|f_j - f\|_\infty < \varepsilon/3$. เพราะ f_j ต่อเนื่อง มี $\delta > 0$ ที่ $|x - x_0| < \delta$ ทำให้ $|f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon/3$. แล้ว
$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(x_0)| + |f_j(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x_0. เนื่องจาก x_0 ใด ๆ ก็ได้ $f \in C^0(K;Y)$.
3. **ปิดและบริบูรณ์.** จากข้อ 2 เซต $C^0(K;Y)$ ปิดใน $B(K;Y)$. เซตปิดของปริภูมิบริบูรณ์เป็นปริภูมิบริบูรณ์เมื่อใช้เมตริกที่สืบทอดมา. ข้อความเรื่องพีชคณิตตามมาจากความต่อเนื่องของผลคูณและการประมาณ $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

สรุป: การลู่เข้าเอกรูปไม่ทำลายความต่อเนื่อง; ดังนั้น $C^0(K;Y)$ เป็นปริภูมิปิดของ $B(K;Y)$ และบริบูรณ์. □

ข้อควรระวัง: ลู่เข้าทีละจุดไม่พอ

ลำดับ $f_k(x) = x^k$ บน $[0,1]$ ต่อเนื่องทุกตัวและลู่เข้าทีละจุดสู่ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$. มันจึงไม่ลู่เข้าในซูพรีมัมนอร์ม. ตรวจตรง ๆ ได้ว่า $\|f_k - f_{2k}\|_\infty = 1/4$ ทุก k เพราะ $x^k - x^{2k} = u - u^2$ มีค่ามากที่สุด $1/4$ ที่ $u = 1/2$. ลำดับนี้จึงไม่เป็น Cauchy ใน $C[0,1]$.

สมบัติ preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): เมื่อโดเมนไม่กระชับ

ถ้า $S \subset \mathbb{R}^n$ ไม่กระชับ ฟังก์ชันต่อเนื่องบน S อาจไม่มีขอบเขต และซูพรีมัมนอร์มอาจเป็น ∞. ตัวอย่างคือ $f(x) = 1/x$ บน $(0, 1]$. แทนที่จะทิ้งฟังก์ชันเหล่านี้ เราสามารถใช้**เอกซ์ฮอสชัน** (exhaustion) ซึ่งคือลำดับเซตกระชับ K_i ที่ $K_i \subset K_{i+1}$ และ $\bigcup_i K_i = S$. บน $C^0(S; Y)$ กำหนด

$$\varrho(f) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}.$$

อนุกรมลู่เข้าเพราะแต่ละเศษส่วนไม่เกิน 1. ฟังก์ชัน $\varrho(f - g)$ เป็นระยะทาง และปริภูมิที่ได้บริบูรณ์เมื่อ Y บริบูรณ์. ทอพอโลยีไม่ขึ้นกับการเลือกเอกซ์ฮอสชัน; ถ้า S กระชับ มันคือทอพอโลยีจากซูพรีมัมนอร์ม. เราใช้ซูพรีมัมนอร์มตลอดบทนี้เพราะเซตหลัก ๆ เป็นช่วงปิดหรือส่วนปิดของโดเมนมีขอบเขต.

2.1.3 อนุพันธ์อันดับสูงและนอร์ม C^m

ซูพรีมัมนอร์มเห็นความสูงของกราฟ แต่ไม่เห็นว่ากราฟชันแค่ไหน. ฟังก์ชันสองตัวอาจอยู่ใกล้กันมากในซูพรีมัมนอร์ม แต่ความชันต่างกันมาก. เพื่อควบคุมความเรียบ เราจึงเพิ่มนอร์มของอนุพันธ์เข้าไปในนอร์มของฟังก์ชัน.

นิยาม 2.1.3: อนุพันธ์ย่อย ฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ และปริภูมิ C^m

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด และ Y เป็นปริภูมิบานาค. สำหรับ $f : \Omega \to Y$ และ $x \in \Omega$ อนุพันธ์ย่อยตัวที่ i คือ

$$\partial_i f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h},$$

เมื่อลิมิตมีอยู่ใน Y. เราเรียก f ว่า**หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง** (continuously differentiable) ถ้าอนุพันธ์ย่อย $\partial_i f$ มีทุกจุดและต่อเนื่องทุกตัว.

สำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ Ω เปิดมีขอบเขต กำหนด

$$C^m(\overline{\Omega}; Y) := \big\{ f : \Omega \to Y : \ \partial^s f \text{ มีและขยายต่อเนื่องถึง } \overline{\Omega} \text{ ทุก } |s| \leq m \big\},$$

โดย $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n$ เป็น**พหุดัชนี** (multi-index), $|s| = s_1 + \cdots + s_n$ และ $\partial^s = \partial_1^{s_1} \cdots \partial_n^{s_n}$. นอร์มคือ

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- $m = 0$ ให้ปริภูมิฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\overline{\Omega}$ กลับมา. $m = 1$ ต้องการทั้ง f และอนุพันธ์ย่อยทุกตัวต่อเนื่อง.
- พหุดัชนีเป็นวิธีเขียน “หาอนุพันธ์ตัวแปรที่หนึ่งสองครั้ง ตัวแปรที่สองหนึ่งครั้ง” ให้สั้น. ตัวอย่าง $s = (2, 1)$ หมายถึง $\partial_1^2 \partial_2$ และ $|s| = 3$.
- นอร์ม C^m บวกนอร์มซูพรีมัมของทุกอนุพันธ์อันดับไม่เกิน m. เพราะฉะนั้นมันจึงควบคุมทั้งความสูงและความชัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.1.3: ปริภูมิ $C^m(\overline{\Omega};Y)$ เป็นปริภูมิบานาค

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิดมีขอบเขต และ Y เป็นปริภูมิบานาค. แล้ว $C^m(\overline{\Omega};Y)$ ที่มีนอร์มข้างบนเป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทำกรณี $m=1$ ก่อน โดยลู่เข้าของอนุพันธ์ทำให้เราหาอนุพันธ์ของลิมิตได้ด้วยการหาปริพันธ์; กรณีทั่วไปทำซ้ำกับอนุพันธ์อันดับสูงขึ้น.

1. **กรณี $m=1$.** ให้ (f_k) เป็นลำดับ Cauchy ใน C^1. ทั้ง (f_k) และ $(\partial_i f_k)$ เป็นลำดับ Cauchy ใน $C^0(\overline{\Omega};Y)$ เพราะนอร์ม C^1 ควบคุมทั้งสองส่วน. จากหัวข้อ 2.1.2 มี $f, g_i \in C^0$ ที่ $f_k \to f$ และ $\partial_i f_k \to g_i$ เอกรูป.

2. **หาอนุพันธ์ของลิมิต.** ตรึง $x \in \Omega$ และให้ h เล็กพอที่ส่วนของเส้นตรงจาก x ถึง $x+he_i$ อยู่ใน Ω. ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัสให้
$$f_k(x+he_i)-f_k(x)=\int_0^h \partial_i f_k(x+te_i)\,dt.$$
ให้ $k\to\infty$ ทั้งสองข้าง. ฝั่งซ้ายลู่เข้าสู่ $f(x+he_i)-f(x)$ และฝั่งขวาลู่เข้าสู่ $\int_0^h g_i(x+te_i)\,dt$ เพราะการลู่เข้าเอกรูปบนช่วงกระชับ. หารด้วย h แล้วให้ $h\to 0$; ความต่อเนื่องของ g_i ให้
$$\partial_i f(x)=g_i(x).$$
เพราะฉะนั้น $f\in C^1$ และอนุพันธ์ของลิมิตคือลิมิตของอนุพันธ์.

3. **ลู่เข้าในนอร์ม C^1.** เราได้ $\|f_k-f\|_\infty\to 0$ และ $\|\partial_i f_k-\partial_i f\|_\infty\to 0$. ผลบวกจำกัดจึงให้ $\|f_k-f\|_{C^1}\to 0$.

4. **กรณี $m>1$.** ทำแบบเดียวกันกับ $\partial^s f$ สำหรับทุก $|s|\le m-1$ แล้วใช้อุปนัยบน m. เนื่องจากมีพหุดัชนีเพียงจำนวนจำกัด การลู่เข้าของแต่ละอนุพันธ์จึงเกิดพร้อมกันได้.

สรุป: ถ้าฟังก์ชันและอนุพันธ์ลู่เข้าเอกรูป อนุพันธ์ของลิมิตคือลิมิตของอนุพันธ์; ดังนั้นนอร์มที่บวกอนุพันธ์ทุกอันดับทำให้ปริภูมิบริบูรณ์. □

ข้อควรระวัง: ซูพรีมัมนอร์มอย่างเดียวไม่พอสำหรับ C^1

ปริภูมิ $C^1[-1,1]$ ไม่บริบูรณ์ภายใต้ซูพรีมัมนอร์ม. ลำดับ
$$f_k(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{k}}$$
หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องทุกตัว และ
$$0\le f_k(t)-|t|=\frac{1/k}{\sqrt{t^2+1/k}+|t|}\le\frac{1}{\sqrt{k}}.$$
เพราะฉะนั้น $f_k\to|t|$ เอกรูป แต่ $|t|$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ 0. ลิมิตจึงอยู่นอก $C^1[-1,1]$. นี่คือเหตุผลที่ต้องเพิ่มนอร์มของอนุพันธ์เข้าไป.

ตัวอย่าง $f(t)=\sqrt{t}$ บน $(0,1)$ แสดงปัญหาเดียวกันที่ขอบ: f ต่อเนื่องถึง 0 และหาอนุพันธ์ได้ทุกจุดใน $(0,1)$ แต่ $f'(t)=1/(2\sqrt{t})$ ไม่มีขอบเขตเมื่อ $t\to 0^+$. ดังนั้น $f\in C^0[0,1]$ แต่ $f\notin C^1[0,1]$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2.1.4 ที่มาของฟังก์ชันทดสอบ: ตัวรองรับและความเรียบ

เมื่อเราพูดถึง “ฟังก์ชันที่หายไปนอกบริเวณหนึ่ง” เราต้องมีคำสำหรับบริเวณนั้น. คำนั้นคือตัวรองรับ. มันรวมจุดที่ฟังก์ชันไม่เป็นศูนย์เข้าด้วยกัน แล้วปิดส่วนนั้นด้วยขอบทั้งหมด เพื่อให้ได้เซตปิด.

นิยาม 2.1.4: ตัวรองรับและฟังก์ชันที่มีตัวรองรับกระชับ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด และ Y เป็นปริภูมิบานาค. สำหรับ $f : \Omega \to Y$ กำหนด

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}},$$

โดยส่วนปิดคลุมอยู่ใน $\mathbb{R}^n$. เรียกเซตนี้ว่า**ตัวรองรับ** (support) ของ f. สำหรับ $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ กำหนด

$$C_c^m(\Omega; Y) := \big\{ f \in C^m(\Omega; Y) : \ \operatorname{supp} f \text{ เป็นเซตกระชับและ } \operatorname{supp} f \subset \Omega \big\}.$$

เมื่อ $m = \infty$ เราเขียน $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ และเรียกสมาชิกของ $\mathcal{D}(\Omega)$ ว่า**ฟังก์ชันทดสอบ** (test function). สำหรับกรณีไม่มีตัวรองรับกระชับ เราเขียน

$$C^\infty(\Omega; Y) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega; Y), \qquad C_c^\infty(\Omega; Y) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C_c^m(\Omega; Y).$$

นี่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ แต่ในบทนี้เรายังไม่กำหนดนอร์มหรือทอพอโลยีบนมัน.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ตัวรองรับคือ “บริเวณที่ฟังก์ชันมีชีวิต” รวมขอบ. นอกตัวรองรับ ฟังก์ชันเป็นศูนย์ทุกจุด.
- “ตัวรองรับกระชับ” หมายถึงบริเวณนั้นปิดและมีขอบเขต. ฟังก์ชันจึงเป็นศูนย์ก่อนถึงขอบของโดเมน.
- บน $(0,1)$ ฟังก์ชัน $f(x) = x$ ไม่มีตัวรองรับกระชับใน $(0,1)$ เพราะส่วนปิดคลุมของ $\{x : f(x) \neq 0\}$ คือ $[0,1]$ ซึ่งไม่เป็นเซตย่อยของ $(0,1)$.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ตัวอย่างฟังก์ชันทดสอบ

ฟังก์ชัน

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\!\left(-\dfrac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

อยู่ใน $C_c^\infty(\mathbb{R})$. ตัวรองรับคือ $[-1,1]$. เหตุผลคือทุกอนุพันธ์ของ $\exp(-1/(1-t^2))$ มีรูปพหุนามคูณกับฟังก์ชันเดิมบน $(-1,1)$ และเมื่อ $|t| \to 1^-$ ตัวประกอบเลขชี้กำลังลดลงเร็วกว่าพหุนามใด ๆ จึงทำให้อนุพันธ์ทุกอันดับลู่เข้าสู่ 0. การเลื่อนและย่อขนาดสูตรนี้ให้ฟังก์ชันที่รองรับในช่วงสั้น ๆ ตามต้องการ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

2.1.5 ความต่อเนื่องระดับ Hölder

ความต่อเนื่องบอกว่า “เปลี่ยนอินพุตนิดเดียว เอาต์พุตเปลี่ยนนิดเดียว” แต่ไม่ได้บอกว่าการเปลี่ยนแปลงนั้นเร็วแค่ไหน. ถ้าเราต้องการควบคุมอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยไม่ต้องมีอนุพันธ์ เราสามารถใช้เลขยกกำลัง α. เงื่อนไขนี้เรียกว่าความต่อเนื่องแบบ Hölder.

นิยาม 2.1.5: ค่าคงที่ Hölder และปริภูมิ Hölder

กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^n$ ไม่ว่าง และ Y เป็นปริภูมิบานาค. สำหรับเลขชี้กำลัง $0 < \alpha \leq 1$ และฟังก์ชัน $f : S \to Y$ เราดูอัตราส่วนระหว่างระยะของภาพกับระยะของอินพุตยกกำลัง α:

$$\mathrm{Hol}_\alpha(f, S) := \sup_{\substack{x,y \in S \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \in [0, \infty].$$

จำนวนนี้คือ**ค่าคงที่โฮลเดอร์** (Hölder constant) ของ f ที่เลขชี้กำลัง α. มันบอกว่าภาพของสองจุดที่ห่างกัน d เคลื่อนได้ไม่เกิน Cd^α เมื่อ C คือค่าคงที่นี้. ถ้า $\mathrm{Hol}_\alpha(f, S) < \infty$ เราเรียก f ว่า**ต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์** (Hölder continuous) ที่เลขชี้กำลัง α. ในกรณี $\alpha = 1$ เราเขียน $\mathrm{Lip}(f, S) := \mathrm{Hol}_1(f, S)$ และเรียกจำนวนนี้ว่า**ค่าคงที่ลิพชิทซ์** (Lipschitz constant); ฟังก์ชันที่ค่าคงที่นี้มีจำกัดเรียกว่าต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์.
เมื่อ $S \subset \mathbb{R}^n$ ปิดมีขอบเขต กำหนด

$$C^{0,\alpha}(S; Y) := \big\{ f \in C^0(S; Y) : \mathrm{Hol}_\alpha(f, S) < \infty \big\}.$$

พร้อมนอร์ม

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(S)} := \|f\|_\infty + \mathrm{Hol}_\alpha(f, S).$$

ถ้า $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิดมีขอบเขต และ $m \geq 1$ กำหนด

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}; Y) := \big\{ f \in C^m(\overline{\Omega}; Y) : \mathrm{Hol}_\alpha(\partial^s f, \overline{\Omega}) < \infty \text{ ทุก } |s| = m \big\},$$

พร้อมนอร์ม

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_\infty + \sum_{|s| = m} \mathrm{Hol}_\alpha(\partial^s f, \overline{\Omega}).$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- $\alpha = 1$ คือเงื่อนไขลิพชิทซ์: ระยะของภาพไม่เกินค่าคงที่คูณระยะเดิม. กราฟจึงมีความชันจำกัดในความหมายหนึ่ง.
- $\alpha < 1$ อ่อนกว่า: ฟังก์ชันอาจมีความชันไม่จำกัดที่จุดหนึ่ง แต่ยังไม่กระโดดแรงเกินกำลัง α.
- $\mathrm{Hol}_\alpha(f, S)$ เป็นกึ่งนอร์ม (ตัววัดขนาดที่อาจเป็นศูนย์ได้ทั้งที่ฟังก์ชันไม่เป็นศูนย์) เพราะฟังก์ชันคงตัวมีค่าเป็นศูนย์. เราจึงต้องบวก $\|f\|_\infty$ เพื่อให้ได้นอร์มจริง.

ตัวอย่างสำคัญคือ $f(t) = \sqrt{t}$ บน $[0, 1]$. สำหรับ $x \geq y \geq 0$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x - y,$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เพราะ $2y \le 2\sqrt{xy}$. ดังนั้น $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le |x-y|^{1/2}$ และ $\mathrm{Hol}_{1/2}(f,[0,1]) \le 1$. ค่า 1 ถูกบรรลุเมื่อ $y=0$ และ $x=1$. แต่ f ไม่ต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์ เพราะอัตราส่วนที่ $y=0, x=t$ คือ $1/\sqrt{t}$ ซึ่งไม่มีขอบเขตเมื่อ $t \to 0^+$.

ทฤษฎีบท 2.1.4: ปริภูมิ $C^{0,\alpha}(S;Y)$ เป็นปริภูมิบานาค

ให้ $S \subset \mathbb{R}^n$ ปิดมีขอบเขต, $0 < \alpha \le 1$ และ Y เป็นปริภูมิบานาค. แล้ว $C^{0,\alpha}(S;Y)$ ที่มีนอร์ม

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(S)} := \|f\|_\infty + \mathrm{Hol}_\alpha(f,S)$$

เป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ลิมิตเอกรูปให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง และอสมการ Hölder ผ่านไปยังลิมิตได้เพราะค่าคงที่ Hölder ถูกควบคุมพร้อมกัน.

1. **ลำดับ Cauchy และลิมิตเอกรูป.** ให้ (f_k) เป็น Cauchy ในนอร์ม $C^{0,\alpha}$. โดยเฉพาะ (f_k) เป็น Cauchy ในซูพรีมัมนอร์ม จึงลู่เข้าเอกรูปสู่ฟังก์ชันต่อเนื่อง f ตามหัวข้อ 2.1.2.

2. **ควบคุมค่าคงที่ Hölder ของผลต่าง.** ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก N ที่ $\|f_k - f_l\|_{C^{0,\alpha}} < \varepsilon$ ทุก $k,l \ge N$. สำหรับ $x \ne y$,

$$\frac{|(f_k-f_l)(x)-(f_k-f_l)(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \varepsilon.$$

   ให้ $l \to \infty$ ในอสมการนี้ (ทำได้เพราะการลู่เข้าทีละจุด) จะได้

$$\frac{|(f_k-f)(x)-(f_k-f)(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \varepsilon$$

   ทุก $x \ne y$ และทุก $k \ge N$. เพราะฉะนั้น $\mathrm{Hol}_\alpha(f_k - f, S) \le \varepsilon$.

3. **สรุป.** จากข้อ 2, $f - f_k \in C^{0,\alpha}$ จึง $f \in C^{0,\alpha}$ เพราะ $f_k \in C^{0,\alpha}$. และ

$$\|f_k - f\|_{C^{0,\alpha}} \le \|f_k - f\|_\infty + \varepsilon.$$

   ให้ $k \to \infty$ จะได้ $\limsup_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{C^{0,\alpha}} \le \varepsilon$. เพราะ $\varepsilon > 0$ เล็กตามต้องการ และนอร์มไม่เป็นลบ, ลิมิตจึงเป็นศูนย์; ลำดับลู่เข้า f ในนอร์ม Hölder.

สรุป: ลิมิตเอกรูปของฟังก์ชัน Hölder ยังเป็น Hölder และค่าคงที่ Hölder ไม่ระเบิดในลิมิต; ดังนั้นปริภูมิจึงบริบูรณ์. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.1.5: ปริภูมิ $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega};Y)$ เป็นปริภูมิบานาค

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิดมีขอบเขต, $m \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ และ Y เป็นปริภูมิบานาค. แล้ว $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega};Y)$ ที่มีนอร์มจากนิยามค่าคงที่ Hölder และปริภูมิ Hölder เป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** อนุพันธ์ถึงอันดับ m ลู่เข้าเอกรูปใน C^0; อนุพันธ์อันดับสูงสุดลู่เข้าใน $C^{0,\alpha}$. รวมสองข้อนี้กับทฤษฎีบทความบริบูรณ์ของ $C^{0,\alpha}$ และ C^m.

1. **ลู่เข้าใน C^m.** ให้ (f_k) เป็น Cauchy ใน $C^{m,\alpha}$. แล้วมันเป็น Cauchy ใน C^m เพราะนอร์ม $C^{m,\alpha}$ ควบคุมนอร์ม C^m. ตามทฤษฎีบท 2.1.3 มี $f \in C^m(\overline{\Omega};Y)$ ที่ $\|f_k - f\|_{C^m} \to 0$.

2. **อนุพันธ์อันดับสูงสุดเป็น Cauchy ใน $C^{0,\alpha}$.** สำหรับทุก $|s| = m$, ลำดับ $(\partial^s f_k)$ เป็น Cauchy ใน $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega};Y)$ เพราะนอร์ม $C^{m,\alpha}$ มีเทอม $\mathrm{Hol}_\alpha(\partial^s f_k, \overline{\Omega})$. ตามทฤษฎีบท 2.1.4 มันลู่เข้า $g_s \in C^{0,\alpha}$ ในนอร์มนั้น.

3. **ระบุ g_s.** จากการลู่เข้าใน C^m เราได้ $\partial^s f_k \to \partial^s f$ เอกรูปสำหรับทุก $|s| \leq m$. โดยเฉพาะ $g_s = \partial^s f$ เกือบทุกแห่ง; ทั้งสองฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงเท่ากันทุกจุด. เพราะฉะนั้น $f \in C^{m,\alpha}$.

4. **ลู่เข้าในนอร์ม Hölder.** เทอมซูพรีมัมของ $\|f_k - f\|_{C^{m,\alpha}}$ ไปทางศูนย์จากการลู่เข้าใน C^m. สำหรับเทอม Hölder ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก N ที่ $\|f_k - f_l\|_{C^{m,\alpha}} < \varepsilon$ ทุก $k, l \geq N$. ให้ $l \to \infty$ ในอสมการของผลต่าง Hölder จะได้ $\mathrm{Hol}_\alpha(\partial^s(f_k - f), \overline{\Omega}) \leq \varepsilon$ สำหรับทุก $k \geq N$ และ $|s| = m$. เมื่อ ε เล็กตามต้องการ จึง $\|f_k - f\|_{C^{m,\alpha}} \to 0$.

สรุป: ความบริบูรณ์ของ C^m จัดการอนุพันธ์ทุกอันดับ และความบริบูรณ์ของ $C^{0,\alpha}$ จัดการอัตราการเปลี่ยนของอนุพันธ์อันดับสูงสุด; รวมกันได้ความบริบูรณ์ของ $C^{m,\alpha}$. □

ข้อควรระวัง: Hölder กับลิพชิทซ์ไม่ใช่เรื่องเดียวกัน

ฟังก์ชัน $\sqrt{t}$ ต่อเนื่องแบบ Hölder ที่ $\alpha = 1/2$ แต่ไม่ต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์. การที่ฟังก์ชันต่อเนื่องธรรมดาจะเป็น Hölder ที่ α ใด ๆ ไม่ได้เสมอไป: ตัวอย่างเช่น $1/\log(1/t)$ ใกล้ 0 ต่อเนื่องแต่ไม่ใช่ Hölder สำหรับ $\alpha > 0$ ใด ๆ. ในทางกลับกัน ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และมีอนุพันธ์มีขอบเขตบนช่วงหรือบน $\mathbb{R}^n$ จะเป็นลิพชิทซ์ตามทฤษฎีบทค่ามัชฌิม.

สรุปใจความ

- $B(S;Y)$ วัดความสูงด้วยซูพรีมัม และบริบูรณ์เมื่อ Y บริบูรณ์.
- $C^0(K;Y)$ เป็นเซตปิดของ $B(K;Y)$ เพราะลิมิตเอกรูปของฟังก์ชันต่อเนื่องยังต่อเนื่อง.
- C^m ต้องมีนอร์มของอนุพันธ์ทุกอันดับ; ซูพรีมัมนอร์มอย่างเดียวไม่เห็นความชันและทำให้ C^1 ไม่บริบูรณ์.
- ตัวรองรับคือบริเวณที่ฟังก์ชันไม่เป็นศูนย์รวมขอบ; ตัวรองรับกระชับทำให้ฟังก์ชันหายก่อนถึงขอบโดเมน.
- Hölder ที่เลขชี้กำลัง α ควบคุมอัตราการเปลี่ยนโดยไม่ต้องมีอนุพันธ์; $\alpha = 1$ คือลิพชิทซ์.
- **อ่านต่อ.** หัวข้อ 2.2 เปลี่ยนจาก “ความสูงของกราฟ” ไปสู่ “ขนาดที่วัดด้วยปริพันธ์”. คำถามนำคือ: เมื่อฟังก์ชันกระโดดได้ จะวัดขนาดของมันอย่างไรให้ยังได้ปริภูมิบริบูรณ์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $f(x) = x(1-x)$ และ $g(x) = 0$ บน $[0,1]$. จงหา $\|f - g\|_\infty$ และจุดที่ค่าสูงสุดเกิดขึ้น.

2. จงตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผล: “ถ้า $f_k \to f$ ทีละจุดบน $[0,1]$ และทุก f_k ต่อเนื่อง แล้ว f ต่อเนื่อง”.

3. จงแสดงว่า $f(t) = \sqrt{t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบ Hölder ที่ $\alpha = 1/2$ บน $[0,1]$ แต่ไม่ต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์. ค่าคงที่ Hölder ที่ดีที่สุดคือเท่าใด.

4. จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบลิพชิทซ์บน $[0,1]$ และหาค่าคงที่ลิพชิทซ์ที่เล็กที่สุด.

5. จงหาตัวรองรับของฟังก์ชัน $f(x) = x$ เมื่อโดเมนเป็น $(0,1)$ และอธิบายว่าทำไม $f \notin C_c^0((0,1))$.

6. ให้ $h(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(6\pi t)$ บน $[0,1]$. จงประมาณ $\|h\|_\infty$ โดยใช้กริด 8001 จุด และอธิบายว่าทำไมค่านี้เป็นเพียงค่าประมาณ.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. $f(x) - g(x) = x(1-x)$. อนุพันธ์คือ $1 - 2x$ ซึ่งเป็นศูนย์ที่ $x = 1/2$. ค่าที่จุดนั้นคือ $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ และค่าที่ปลายช่วงเป็น 0. เพราะฉะนั้น $\|f - g\|_\infty = 1/4$ และค่าสูงสุดเกิดที่ $x = 1/2$.

2. เท็จ. ให้ $f_k(x) = x^k$. แต่ละ f_k ต่อเนื่อง และ $f_k(x) \to 0$ เมื่อ $x \in [0,1)$ แต่ $f_k(1) = 1$ ทุก k ดังนั้นลิมิตคือ $f(1) = 1$ และ $f(x) = 0$ สำหรับ $x < 1$ ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ 1.

3. สำหรับ $x \geq y \geq 0$,
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x - y,$$
เพราะ $2y \leq 2\sqrt{xy}$. ดังนั้น $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|^{1/2}$ และค่าคงที่ Hölder ไม่เกิน 1. ที่ $y = 0$, $x = 1$ อัตราส่วนเท่ากับ 1 ดังนั้นค่าที่ดีที่สุดคือ 1. แต่ที่ $y = 0$, $x = t$ อัตราส่วนลิพชิทซ์คือ $\sqrt{t}/t = 1/\sqrt{t} \to \infty$ เมื่อ $t \to 0^+$ จึงไม่มีค่าคงที่ลิพชิทซ์.

4. สำหรับ $x, y \in [0,1]$,
$$|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leq 2|x - y|.$$
ค่าคงที่ 2 เล็กที่สุดเพราะ supremum ของ $|x + y|$ บน $[0,1]^2$ คือ 2 และอัตราส่วนสามารถเข้าใกล้ 2 ได้เมื่อ $x \to 1$, $y \to 1$.

5. บน $(0,1)$ เซตที่ $f \neq 0$ คือ $(0,1)$ ทั้งช่วง. ส่วนปิดคลุมใน $\mathbb{R}$ คือ $[0,1]$. เซตนี้ไม่เป็นเซตย่อยของ $(0,1)$ จึงไม่เป็นตัวรองรับกระชับใน $(0,1)$. เพราะฉะนั้น $f \notin C_c^0((0,1))$.

6. บนกริด $t_j = j/8000$, $j = 0, \ldots, 8000$, ค่ามากที่สุดที่พบคือประมาณ 1.075828485. ค่าที่แท้จริงคือ $1.075828707\ldots$ ซึ่งเกิดที่จุดที่อนุพันธ์เป็นศูนย์. กริดให้เพียงค่าประมาณ เพราะจุดสูงสุดจริงอาจอยู่ระหว่างจุดกริด; การประมาณด้วยกริดจึงไม่เกินค่าจริงและอาจต่ำกว่าเล็กน้อย.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2.2 ปริภูมิ L^p และอสมการสำคัญ

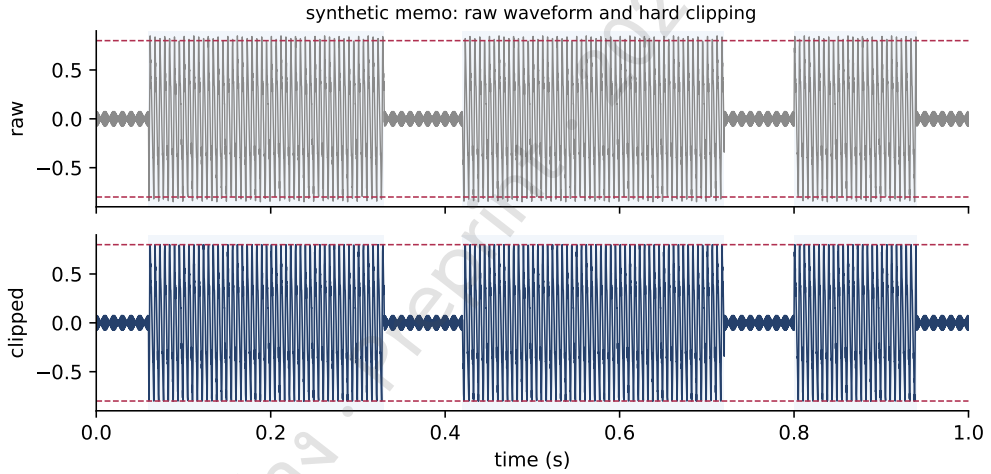
ภาพรวมก่อนอ่าน

ซูพรีมัมนอร์มลงโทษยอดที่สูงที่สุดเพียงยอดเดียว. ถ้าเสียงหนึ่งมีเสียงซ่าที่ดังมากจุดเดียว มันอาจได้นอร์มใหญ่ทั้งที่พลังงานส่วนใหญ่เล็ก. ปริภูมิ L^p เลือกวัดแบบอื่น: ยกค่าสัมบูรณ์ขึ้นกำลัง p แล้วหาปริพันธ์ทั้งช่วง. ค่า p จึงเป็นปุ่มปรับว่าเราจะให้น้ำหนักกับยอดสูงมากแค่ไหน. ภาพที่ต้องจำคือ: p ใหญ่ขึ้น นอร์มจะเข้าใกล้ซูพรีมัมมากขึ้น; $p = 1$ คือพื้นที่ใต้กราฟ; $p = 2$ คือพลังงาน.

เราจะเริ่มจากเสียงหนึ่งวินาทีในสถานการณ์เปิดบท. ไฟล์สมมติถูกสุ่มตัวอย่าง 8000 ครั้งต่อวินาที. เรามองมันเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เป็นช่วง ๆ: ระหว่างตัวอย่างสองตัวที่ติดกัน ค่าสัญญาณคงที่. ถ้า $h = 1/8000$ และค่าตัวอย่างคือ $x_1, \dots, x_{8000}$ แล้ว

$$\|x\|_{L^p} = \left(h \sum_{j=1}^{8000} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

สำหรับ $1 \le p < \infty$. นี่คือปริพันธ์ของฟังก์ชันขั้นบันไดที่แทนสัญญาณ ไม่ใช่แค่ผลบวกของค่าตัวอย่าง.



รูปที่ 2.2: สัญญาณเสียงสมมติหนึ่งวินาที. เส้นประคือขีดจำกัดการตัดเสียงที่ ± 0.8. ช่วงสีฟ้าคือช่วงที่มีเสียงพูด; ช่วงที่เหลือมีแต่เสียงซ่า (สร้างจาก `code/funkana/ch02.py`).

การคำนวณของเราให้

$$\|x\|_{L^1} = 0.3246275, \qquad \|x\|_{L^2} = 0.4214505, \qquad \|x\|_{L^4} = 0.5249188, \qquad \|x\|_{L^\infty} = 0.8.$$

มีตัวอย่าง 402 ตัวจาก 8000 ตัวที่ถูกตัด คิดเป็น 5.025%. ยอดก่อนตัดสูงถึง 0.8489 แต่หลังตัดทุกอย่างหยุดที่ 0.8. นี่คือเหตุผลที่ L^∞ ไม่เห็นว่ายอดเดิมสูงแค่ไหน: มันเห็นเพียงเพดานที่ถูกตัด. ค่า L^2 ยังสะท้อนพลังงานส่วนใหญ่ซึ่งมาจากช่วงเสียงพูด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2.2.1 การวัด เซตที่วัดได้ และสมบัติแทบทุกจุด

เพื่อนิยามปริพันธ์ให้ครอบคลุมฟังก์ชันที่มีการกระโดด เราใช้**การวัด** (measure). การวัดคือกฎที่บอกว่าเซตย่อยแต่ละเซตมี "ขนาด" เท่าใด. บนช่วง $[0,1]$ ขนาดตามปกติคือความยาว; บนระนาบคือพื้นที่. เราไม่ต้องสร้างการวัดเลอเบกใหม่ทั้งหมดในบทนี้ แต่ต้องรู้ว่าอะไรทำให้ฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้.

นิยาม 2.2.1: การวัด ฟังก์ชันที่วัดได้ และสมบัติแทบทุกจุด

ให้ S เป็นเซต และ $\mathcal{B}$ เป็นตระกูลของเซตย่อยของ S. เราเรียก $\mathcal{B}$ ว่า**ซิกมาแอลจีบรา** (σ-algebra) ถ้า $\emptyset \in \mathcal{B}$, $E \in \mathcal{B} \Rightarrow S \setminus E \in \mathcal{B}$ และ $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}$. ฟังก์ชัน $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ เป็นการวัด ถ้า $\mu(\emptyset) = 0$ และสำหรับเซต $E_j \in \mathcal{B}$ ที่แยกจากกันเป็นคู่

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

เราเรียก $(S, \mathcal{B}, \mu)$ ว่า**ปริภูมิการวัด** (measure space) เมื่อมีสมบัติบริบูรณ์เพิ่มอีกข้อ: ถ้า $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$ และ $E \subset N$ แล้ว $E \in \mathcal{B}$ และ $\mu(E) = 0$. เซต N ที่ $\mu(N) = 0$ เรียกว่าเซตการวัดเป็นศูนย์. เราบอกว่าข้อความหนึ่งเป็นจริง**เกือบทุกแห่ง** (almost everywhere) ถ้ามันเป็นจริงนอกเซตการวัดเป็นศูนย์บางเซต.
ให้ Y เป็นปริภูมิบานาค. เซตย่อยของ Y เรียกว่า**เซตแยกกันได้** (separable set) ถ้ามีเซตย่อยนับได้ที่หนาแน่นในเซตนั้น. ฟังก์ชัน $f : S \to Y$ เป็น**ฟังก์ชันที่วัดได้** (measurable function) ถ้า

1. $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}$ สำหรับทุกเซตเปิด $U \subset Y$; และ
2. มีเซตการวัดเป็นศูนย์ $N \in \mathcal{B}$ ที่ทำให้ $f(S \setminus N)$ เป็นเซตแยกกันได้.

ถ้า Y เองแยกกันได้ เงื่อนไขข้อ 2 เป็นอัตโนมัติ. สำหรับ $S = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด เราใช้การวัดเลอเบก $\mathcal{L}^n$ และเขียน dx แทน $d\mathcal{L}^n(x)$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- ซิกมาแอลจีบรา คือรายชื่อเซตที่เราอนุญาตให้ถามขนาด. การวัดให้ตัวเลขกับเซตในรายชื่อนั้น.
- "เกือบทุกแห่ง" ไม่ได้แปลว่า "ทุกจุด". ค่าที่แตกต่างกันบนเซตที่มีขนาดศูนย์ไม่เปลี่ยนปริพันธ์.
- ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันที่วัดได้ เพราะภาพย้อนกลับของเซตเปิดเป็นเซตเปิด ซึ่งอยู่ในซิกมาแอลจีบราโบเรล.

ข้อควรระวัง: ค่าที่จุดเดียวไม่สำคัญ

ฟังก์ชันสองตัวที่ต่างกันเฉพาะบนเซตขนาดศูนย์มีปริพันธ์และนอร์ม L^p เท่ากันทุก p. ในปริภูมิ L^p เราจึงถือว่าเป็นสมาชิกเดียวกัน; เวลาพูดถึง "ค่า" ของสมาชิก L^p จึงหมายถึงค่าเกือบทุกจุดเท่านั้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2.2.2 นิยามของ L^p และซูพรีมัมนอร์มแท้

ตอนนี้เรามีเครื่องมือวัดขนาดแล้ว. ปริภูมิ L^p เกิดจากคำถามว่า “พื้นที่ใต้กราฟของ $|f|^p$ มีจำกัดหรือไม่”. ถ้ามีจำกัด เราสามารถถอดรากที่ p เพื่อให้ได้ปริมาณที่เป็นเนื้อเดียวกัน: เมื่อคูณฟังก์ชันด้วยสเกลาร์ λ นอร์มควรคูณด้วย $|\lambda|$.

นิยาม 2.2.2: ปริภูมิ L^p และนอร์ม L^p

ให้ $(S, \mathcal{B}, \mu)$ เป็นปริภูมิการวัด และ Y เป็นปริภูมิบานาค. สำหรับ $1 \le p < \infty$ กำหนด

$$L^p(\mu; Y) := \left\{ f : S \to Y : \ f \text{ วัดได้ และ } \int_S |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

โดยถือว่าฟังก์ชันที่เท่ากันเกือบทุกแห่งเป็นสมาชิกตัวเดียวกัน. นอร์มคือ

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

สำหรับ $p = \infty$ กำหนด

$$L^\infty(\mu; Y) := \{ f : S \to Y : \ f \text{ วัดได้ และมีขอบเขตเกือบทุกแห่ง} \}$$

พร้อม**ซูพรีมัมนอร์มแท้** (essential supremum norm)

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf_{\substack{N \in \mathcal{B} \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in S \setminus N} |f(x)|.$$

เมื่อ $S = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ และ μ เป็นการวัดเลอเบก เราเขียน $L^p(\Omega; Y)$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- L^1 คือพื้นที่ทั้งหมด, L^2 คือพลังงาน และ L^∞ คือยอดที่ไม่นับเซตขนาดศูนย์. ตัวอย่าง: ขอบคมที่กระโดดจาก 0 ไป 1 ที่ $1/2$ อยู่ทุก L^p และมี $\|H\|_{L^p} = (1/2)^{1/p}$.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ซูพรีมัมแบบเกือบทุกแห่ง

ในที่นี้ $\operatorname{ess\,sup}$ คือซูพรีมัมที่ “มองไม่เห็น” เซตขนาดศูนย์. มันอาจไม่ถูกบรรลุที่จุดใดเลย แต่มีเซตขนาดศูนย์ที่ทำให้ซูพรีมัมบนส่วนที่เหลือเท่ากับค่านี้; นี่คือเหตุผลที่ L^∞ ไม่สนใจการเปลี่ยนค่าที่จุดเดียว.

ขณะร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.2.1: เกณฑ์ฟังก์ชันครอบใน L^p

ให้ $(S, \mathcal{B}, \mu)$ เป็นปริภูมิการวัด, Y เป็นปริภูมิบานาค, $1 \le p < \infty$ และ $f : S \to Y$ เป็นฟังก์ชันที่วัดได้. ถ้ามี $g \in L^1(\mu; \mathbb{R})$ ที่ $g \ge 0$ และ

$$|f|^p \le g \qquad \mu\text{-เกือบทุกแห่ง},$$

แล้ว $f \in L^p(\mu; Y)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า $|f|^p$ ถูกคุมด้วยฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ แสดงว่าปริพันธ์ของ $|f|^p$ มีจำกัด; เมื่อ f วัดได้ ก็ได้ $f \in L^p$ ตามนิยาม.

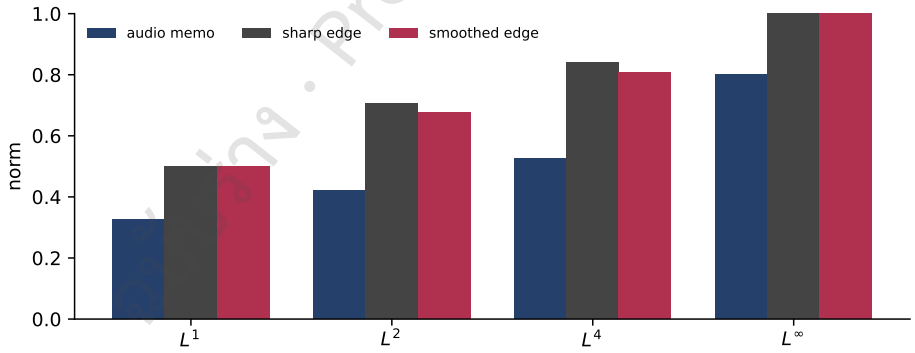
1. **ความวัดได้ของ $|f|^p$.** ฟังก์ชัน $|f|$ วัดได้ และ $t \mapsto t^p$ ต่อเนื่อง จึง $|f|^p$ วัดได้.
2. **หาปริพันธ์ของ $|f|^p$.** จาก $|f|^p \le g$ เกือบทุกแห่งและ $g \in L^1$ ปริพันธ์ $\int_S |f|^p \, d\mu$ มีค่าไม่เกิน $\int_S g \, d\mu < \infty$. เพราะ f วัดได้ จึง $f \in L^p(\mu; Y)$ ตามนิยาม.

สรุป: ฟังก์ชันครอบที่หาปริพันธ์ได้เป็นเหตุผลที่เพียงพอให้ f อยู่ใน L^p. □

นอร์ม L^p เป็นเนื้อเดียวกันตามสเกลาร์:

$$\|\lambda f\|_{L^p} = |\lambda| \, \|f\|_{L^p}.$$

ความเป็นศูนย์เกิดเมื่อ $f = 0$ เกือบทุกแห่ง; จึงต้องถือฟังก์ชันที่เท่ากันเกือบทุกแห่งเป็นตัวเดียวกัน. อสมการสามเหลี่ยมคือ**อสมการมินคอฟสกี** (Minkowski's inequality) ซึ่งบอกว่าผลบวกของสองฟังก์ชันมีขนาดไม่เกินผลบวกของขนาดแต่ละตัว; เราจะพิสูจน์ในหัวข้อ 2.2.3. เมื่อรวมสามข้อ ปริภูมิผลหารจึงเป็นปริภูมินอร์ม.



รูปที่ 2.3: นอร์มของเสียงสมมติ ขอบคม และขอบที่ถูกเฉลี่ยด้วยเคอร์เนลกล่องความกว้าง $2\varepsilon = 1/4$. สำหรับขอบนี้ การเฉลี่ยไม่เปลี่ยน L^1 และ L^∞ แต่ลด L^2 และ L^4 ลง (สร้างจาก `code/funkana/ch02.py`).

2.2.3 เครื่องมือหลักบน L^p: Hölder และมินคอฟสกี

การจะบอกว่า L^p เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เราต้องตรวจว่าผลบวกของสองฟังก์ชันยังอยู่ใน L^p. เครื่องมือหลักคืออสมการสองตัว: Hölder ควบคุมผลคูณ และ Minkowski ควบคุมผลบวก. ทั้งสองเป็นอสมการที่ใช้ตลอดหนังสือ.

Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.2.2: อสมการโฮลเดอร์

ให้ $1 \le p \le \infty$ และ p' เป็น**เลขชี้กำลังสังยุค** (conjugate exponent) ที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (โดยตกลงว่า $1/\infty = 0$). ถ้า $f \in L^p(\mu)$ และ $g \in L^{p'}(\mu)$ แล้ว $fg \in L^1(\mu)$ และ

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^{p'}}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ก่อนอื่นพิสูจน์อสมการยัง $ab \le a^p/p + b^{p'}/p'$ สำหรับจำนวนจริงไม่ลบ แล้วแทน $a = |f|/\|f\|_p$, $b = |g|/\|g\|_{p'}$ และหาปริพันธ์.

1. **อสมการยัง.** สำหรับ $1 < p < \infty$ และ $a, b \ge 0$ พิจารณา $h(b) = ab - b^{p'}/p'$. อนุพันธ์คือ $a - b^{p'-1}$ ซึ่งเป็นศูนย์ที่ $b = a^{1/(p'-1)} = a^{p-1}$. เพราะ $h''(b) = -(p'-1)b^{p'-2} \le 0$ จุดนี้เป็นจุดสูงสุด. ค่าสูงสุดคือ

$$a \cdot a^{p-1} - \frac{a^{p'}}{p'} = a^p - \frac{a^p}{p'} = \frac{a^p}{p}.$$

   เพราะฉะนั้น $ab \le a^p/p + b^{p'}/p'$.

2. **กรณี $1 < p < \infty$.** ถ้า $\|f\|_p = 0$ หรือ $\|g\|_{p'} = 0$ แล้ว $fg = 0$ เกือบทุกแห่ง และอสมการจริง. มิฉะนั้นให้ $a = |f(x)|/\|f\|_p$ และ $b = |g(x)|/\|g\|_{p'}$. จากข้อ 1

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \le \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|_{p'}^{p'}}.$$

   หาปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้ $1/p + 1/p' = 1$ ทางขวา อสมการจึงตามมา.

3. **กรณีปลาย.** ถ้า $p = 1$ แล้ว $p' = \infty$ และ $|f(x)g(x)| \le \|g\|_\infty |f(x)|$ เกือบทุกแห่ง. หาปริพันธ์ได้ทันที. กรณี $p = \infty$ สลับบทบาทของ f และ g.

สรุป: อสมการยังเปลี่ยนผลคูณให้เป็นผลบวกของกำลังสองพจน์; เมื่อ normalize ด้วยนอร์มและหาปริพันธ์ จึงได้อสมการโฮลเดอร์. □

ทฤษฎีบท 2.2.3: อสมการโฮลเดอร์หลายตัวประกอบ

ให้ $m \in \mathbb{N}$ และ $f_i \in L^{p_i}(\mu)$ เป็นฟังก์ชันค่าสเกลาร์สำหรับ $i = 1, \dots, m$ โดย $p_i \in [1, \infty]$ และให้ $q \in [1, \infty]$ ที่

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{q},$$

โดยใช้ข้อตกลง $1/\infty = 0$. แล้ว $\prod_{i=1}^m f_i \in L^q(\mu)$ และ

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i \right\|_{L^q} \le \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทำอุปนัยบนจำนวนตัวประกอบ. ขั้นฐานคืออสมการโฮลเดอร์สองตัว; ขั้นถัดไปใช้สองตัวกับผลคูณของ $m-1$ ตัวแรกและตัวสุดท้าย.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

1. **ขั้นฐาน.** ให้ $m = 2$ และ $1/p_1 + 1/p_2 = 1/q$. ตั้ง $s = p_1/q$ และ $t = p_2/q$. แล้ว $1/s + 1/t = q(1/p_1 + 1/p_2) = 1$ และ $s, t \geq 1$ เพราะ $p_1, p_2 \geq q$. ใช้ทฤษฎีบทโฮลเดอร์กรณี $q = 1$ กับ $|f_1|^q$ และ $|f_2|^q$:
$$\int |f_1 f_2|^q \leq \||f_1|^q\|_{L^s} \, \||f_2|^q\|_{L^t} = \|f_1\|_{L^{p_1}}^q \|f_2\|_{L^{p_2}}^q .$$
ถอดรากที่ q ก็ได้กรณี $m = 2$.

2. **ขั้นอุปนัย.** สมมติข้อความจริงสำหรับผลคูณ $m - 1$ ตัว และให้
$$\frac{1}{r} := \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{p_i}.$$
จาก $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i = 1/q$ จะได้ $1/r + 1/p_m = 1/q$. ใช้กรณี $m = 2$ ที่พิสูจน์แล้วกับเลขชี้กำลัง q, r, p_m:
$$\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i \right\|_{L^q} \leq \left\| \prod_{i=1}^{m-1} f_i \right\|_{L^r} \|f_m\|_{L^{p_m}} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}} .$$

3. **กรณีปลาย.** เมื่อมีเลขชี้กำลังเป็น ∞ ใช้ข้อตกลง $1/\infty = 0$ และอสมการซูพรีมัมในขั้นเดียวกัน; ข้อสรุปยังคงเดิม.

สรุป: การใช้อสมการโฮลเดอร์ซ้ำ ๆ รวมตัวประกอบหลายตัวได้ โดยเลขชี้กำลังของผลคูณคือส่วนกลับของผลบวกส่วนกลับของเลขชี้กำลังเดิม. □

ทฤษฎีบท 2.2.4: อสมการมินคอฟสกี

ให้ $1 \leq p \leq \infty$. ถ้า $f, g \in L^p(\mu; Y)$ แล้ว $f + g \in L^p(\mu; Y)$ และ
$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$ แล้วใช้ Hölder กับสองพจน์.

1. **กรณี $p = \infty$.** $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ เกือบทุกแห่ง จึงได้ทันที.

2. **กรณี $p = 1$.** อสมการสามเหลี่ยมสำหรับค่าสัมบูรณ์ให้ $|f + g| \leq |f| + |g|$ แล้วหาปริพันธ์.

3. **กรณี $1 < p < \infty$.** ให้ $p' = p/(p - 1)$. จาก $|f + g| \leq |f| + |g|$,
$$|f + g|^p \leq |f| \, |f + g|^{p-1} + |g| \, |f + g|^{p-1}.$$
หาปริพันธ์และใช้ Hölder กับคู่ $(f, |f + g|^{p-1})$ และ $(g, |f + g|^{p-1})$. เนื่องจาก $(p - 1)p' = p$,
$$\int |f + g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^p \right)^{1/p'} .$$
เพราะ $|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ และ $f, g \in L^p$, ปริพันธ์ $\int |f + g|^p$ จึงมีค่าจำกัด. ถ้าปริพันธ์นี้เป็นศูนย์ อสมการจริง. มิฉะนั้นหารด้วยตัวประกอบที่ไม่เป็นศูนย์ แล้วใช้ $1 - 1/p' = 1/p$.

สรุป: อสมการสามเหลี่ยมของค่าสัมบูรณ์ยกกำลัง p ถูกควบคุมด้วย Hölder; เมื่อถอดรากที่ p จึงได้อสมการสามเหลี่ยมของนอร์ม. □

ร่างต้น Preprint · 2026-10-24

2.2.4 ความบริบูรณ์ของ L^p: ทฤษฎีบทฟิชเชอร์–รีสซ์

เรารู้แล้วว่า L^p เป็นปริภูมินอร์ม. คำถามต่อไปคือลำดับ Cauchy ลู่เข้าเสมอหรือไม่. คำตอบคือใช่; ลำดับ Cauchy ใน L^p อาจไม่ลู่เข้าทุกจุด แต่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าเกือบทุกแห่ง และลิมิตอยู่ใน L^p.

ทฤษฎีบท 2.2.5: ความบริบูรณ์ของ L^p (ฟิชเชอร์–รีสซ์)

ให้ $(S, \mathcal{B}, \mu)$ เป็นปริภูมิการวัด, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $1 \le p \le \infty$. แล้ว $L^p(\mu; Y)$ ที่มีนอร์ม L^p เป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือกลำดับย่อยที่ผลต่างมีนอร์มลดเร็วมาก แล้วแสดงว่าอนุกรมของผลต่างลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด. ฟังก์ชันที่ใหญ่กว่าอนุกรมนี้ทำหน้าที่เป็นตัวคุมสำหรับการลู่เข้า.

1. **กรณี $1 \le p < \infty$.** ให้ (f_k) เป็นลำดับ Cauchy ใน L^p. เลือกลำดับย่อย $g_j = f_{k_j}$ ที่

$$\|g_{j+1} - g_j\|_{L^p} \le 2^{-j} \qquad (j \ge 1).$$

   ทำได้เพราะ (f_k) เป็น Cauchy. กำหนด

$$H_N := |g_1| + \sum_{j=2}^{N} |g_j - g_{j-1}|.$$

   จากอสมการมินคอฟสกี $\|H_N\|_{L^p} \le \|g_1\|_{L^p} + \sum_{j=2}^{N} 2^{-(j-1)} \le C$ สำหรับค่าคงตัว C ที่ไม่ขึ้นกับ N.

2. **ลิมิตของ H_N.** ลำดับ H_N ไม่ลดและไม่เป็นลบ. ตาม**ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเอกทิศของเบปโป เลวี** (Beppo Levi theorem) (การลู่เข้าแบบมอนอโทน: ลิมิตของลำดับฟังก์ชันไม่ลบที่ไม่ลดมีอยู่), $H = \lim H_N$ มีอยู่และ $\|H\|_{L^p} \le C$. โดยเฉพาะ $H(x) < \infty$ เกือบทุกแห่ง. เพราะฉะนั้นอนุกรม $\sum_j |g_j(x) - g_{j-1}(x)|$ ลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด.

3. **นิยาม f.** ในเซตที่อนุกรมลู่เข้า ลำดับ $g_j(x)$ เป็น Cauchy ใน Y เพราะ $\|g_j(x) - g_i(x)\| \le \sum_{k=i+1}^{j} |g_k(x) - g_{k-1}(x)|$ และหางอนุกรมเล็ก. เนื่องจาก Y บริบูรณ์ จึงมีลิมิต เรียก $f(x)$. บนเซตที่เหลือซึ่งมีขนาดศูนย์ กำหนด $f(x) = 0$.

4. **$f \in L^p$ และ $g_j \to f$.** จาก $|g_j(x)| \le H(x)$ เกือบทุกแห่ง และ $|f(x)| \le H(x)$ เกือบทุกแห่ง. เพราะ H^p หาปริพันธ์ได้, $f \in L^p$. ค่าคลาดเคลื่อนถูกคุมด้วย $(2H)^p$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้; ที่เกือบทุกจุด ค่าคลาดเคลื่อนยกกำลัง p มีลิมิตเป็นศูนย์. ตามทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุม $\|f - g_j\|_{L^p} \to 0$.

5. **กลับไปยังลำดับเดิม.** ให้ $\varepsilon > 0$. เลือก N ที่ $\|f_k - f_l\|_{L^p} < \varepsilon/2$ ทุก $k, l \ge N$. จาก $g_J \to f$ เลือก J ที่ $k_J \ge N$ และ $\|f - g_J\|_{L^p} < \varepsilon/2$. สำหรับ $k \ge N$,

$$\|f_k - f\|_{L^p} \le \|f_k - g_J\|_{L^p} + \|g_J - f\|_{L^p} < \varepsilon.$$

   เพราะฉะนั้นลำดับ Cauchy เดิมลู่เข้า f.

6. **กรณี $p = \infty$.** ให้ (f_k) เป็น Cauchy ใน L^∞. สำหรับแต่ละคู่ k, l มีเซตการวัดเป็นศูนย์ $N_{k,l}$ ที่ $|f_k - f_l| \le \|f_k - f_l\|_\infty$ นอกเซตนั้น. การยูเนียนของเซตนับได้เหล่านี้ยังมีขนาดศูนย์. นอกการยูเนียนนั้นลำดับลู่เข้าเอกรูปสู่ฟังก์ชันมีขอบเขต f; ความเป็นฟังก์ชันที่วัดได้ตามมาจากลิมิตของฟังก์ชันที่วัดได้. จากนั้น $\|f_k - f\|_\infty \to 0$.

สรุป: ลำดับ Cauchy มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด และตัวคุม H ทำให้ลู่เข้าในนอร์ม; ดังนั้น L^p บริบูรณ์. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.2.6: ลำดับย่อยที่ลู่เข้าทุกจุดเกือบทุกแห่ง

ให้ $1 \le p < \infty$ และ $f_k \in L^p(\mu; Y)$ สำหรับทุก k. ให้ $f : S \to Y$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ.

1. ถ้า $f \in L^p(\mu; Y)$ และ $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$ แล้วมีลำดับย่อย (f_{k_i}) ที่ $f_{k_i} \to f$ เกือบทุกแห่ง.
2. ถ้า (f_k) เป็นลำดับ Cauchy ใน L^p และ $f_k \to f$ เกือบทุกแห่ง แล้ว $f \in L^p(\mu; Y)$ และ $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (1) คือส่วนที่เราสร้างไว้แล้วในการพิสูจน์ความบริบูรณ์; ข้อ (2) ใช้ความบริบูรณ์สร้างลิมิตในนอร์ม แล้วระบุกับลิมิตที่ลู่เข้าทุกจุด.

1. **ข้อ (1).** ให้ $g_k = f_k - f$. เพราะ $\|g_k\|_{L^p} \to 0$ เลือกลำดับย่อยที่ $\|g_{k_i}\|_{L^p} \le 2^{-i}$. ใช้การสร้าง H_N ในพิสูจน์ความบริบูรณ์: อนุกรมของผลต่างลู่เข้าเกือบทุกแห่ง ลำดับ $g_{k_i}(x)$ จึงเป็น Cauchy และมีลิมิต $g(x)$ เกือบทุกแห่ง. ลิมิตนี้เป็นศูนย์เกือบทุกแห่ง เพราะ $\|g_{k_i}\|_{L^p} \to 0$ และลิมิตใน L^p มีค่าเดียว. เพราะฉะนั้น $f_{k_i} \to f$ เกือบทุกแห่ง.
2. **ข้อ (2).** ตามทฤษฎีบท 2.2.5 มี $\tilde f \in L^p(\mu; Y)$ ที่ $\|f_k - \tilde f\|_{L^p} \to 0$. ใช้ข้อ (1) กับลำดับที่ลู่เข้า $\tilde f$ ในนอร์ม; จะได้ลำดับย่อยซึ่งลู่เข้าสู่ $\tilde f$ ที่เกือบทุกจุด. แต่สมมติฐานให้ลำดับย่อยเดียวกันลู่เข้าสู่ f ที่เกือบทุกจุด ดังนั้น $\tilde f = f$ เกือบทุกแห่ง. เพราะฉะนั้น $f \in L^p$ และ $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$.

สรุป: การลู่เข้าในนอร์มให้ลำดับย่อยที่ลู่เข้าทุกจุดเกือบทุกแห่ง; ถ้าลำดับเป็น Cauchy และลู่เข้าทุกจุดด้วย ลิมิตทั้งสองแบบต้องเป็นฟังก์ชันเดียวกันเกือบทุกแห่ง. □

บทแทรก 2.2.7: การลู่เข้าใน L^p ถ่ายทอดไปยัง $|f|^p$

ให้ $1 \le p < \infty$ และ $f_k, f \in L^p(\mu; Y)$ โดย $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$. แล้ว

$$\| |f_k|^p - |f|^p \|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ความไม่เท่าเทียมของค่าสัมบูรณ์กำลัง p แล้วแยกตัวประกอบด้วย $(|f_k| + |f|)^{p-1}$; จากนั้นใช้อสมการโฮลเดอร์กับเลขชี้กำลัง p'.

1. **กรณี $p = 1$.** $\big||f_k| - |f|\big| \le |f_k - f|$ จึงอสมการตามจากสมมติฐานทันที.
2. **กรณี $1 < p < \infty$.** สำหรับ $a, b \ge 0$ ฟังก์ชัน $t \mapsto t^p$ มีอนุพันธ์ pt^{p-1} ซึ่งมีขอบเขตบน $[0, a+b]$ ด้วย $p(a+b)^{p-1}$. โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม,
$$\big||a|^p - |b|^p\big| \le p(|a| + |b|)^{p-1}\,\big||a| - |b|\big|.$$
แทน $a = f_k(x)$ และ $b = f(x)$ แล้วหาปริพันธ์. ให้ $p' = p/(p-1)$. จากอสมการโฮลเดอร์,
$$\int \big||f_k|^p - |f|^p\big| \le p \left(\int (|f_k| + |f|)^p\right)^{(p-1)/p} \left(\int \big||f_k| - |f|\big|^p\right)^{1/p}.$$
พจน์แรกมีขอบเขตเพราะ $\|f_k\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$ และอสมการมินคอฟสกีให้ $\||f_k| + |f|\|_{L^p} \le \|f_k\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}$. พจน์ที่สองไม่เกิน $\|f_k - f\|_{L^p}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 0. ผลคูณจึงลู่เข้าสู่ 0.

สรุป: เมื่อ $f_k \to f$ ใน L^p ขนาดกำลัง p ก็ลู่เข้าใน L^1; ตัวคุมคือผลบวกของนอร์มที่ยังมีขอบเขต. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.2.8: ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุมแบบทั่วไป

ให้ $1 \le p < \infty$, $f_k, f : S \to Y$ เป็นฟังก์ชันที่วัดได้ และ $g_k, g : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่วัดได้ โดย $g_k \to g$ ใน $L^1(\mu;\mathbb{R})$. ถ้า

$$f_k \longrightarrow f \quad \mu\text{-เกือบทุกแห่ง}, \qquad |f_k|^p \le g_k \quad \mu\text{-เกือบทุกแห่งสำหรับทุก } k,$$

แล้ว $f_k, f \in L^p(\mu;Y)$ และ $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ลิมิต g ครอบ $|f|^p$ และ $2^{p-1}(g_k+g)$ ครอบ $|f_k-f|^p$. ใช้**บทตั้งของฟาตู** (Fatou's lemma) (สำหรับฟังก์ชันไม่ลบ ปริพันธ์ของลิมิตล่างไม่เกินลิมิตล่างของปริพันธ์) กับ $2^{p-1}(g_k+g) - |f_k-f|^p$ เพื่อบังคับให้**ลิมซูพีเรียม** (limsup) (ค่าลิมิตที่ใหญ่ที่สุดที่ลำดับกลับมาใกล้ได้เมื่อดัชนีไปไกล) ของค่าคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์.

1. **ลดเป็นกรณี $g_k \to g$ เกือบทุกแห่ง.** สมมติก่อนว่า $g_k \to g$ เกือบทุกแห่ง. กรณีทั่วไปตามด้วยหลักการลำดับย่อย: ถ้าข้อสรุปไม่จริง จะมี $\varepsilon > 0$ และลำดับย่อยที่ $\|f_{k_j} - f\|_{L^p} \ge \varepsilon$; การลู่เข้า $g_{k_j} \to g$ ใน L^1 ให้ลำดับย่อยย่อยที่ $g_{k_{j_i}} \to g$ เกือบทุกแห่ง ซึ่งจะขัดแย้งกับข้อสรุปที่พิสูจน์แล้ว.

2. **ลิมิตครอบ $|f|^p$.** จาก $|f_k|^p \le g_k$ และ $f_k \to f$ เกือบทุกแห่ง ให้ $k \to \infty$ เกือบทุกจุด จะได้ $|f|^p \le g$ เกือบทุกแห่ง. ตามทฤษฎีบท 2.2.1, $f_k, f \in L^p(\mu;Y)$.

3. **บทตั้งของฟาตู.** บทตั้งนี้กล่าวว่าสำหรับฟังก์ชันไม่ลบ h_k,

$$\int_S \liminf_{k\to\infty} h_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_S h_k \, d\mu.$$

   กำหนด

$$h_k := 2^{p-1}(g_k+g) - |f_k - f|^p.$$

   จากขั้นที่ 2 และ $|f_k-f|^p \le 2^{p-1}(|f_k|^p + |f|^p)$ เราได้ $h_k \ge 0$ เกือบทุกแห่ง. ที่เกือบทุกจุดที่ทั้งสองลู่เข้าพร้อมกัน ค่าของ h_k มีลิมิตเป็น $2^p g$; เซตที่เหลือมีขนาดศูนย์. บทตั้งของฟาตูให้

$$\int_S 2^p g \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_S h_k \, d\mu = 2^p \int_S g \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_S |f_k - f|^p \, d\mu.$$

   เพราะ $\int_S g_k \, d\mu \to \int_S g \, d\mu$, เทอมแรกทางขวาลู่เข้า $2^p \int_S g \, d\mu$. ดังนั้น $\limsup_k \int_S |f_k-f|^p \, d\mu \le 0$.

4. **สรุป.** ปริพันธ์ $\int_S |f_k - f|^p \, d\mu$ ไม่เป็นลบและลิมซูพีเรียมเป็นศูนย์ จึง $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$.

สรุป: เมื่อตัวครอบลู่เข้าใน L^1 และค่าฟังก์ชันลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด การลู่เข้าใน L^p ตามมา; นี่คือเหตุผลที่ตัวครอบไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเดียวตลอดลำดับ. □

ข้อควรระวัง: ลู่เข้าใน L^p ไม่ได้แปลว่าลู่เข้าทุกจุด

ลำดับฟังก์ชันอาจลู่เข้าใน L^p แต่ค่าแต่ละจุดไม่ลู่เข้า หรือลู่เข้าทีละจุดแต่ไม่ลู่เข้าใน L^p. ทฤษฎีบท 2.2.6 รับประกันเพียงว่ามีลำดับย่อยที่ลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด. ถ้าต้องการสรุปทุกจุด ต้องมีสมมติฐานเพิ่ม เช่น การลู่เข้าเอกรูปหรือทฤษฎีบท 2.2.8.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2.2.5 ฟังก์ชันขั้นบันได ความหนาแน่น และการเปรียบเทียบกับ C

ฟังก์ชันขั้นบันได (step function) คือผลบวกจำกัดของค่าคงที่คูณตัวชี้วัดของเซตที่วัดได้. มันเป็นสะพานเชื่อมระหว่างฟังก์ชันทั่วไปกับฟังก์ชันง่าย ๆ ที่เราคำนวณปริพันธ์ได้ตรง ๆ. ถ้าฟังก์ชันขั้นบันไดหนาแน่นใน L^p เราสามารถพิสูจน์สมบัติของ L^p โดยเริ่มจากกรณีง่ายเหล่านี้.

ทฤษฎีบท 2.2.9: ฟังก์ชันขั้นบันไดหนาแน่นใน L^p

ให้ $(S, \mathcal{B}, \mu)$ เป็นปริภูมิการวัด, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $1 \le p < \infty$. เซตของฟังก์ชันขั้นบันไดค่าใน Y ที่มีขั้นเป็นเซตที่วัดได้และมีขนาดจำกัด หนาแน่นใน $L^p(\mu; Y)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ตัดทั้งโดเมนและขนาดของค่าให้อยู่ในบริเวณที่วัดได้จำกัด แล้วใช้ความแยกกันได้ของพิสัยเพื่อแบ่งโดเมนเป็นขั้นที่รับค่าใน Y จำนวนจำกัด.

1. **ตัดโดเมนและขนาดของค่า.** ตามนิยามของฟังก์ชันที่วัดได้ มีเซตการวัดเป็นศูนย์ N ที่ทำให้ $f(S \setminus N)$ แยกกันได้. สำหรับ $m \in \mathbb{N}$ ให้
$$E_m := \{x \in S \setminus N : \ 1/m \le |f(x)| \le m\}, \qquad f_m := f\mathbf{1}_{E_m}.$$
เซต E_m วัดได้และ $\mu(E_m) \le m^p \int_S |f|^p \, d\mu < \infty$. นอกจากนี้ $|f - f_m|^p \le |f|^p$ และ $f_m \to f$ เกือบทุกแห่ง. ตามทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุม $\|f - f_m\|_{L^p} \to 0$. ฟังก์ชัน f_m มีขอบเขตด้วย m และเป็นศูนย์นอก E_m.

2. **แบ่งพิสัยที่แยกกันได้.** พิสัย $f_m(E_m)$ เป็นเซตแยกกันได้ เพราะเป็นส่วนหนึ่งของพิสัยของ f บน $S \setminus N$. ให้ $\{a_j\}_{j \ge 1}$ เป็นเซตย่อยนับได้ที่หนาแน่นใน $f_m(E_m)$. สำหรับ $r \in \mathbb{N}$ และ $x \in E_m$ ให้ $j_r(x)$ เป็นดัชนีแรกที่ $|f_m(x) - a_{j_r(x)}| < 1/r$; เขียน $E_j^{(r)} = \{x \in E_m : j_r(x) = j\}$. เซตเหล่านี้อยู่ใน $\mathcal{B}$ และมีขนาดจำกัดเพราะอยู่ใน E_m. สำหรับ J ให้
$$s_{r,J} := \sum_{j=1}^{J} a_j \mathbf{1}_{E_j^{(r)}}.$$
โดยตีความ $s_{r,J} = 0$ นอก E_m, นี่คือฟังก์ชันขั้นบันไดค่าใน Y. ทุกจุด $x \in E_m$ มี $j_r(x)$ เป็นจำนวนเต็ม จึงมี J ที่ใหญ่พอซึ่งทำให้ $s_{r,J}(x) = a_{j_r(x)}$; นอก E_m ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. เพราะฉะนั้น $s_{r,J} \to s_r$ ทุกจุดเมื่อ $J \to \infty$, โดย $s_r := a_{j_r(\cdot)}$ บน E_m และ $s_r := 0$ นอก E_m. นอกจากนี้ $|s_{r,J}| \le m + 1$ บน S เพราะ $|f_m| \le m$ และ $|a_j - f_m(x)| < 1/r \le 1$ บน $E_j^{(r)}$; นอก E_m ค่าเป็นศูนย์. ตัวคุม $m + 1$ หาปริพันธ์ได้บน E_m ซึ่งมีขนาดจำกัด. ตามทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุม จึง $\|s_{r,J} - s_r\|_{L^p} \to 0$ เมื่อ $J \to \infty$. แต่ $|s_r(x) - f_m(x)| < 1/r$ บน E_m และทั้งสองเป็นศูนย์นอก E_m; ดังนั้น
$$\|s_r - f_m\|_{L^p} \le \frac{1}{r}\, \mu(E_m)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad (r \to \infty).$$

3. **ประกอบการประมาณ.** ให้ $\varepsilon > 0$. เลือก m ให้ $\|f - f_m\|_{L^p} < \varepsilon/3$. เลือก r ใหญ่พอที่ $\|f_m - s_r\|_{L^p} < \varepsilon/3$ แล้วเลือก J ให้ $\|s_r - s_{r,J}\|_{L^p} < \varepsilon/3$. อสมการสามเหลี่ยมให้ $\|f - s_{r,J}\|_{L^p} < \varepsilon$.

สรุป: ตัดโดเมนและค่าให้อยู่ในบริเวณขนาดจำกัด แล้วแบ่งพิสัยที่แยกกันได้ ทำให้ฟังก์ชันใด ๆ ใน $L^p(\mu; Y)$ ถูกประมาณด้วยฟังก์ชันขั้นบันไดที่มีขั้นขนาดจำกัด. □

ขอบคม $H(t) = \mathbf{1}_{[1/2, \infty)}(t)$ บน $[0, 1]$ อยู่ทุก $L^p([0, 1])$ เพราะ
$$\|H\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}, \qquad \|H\|_{L^\infty} = 1.$$

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

แต่ H ไม่ต่อเนื่องที่ $1/2$. ฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ มีขอบเขตจึงอยู่ใน L^p ทุกตัว; บนช่วงความยาวจำกัดเราจึงมี

$$C^0([0,1]) \subset L^p([0,1]) \qquad (1 \le p \le \infty),$$

แต่การใส่กลับไม่จริง. นี่คือคำตอบของฝั่ง "ขอบภาพ" ในตอนเปิดบท: L^p เห็นการกระโดดได้ ส่วน C^0 ไม่เห็น.

2.2.6 ℓ^p กับ L^p: ตัวอักษรเดียวกัน แต่คนละปริภูมิ

ในบท"จากหน้าจอสู่ปริภูมิ" เราใช้ ℓ^p กับเวกเตอร์และลำดับ; บทนี้ใช้ L^p กับฟังก์ชัน. สูตรเหมือนกัน แต่การวัดต่างกัน. ให้ $S = \mathbb{N}$ และ $\mathcal{B}$ เป็นตระกูลของเซตย่อยทั้งหมด พร้อม**การวัดนับ** (counting measure) $\mu(A) := \#A$. สำหรับลำดับ $a = (a_n)_{n\ge 1}$,

$$\|a\|_{L^p(\mu)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p} = \|a\|_{\ell^p}.$$

เพราะฉะนั้น ℓ^p คือ L^p ของการวัดนับบน $\mathbb{N}$. สำหรับ $x \in \mathbb{K}^N$ การวัดนับบน $\{1,\dots,N\}$ ให้ $\|x\|_{\ell^p} = (\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p)^{1/p}$ และ $\|x\|_{\ell^\infty} = \max_j |x_j|$.

ตัวอย่างเสียง $x_1,\dots,x_{8000}$ เป็นเวกเตอร์ใน ℓ^p_{8000} แต่ฟังก์ชันค่าคงที่ช่วงละ $h = 1/8000$ มีนอร์ม

$$\|x\|_{L^p([0,1])} = h^{1/p}\|x\|_{\ell^p}, \qquad \|x\|_{L^\infty([0,1])} = \|x\|_{\ell^\infty}.$$

ตัวประกอบ $h^{1/p}$ แปลงผลบวกของค่าตัวอย่างเป็นปริพันธ์; ถ้าเปลี่ยนอัตราสุ่มตัวอย่าง ค่า ℓ^p ของเวกเตอร์อาจเท่าเดิม. การเขียน $\|x\|_{L^p}$ แทน $\|x\|_{\ell^p}$ จึงต้องรู้ว่ากำลังพูดถึงฟังก์ชันหรือเวกเตอร์.

บนปริภูมิมิติจำกัด นอร์ม ℓ^p สมมูลกัน: ถ้า $1 \le p < q \le \infty$ และ $x \in \mathbb{K}^N$ แล้ว

$$\|x\|_{\ell^q} \le \|x\|_{\ell^p} \qquad \text{และ} \qquad \|x\|_{\ell^p} \le N^{1/p-1/q}\|x\|_{\ell^q},$$

โดย $1/\infty = 0$. ค่าคงที่ $N^{1/p-1/q}$ ของอสมการที่สองขึ้นกับ N; เมื่อ $N \to \infty$ มันอาจระเบิด.

สำหรับลำดับ การฝังตัวกลับทาง: ถ้า $1 \le p < q \le \infty$ แล้ว $\ell^p \subset \ell^q$ และ $\|a\|_{\ell^q} \le \|a\|_{\ell^p}$; เช่น $a_n = 1/n$ อยู่ใน ℓ^2 แต่ไม่อยู่ใน ℓ^1. บน $[0,1]$ ที่มีความยาวจำกัด กลับได้ $L^q \subset L^p$ สำหรับ $p < q$ พร้อมอสมการ $\|f\|_{L^p} \le \mu(S)^{1/p-1/q}\|f\|_{L^q}$; ฟังก์ชัน $t^{-1/2}$ อยู่ใน L^1 แต่ไม่อยู่ใน L^2. บน $\mathbb{R}$ การฝังตัวนี้อาจกลับทาง: $1/x$ บน $[1,\infty)$ อยู่ใน L^2 แต่ไม่อยู่ใน L^1. ทิศทางของการฝังตัวจึงมาจากการวัด ไม่ได้มาจากตัวเลข p อย่างเดียว.

สรุปใจความ

- L^p วัดขนาดด้วยปริพันธ์ของ $|f|^p$ และถือฟังก์ชันที่เท่ากันเกือบทุกแห่งเป็นตัวเดียวกัน.
- อสมการโฮลเดอร์ควบคุมผลคูณ; อสมการมินคอฟสกีควบคุมผลบวกและทำให้นอร์ม L^p เป็นนอร์มจริง.
- L^p บริบูรณ์ทุก $1 \le p \le \infty$; ลำดับ Cauchy มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าทุกจุดเกือบทั้งหมด.
- ฟังก์ชันขั้นบันไดหนาแน่นใน L^p; บนช่วงจำกัด $C^0 \subset L^p$ แต่ L^p มีฟังก์ชันกระโดดที่ไม่อยู่ใน C^0.
- **อ่านต่อ.** หัวข้อ 2.3 เอา L^p ไปใช้กับการเฉลี่ย: สังวัตนาการทำให้ฟังก์ชันเรียบขึ้น แต่การลู่กลับขึ้นกับ p อย่างไร และทำไม L^∞ จึงดื้อกว่าตัวอื่น.

ร่างพิมพ์ก่อน Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงหาว่า $f(t) = t^{-1/2}$ อยู่และไม่อยู่ใน $L^p([0,1])$ สำหรับ p ใด. คำนวณ $\|f\|_{L^1}$ และ $\|f\|_{L^2}$ เมื่อมีค่า.

2. จงหาว่า $g(t) = t^{-1/3}$ อยู่ใน $L^1([0,1])$ และ $L^2([0,1])$ หรือไม่ พร้อมค่านอร์ม.

3. ให้ $f(t) = g(t) = t^{-1/4}$ บน $[0,1]$ และ $p = 3$. จงตรวจอสมการโฮลเดอร์ด้วยการคำนวณทั้งสองข้าง.

4. ให้ $f(t) = 1$ และ $g(t) = t$ บน $[0,1]$ และ $p = 2$. จงคำนวณ $\|f+g\|_{L^2}$, $\|f\|_{L^2}$ และ $\|g\|_{L^2}$ แล้วตรวจอสมการมินคอฟสกี.

5. จงตัดสินว่าข้อความนี้จริงหรือเท็จ: “ถ้า $p < q$ แล้ว $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ ทุกปริภูมิการวัด”. ถ้าเท็จ จงให้ตัวอย่างค้าน.

6. ให้ $f(t) = t$ บน $[0,1]$ แต่เปลี่ยนค่าเป็น 1000 ที่จุด $t = 1/2$ เพียงจุดเดียว. จงหา $\|f\|_{L^\infty}$ และอธิบายว่าทำไมค่า 1000 ไม่มีผล.

7. ใช้โค้ดของบทนี้คำนวณ $\|x\|_{L^1}, \|x\|_{L^2}, \|x\|_{L^4}, \|x\|_{L^\infty}$ ของเสียงสมมติ และอธิบายว่าทำไม L^∞ ไม่เท่ากับยอดก่อนตัด.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สำหรับ $p < \infty$,
$$\int_0^1 t^{-p/2}\,dt$$
มีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อ $p/2 < 1$ นั่นคือ $p < 2$. เพราะฉะนั้น $f \in L^p$ สำหรับ $1 \le p < 2$ และ $f \notin L^p$ สำหรับ $p \ge 2$. สำหรับ $p = 1$ ปริพันธ์คือ 2; สำหรับ $p = 2$ ปริพันธ์คือ $\int_0^1 t^{-1}\,dt = \infty$.

2. $\int_0^1 t^{-1/3}\,dt = 1/(1-1/3) = 3/2$ จึง $g \in L^1$ และ $\|g\|_{L^1} = 3/2$. สำหรับ L^2 ปริพันธ์คือ $\int_0^1 t^{-2/3}\,dt = 1/(1-2/3) = 3$ จึง $\|g\|_{L^2} = \sqrt{3}$.

3. ทั้งสองฟังก์ชันอยู่ใน L^3 เพราะ $\int_0^1 t^{-3/4}\,dt = 4$. ดังนั้น
$$\|f\|_{L^3} = 4^{1/3}, \qquad \|g\|_{L^{3/2}} = \left(\frac{8}{5}\right)^{2/3}.$$
ผลคูณคือ $\|f\|_{L^3}\|g\|_{L^{3/2}} = (256/25)^{1/3} \approx 2.1715$. ทางซ้าย $\int_0^1 t^{-1/2}\,dt = 2$. เนื่องจาก $2 \le 2.1715$ อสมการจึงเป็นจริง.

4. $\|f+g\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (1+t)^2\,dt = 7/3$ จึง $\|f+g\|_{L^2} = \sqrt{7/3} \approx 1.5275$. นอกจากนี้ $\|f\|_{L^2} = 1$ และ $\|g\|_{L^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$. ผลบวกคือ 1.5774 ซึ่งมากกว่า 1.5275.

5. เท็จ. บน $[0,1]$ ให้ $f(t) = t^{-1/2}$. แล้ว $\int_0^1 |f|\,dt = 2$ จึง $f \in L^1$ แต่ $\int_0^1 |f|^2\,dt = \infty$ จึง $f \notin L^2$. ดังนั้น $L^1 \not\subset L^2$ แม้ $1 < 2$.

6. ค่าที่จุดเดียวมีขนาดศูนย์. สำหรับทุกเซต N ที่มีขนาดศูนย์และมีจุด $1/2$ อยู่ข้างใน, $\sup_{[0,1]\setminus N} |f| = 1$. เพราะฉะนั้น infimum คือ 1 และ $\|f\|_{L^\infty} = 1$. ค่า 1000 ไม่เปลี่ยนปริพันธ์ใด ๆ.

7. โค้ดให้ 0.3246275, 0.4214505, 0.5249188 และ 0.8. ยอดก่อนตัดสูงถึง 0.8489 แต่ฟังก์ชันหลังตัดถูกจำกัดที่ ± 0.8 ทุกจุด. ซูพรีมัมแท้จึงเห็นเพียงเพดาน 0.8 ไม่เห็นยอดเดิมที่ถูกตัดทิ้ง.

ฉบับร่าง preprint · 2026-10-24

2.3 สังวัตนาการและความหนาแน่น

ภาพรวมก่อนอ่าน

สังวัตนาการคือการเฉลี่ยค่าของฟังก์ชันโดยใช้เคอร์เนลเป็นน้ำหนัก. ลองนึกภาพว่าเราเอาแปรงเล็ก ๆ ทาที่ละจุด: ค่าใหม่ที่จุด x คือค่าเฉลี่ยของ f รอบ ๆ x โดยจุดที่อยู่ใกล้กว่าได้รับน้ำหนักมากกว่า. ถ้าเคอร์เนลเป็นกล่องแคบ ๆ การเฉลี่ยจะทำให้ขอบคมกลายเป็นทางลาด. ถ้าเคอร์เนลเรียบ การเฉลี่ยจะทำให้ฟังก์ชันเรียบขึ้น. ภาพที่ต้องจำคือ: สังวัตนาการคือการเลื่อนเคอร์เนลไปตามแกนแล้วอ่านค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก.

ในหัวข้อนี้เราจะตอบคำถามสามข้อพร้อมกัน. ข้อแรก: สังวัตนาการของฟังก์ชันใน L^p ยังอยู่ใน L^p หรือไม่. ข้อสอง: ถ้าเคอร์เนลแคบลงเรื่อย ๆ ผลลัพธ์จะกลับไปหาฟังก์ชันเดิมในความหมายใด. ข้อสาม: ฟังก์ชันเรียบที่มีตัวรองรับกระชับหนาแน่นใน L^p หรือไม่. คำตอบทั้งสามเชื่อมโยงกัน และนำไปสู่อธิบายขอบภาพในตอนท้าย.

2.3.1 สังวัตนาการและอสมการสังวัตนาการ

นิยาม 2.3.1: สังวัตนาการ

ให้ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ และ $f \in L^p(\mathbb{R}^n; Y)$ โดย $1 \le p \le \infty$. กำหนด

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f(x-y)\, dy,$$

เมื่อปริพันธ์มีอยู่. เรียก $\varphi * f$ ว่าสังวัตนาการของ φ กับ f.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- เคอร์เนล φ คือรูปแบบน้ำหนัก. ค่า $\varphi(x-y)$ บอกว่าจุด y มีน้ำหนักแค่ไหนเมื่อเรากำลังคำนวณค่าที่ x.
- ถ้า φ เป็นกล่องกว้าง 2ε และสูง $1/(2\varepsilon)$ ปริพันธ์ของมันเป็น 1. สังวัตนาการจึงเป็นการเฉลี่ยโดยให้น้ำหนักเท่ากันทุกจุดในช่วง $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.
- สังวัตนาการไม่ใช่การคูณแบบจุดต่อจุด. มันผสมค่าจากจุดข้างเคียงเข้าด้วยกัน.

ทฤษฎีบท 2.3.1: สมบัติของสังวัตนาการใน L^p

ให้ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n; Y)$ และ $1 \le p \le \infty$. แล้ว

1. $\varphi * f \in L^p(\mathbb{R}^n; Y)$ และ
$$\|\varphi * f\|_{L^p} \le \|\varphi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}.$$
2. ถ้า φ และ f มีตัวรองรับเป็นเซตกระชับ แล้ว
$$\operatorname{supp}(\varphi * f) \subset \overline{\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} f}.$$
3. ถ้า $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ แล้ว $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; Y)$ และสำหรับทุกพหุดัชนี s,
$$\partial^s(\varphi * f) = (\partial^s \varphi) * f.$$
4. $L^1(\mathbb{R}^n)$ ที่มีสังวัตนาการเป็นผลคูณเป็นพีชคณิตบานาคที่สลับที่.

สงวนลิขสิทธิ์ · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับ $p = 1$ ใช้**ทฤษฎีบทของฟูบินี** (Fubini's theorem) ซึ่งสลับลำดับการหาปริพันธ์ได้เมื่อปริพันธ์คู่มีค่าจำกัด; สำหรับ $p = \infty$ ใช้ซูพรีมัม; สำหรับ $1 < p < \infty$ แยกกำลังของ $|\varphi|$ แล้วใช้ Hölder. ส่วนความเรียบได้จากการหาอนุพันธ์ภายใต้ปริพันธ์.

1. **กรณี $p = 1$.** จาก**ทฤษฎีบทของโทเนลลี** (Tonelli's theorem) ซึ่งอนุญาตให้สลับลำดับการหาปริพันธ์เมื่อฟังก์ชันไม่เป็นลบ,
$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-y)|\,|f(y)|\,dy\,dx = \|\varphi\|_{L^1}\|f\|_{L^1} < \infty.$$
เพราะฉะนั้นปริพันธ์ที่นิยาม $\varphi * f$ มีอยู่เกือบทุก x และอสมการตามมา.

2. **กรณี $p = \infty$.** $|(\varphi * f)(x)| \le \|\varphi\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty}$ เกือบทุก x.

3. **กรณี $1 < p < \infty$.** ให้ $p' = p/(p-1)$. เขียน
$$|\varphi(y)f(x-y)| = |\varphi(y)|^{1/p'} \cdot |\varphi(y)|^{1/p}|f(x-y)|.$$
ใช้อสมการโฮลเดอร์ในตัวแปร y กับเลขชี้กำลัง p' และ p:
$$|(\varphi * f)(x)| \le \|\varphi\|_{L^1}^{1/p'} \left(\int |\varphi(y)|\,|f(x-y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$
ยกกำลัง p, หาปริพันธ์ใน x และใช้โทเนลลี จะได้
$$\|\varphi * f\|_{L^p}^p \le \|\varphi\|_{L^1}^{p/p'+1}\|f\|_{L^p}^p = \|\varphi\|_{L^1}^p\|f\|_{L^p}^p.$$
ถอดรากที่ p ก็ได้อสมการ.

4. **ตัวรองรับ.** ถ้า $x \notin \overline{\operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp} f}$ แล้วสำหรับทุก $y \in \operatorname{supp}\varphi$ จะได้ $x - y \notin \operatorname{supp} f$ จึง $f(x-y) = 0$ เกือบทุกแห่ง. ปริพันธ์จึงเป็นศูนย์.

5. **ความเรียบ.** สมมติ $\varphi \in C_c^\infty$. สำหรับ x ในเซตย่อยที่มีขอบเขต ปริพันธ์ที่ได้จากการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายปริพันธ์ถูกคุมด้วยค่าคงที่คูณ $|f|$ บนตัวรองรับกระชับของ $\varphi(x-\cdot)$. ฟังก์ชัน f หาปริพันธ์ได้บนเซตขนาดจำกัด เพราะอยู่ใน L^p และ $p < \infty$; กรณี $p = \infty$ ใช้ขอบเขตเกือบทุกแห่ง. ตามทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุม อนุพันธ์ทุกอันดับมีอยู่และเท่ากับ $(\partial^s\varphi) * f$. ความต่อเนื่องตามมาจากการลู่เข้าที่ถูกคุมอีกครั้ง.

6. **พีชคณิตบานาค.** การสลับที่ได้จากฟูบินีและการเปลี่ยนตัวแปร $u = x - y$; การเปลี่ยนหมู่ใช้ฟูบินีกับปริพันธ์สามชั้น; อสมการนอร์มได้จากข้อ 1.

สรุป: เคอร์เนล L^1 ควบคุมขนาดของผลลัพธ์ใน L^p; เคอร์เนลเรียบถ่ายทอดความเรียบให้ผลลัพธ์; และสังวัตนาการทำให้ L^1 เป็นพีชคณิตบานาค. □

ข้อควรระวัง: ตัวรองรับของผลสังวัตนาการไม่ได้เล็กเท่าตัวรองรับของ f

ถ้า φ มีตัวรองรับใน $[-\varepsilon,\varepsilon]$ และ f มีตัวรองรับใน K แล้ว $\varphi * f$ มีตัวรองรับใน $K + [-\varepsilon,\varepsilon]$. ขอบจึงกว้างขึ้น 2ε. สังวัตนาการทำให้ฟังก์ชันเรียบขึ้น แต่ก็ทำให้ขอบเบลอ. นี่คือราคาที่ต้องจ่าย และเป็นเหตุผลที่ภาพหลังการเฉลี่ยไม่คมเท่าภาพเดิม.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2.3.2 ลำดับดิแรกและการประมาณเอกลักษณ์

ถ้าเราใช้เคอร์เนลกว้างคงที่ สังวัตนาการจะเบลอภาพตลอดไป. แต่ถ้าเราทำให้เคอร์เนลแคบลงเรื่อย ๆ น้ำหนักจะกระจุกอยู่ใกล้ศูนย์ และผลลัพธ์ควรกลับไปหาฟังก์ชันเดิม. ลำดับของเคอร์เนลที่ทำหน้าที่นี้เรียกว่าลำดับดิแรก.

นิยาม 2.3.2: ลำดับดิแรกและลำดับดิแรกมาตรฐาน

ให้ $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. เราเรียกมันว่า**ลำดับดิแรก** (Dirac sequence) ถ้า

$$\varphi_k \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \, dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \varphi_k \, dx \longrightarrow 0$$

เมื่อ $k \to \infty$ สำหรับทุก $\varrho > 0$. ถ้า $\varphi \in L^1$ ไม่เป็นลบ, $\int \varphi = 1$ และ

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

เราเรียก $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ว่า**ลำดับดิแรกมาตรฐาน** (standard Dirac sequence) ของ φ.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- สามเงื่อนไขบอกว่า: น้ำหนักไม่ติดลบ, น้ำหนักรวมเป็น 1, และน้ำหนักเกือบทั้งหมดกระจุกใกล้ 0 เมื่อ k ใหญ่.
- การย่อขนาด φ_ε รักษาน้ำหนักรวมไว้ เพราะการย่อแกน x ต้องชดเชยด้วย ε^{-n}.
- ในหนึ่งมิติ กล่อง $\varphi_\varepsilon = (2\varepsilon)^{-1}\mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ เป็นลำดับดิแรกมาตรฐาน. ที่ $\varepsilon = 1/8$ ตัวรองรับคือ $[-1/8, 1/8]$ และน้ำหนักรวมเป็น 1.

ทฤษฎีบท 2.3.2: การย่อขนาดสร้างลำดับดิแรกมาตรฐาน

ให้ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ไม่เป็นลบและ $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. กำหนด $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ สำหรับ $\varepsilon > 0$. แล้ว

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \, dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \varphi_\varepsilon \, dx \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

สำหรับทุก $\varrho > 0$. เพราะฉะนั้นสำหรับลำดับ $\varepsilon_k \downarrow 0$ ทุกลำดับ ลำดับ $(\varphi_{\varepsilon_k})$ เป็นลำดับดิแรก.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เปลี่ยนตัวแปร $x = \varepsilon y$. ตัวประกอบ ε^{-n} ยกเลิก**จาโคเบียน** (Jacobian) (ตัวคูณที่บอกว่าการเปลี่ยนตัวแปรยืดพื้นที่ไปเท่าไร) พอดี; บริเวณที่อยู่ไกลออกไปเมื่อมองในตัวแปร y คือ $|y| > \varrho/\varepsilon$ ซึ่งขยายไปยังบริเวณที่ φ มีมวลน้อยลงเรื่อย ๆ.

1. **น้ำหนักรวม.** จาก $dx = \varepsilon^n \, dy$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \, dy = 1.$$

2. **มวลที่อยู่ไกล.** สำหรับ $\varrho > 0$,
$$\int_{|x|>\varrho} \varphi_\varepsilon(x) \, dx = \int_{|y|>\varrho/\varepsilon} \varphi(y) \, dy.$$
เนื่องจาก $\varphi \in L^1$ และ $\mathbf{1}_{\{|y|>\varrho/\varepsilon\}}|\varphi| \leq |\varphi|$, ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุมให้ปริพันธ์ทางขวาลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $\varepsilon \to 0$. เงื่อนไขทั้งสามของลำดับดิแรกจึงเป็นจริงสำหรับทุก $\varepsilon_k \downarrow 0$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุป: การย่อขนาดรักษามวลรวมและดันมวลออกจากทุกบอลที่มีรัศมีบวก; จึงได้ลำดับดิแรกมาตรฐาน. □

ลองเอง: ค่าเฉลี่ยของขอบคม

ให้ $H(t) = \mathbf{1}_{[1/2,\infty)}(t)$ และ φ_ε เป็นกล่องกว้าง 2ε ที่มีน้ำหนักรวม 1. สำหรับ $t \in [1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon]$,

$$(H * \varphi_\varepsilon)(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} H(s)\,ds = \frac{t-(1/2-\varepsilon)}{2\varepsilon}.$$

ที่ $t = 1/2$ ค่านี้เท่ากับ $1/2$. ที่ $t = 1/2-\varepsilon/2$ เท่ากับ $1/4$ และที่ $t = 1/2+\varepsilon/2$ เท่ากับ $3/4$. นอกช่วงนี้ ค่าเป็น 0 หรือ 1 ตามเดิม.

2.3.3 ฟังก์ชันเรียบประมาณฟังก์ชันใดก็ได้ใน L^p

ตอนนี้เรามีสองเครื่องมือ: สังวัตนาการและลำดับดิแรก. เราจะแสดงว่าสังวัตนาการด้วยลำดับดิแรกทำให้ฟังก์ชันกลับมาใน L^p และใช้มันพิสูจน์ว่าฟังก์ชันเรียบที่มีตัวรองรับกระชับหนาแน่นใน L^p.

ทฤษฎีบท 2.3.3: การลู่กลับของสังวัตนาการและความหนาแน่นของ C_c^∞

ให้ $1 \le p < \infty$. แล้ว

1. สำหรับ $f \in L^p(\mathbb{R}^n; Y)$,
$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \longrightarrow 0 \qquad \text{เมื่อ } |h| \to 0.$$
2. ถ้า (φ_k) เป็นลำดับดิแรก แล้ว $\varphi_k * f \to f$ ใน $L^p(\mathbb{R}^n; Y)$.
3. สำหรับเซตเปิด $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ปริภูมิ $C_c^\infty(\Omega; Y)$ หนาแน่นใน $L^p(\Omega; Y)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิสูจน์ (1) ก่อนโดยประมาณด้วยฟังก์ชันขั้นบันได; ใช้ (1) กับน้ำหนักใกล้ศูนย์เพื่อพิสูจน์ (2); แล้วตัดฟังก์ชันให้ห่างจากขอบและสังวัตนาการด้วยเคอร์เนลเรียบเพื่อพิสูจน์ (3).

1. **ความต่อเนื่องของการเลื่อน.** ใช้ความหนาแน่นของฟังก์ชันขั้นบันไดใน L^p จากหัวข้อ 2.2.5. สำหรับขั้นเดียว $s = \alpha\mathbf{1}_E$ ที่ $\mu(E) < \infty$,
$$\|s(\cdot + h) - s\|_{L^p}^p = |\alpha|^p\,\mu(E \triangle (E + h)).$$
สมบัติมาตรฐานของการวัดเลอเบกคือ $\mu(E\triangle(E+h)) \to 0$ เมื่อ $h \to 0$; ตรวจได้โดยประมาณ E ด้วยสหภาพช่วงปิดจำนวนจำกัด ซึ่งการเลื่อนเปลี่ยนขนาดเพียงเล็กน้อย. สำหรับฟังก์ชันขั้นบันไดทั่วไป ใช้ผลบวกจำกัด. สำหรับ f ทั่วไป ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกฟังก์ชันขั้นบันได s ที่ $\|f - s\|_{L^p} < \varepsilon/3$ แล้วเลือก $\delta > 0$ ที่ $\|s(\cdot + h) - s\|_{L^p} < \varepsilon/3$ เมื่อ $|h| < \delta$. เพราะการเลื่อนเป็น**การส่งสมมิติ** (การส่งที่ไม่เปลี่ยนระยะห่างระหว่างจุดทุกคู่) จึงย้ายระยะห่างจาก $f - s$ ไปยังฟังก์ชันที่เลื่อนแล้วได้โดยไม่เปลี่ยนขนาด,
$$\|f(\cdot + h) - f\|_{L^p} \le 2\|f - s\|_{L^p} + \|s(\cdot + h) - s\|_{L^p} < \varepsilon.$$
2. **สังวัตนาการด้วยลำดับดิแรก.** เขียน
$$(\varphi_k * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)\,dy.$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ใช้อสมการโฮลเดอร์ในตัวแปร y กับน้ำหนัก φ_k ที่มีปริพันธ์ 1:

$$|(\varphi_k * f)(x) - f(x)|^p \le \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)\,|f(x-y)-f(x)|^p\,dy.$$

หาปริพันธ์ใน x และใช้โทเนลลี:

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^p}^p \le \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y)\,\|f(\cdot - y) - f\|_{L^p}^p\,dy.$$

ให้ $\delta > 0$. แยกปริพันธ์เป็น $|y| \le \delta$ และ $|y| > \delta$. พจน์แรกไม่เกิน $\sup_{|y|\le\delta} \|f(\cdot-y)-f\|_{L^p}^p$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $\delta \to 0$ ตามข้อ 1. พจน์ที่สองไม่เกิน $2^p\|f\|_{L^p}^p \int_{|y|>\delta}\varphi_k(y)dy$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 0 เมื่อ $k \to \infty$ ตามนิยามของลำดับดิแรก. เลือก δ ก่อนแล้วจึงเลือก k ให้ได้ค่าน้อยกว่า ε.

3. **ความหนาแน่น.** ขยาย f เป็นศูนย์นอก Ω. ให้ $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ เป็นฟังก์ชันทดสอบที่ไม่เป็นลบ, $\int \rho = 1$ และ $\operatorname{supp}\rho \subset B_1(0)$. ให้ $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$.

   สำหรับ $\delta > 0$ กำหนด

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega :\ B_\delta(x) \subset \Omega\}, \qquad D_\delta := \Omega_\delta \cap B_{1/\delta}(0), \qquad f_\delta := f\mathbf{1}_{D_\delta}.$$

   เมื่อ $\delta \downarrow 0$ เซต D_δ เพิ่มขึ้นสู่ Ω จึง $f_\delta \to f$ ใน L^p ตามทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ถูกคุม. เลือก δ ให้ $\|f_\delta - f\|_{L^p} < \varepsilon/2$. สำหรับ $\varepsilon_0 < \delta$, ฟังก์ชัน $\rho_{\varepsilon_0} * f_\delta$ เรียบและมีตัวรองรับใน $D_\delta + B_{\varepsilon_0}(0) \subset \Omega$ จึงอยู่ใน $C_c^\infty(\Omega;Y)$. จากข้อ 2 ใช้กับ f_δ,

$$\|\rho_{\varepsilon_0} * f_\delta - f\|_{L^p} \le \|f_\delta - f\|_{L^p} + \|\rho_{\varepsilon_0} * f_\delta - f_\delta\|_{L^p} < \varepsilon$$

   เมื่อเลือก $\varepsilon_0 < \delta$ เล็กพอให้พจน์ที่สองเล็กกว่า $\varepsilon/2$. เพราะฉะนั้นทุก ε มีฟังก์ชันใน $C_c^\infty(\Omega;Y)$ อยู่ใกล้ f ภายใน ε.

สรุป: การเลื่อนเล็กน้อยเปลี่ยน L^p นอร์มเล็กน้อย; สังวัตนาการด้วยลำดับดิแรกจึงลู่กลับ; และการตัดฟังก์ชันให้ห่างจากขอบก่อนสังวัตนาการให้ฟังก์ชันเรียบที่มีตัวรองรับกระชับ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไม $p = \infty$ ต่างออกไป

ข้อ (1) และ (2) ใช้ $p < \infty$ เพราะเราใช้การประมาณด้วยฟังก์ชันขั้นบันไดและปริพันธ์ของ $|f|^p$. สำหรับ $p = \infty$ การเลื่อนอาจไม่ต่อเนื่อง: ฟังก์ชันขั้นบันได H มี $\|H(\cdot + h) - H\|_\infty = 1$ ทุก $h \neq 0$ แม้ h จะเล็กมาก. สังวัตนาการด้วยลำดับดิแรกก็ลู่เข้าใน L^∞ ได้ไม่เสมอไป. นี่คือเหตุผลที่ทฤษฎีบทความหนาแน่นกล่าวเฉพาะ $p < \infty$.

2.3.4 การตัดให้เรียบและบทตั้งหลักของการแปรผัน

การพิสูจน์ความหนาแน่นใช้การตัดฟังก์ชันให้ห่างจากขอบ. เครื่องมือที่ทำหน้าที่นี้คือฟังก์ชันตัดตอน. มันเป็นฟังก์ชันเรียบที่เท่ากับ 1 บนบริเวณที่เราต้องการ และเป็น 0 ก่อนถึงขอบของโดเมน.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 2.3.4: ฟังก์ชันตัดตอน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด, $K \subset \Omega$ กระชับ และ $\delta > 0$ ที่ $B_\delta(K) \subset \Omega$. แล้วมี $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ ที่

$$0 \le \eta \le 1, \qquad \eta = 1 \text{ บน } K, \qquad \operatorname{supp}\eta \subset B_\delta(K),$$

และสำหรับทุกพหุดัชนี s,

$$|\partial^s \eta| \le C_{n,s}\delta^{-|s|},$$

โดย $C_{n,s}$ เป็นค่าคงตัวที่ขึ้นกับ n และ s เท่านั้น.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เอาตัวชี้วัดของ $B_{\delta/2}(K)$ มาสังวัตนาการด้วยฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนเล็ก ๆ. สังวัตนาการทำให้เรียบ และเลือกความกว้างของก้อนให้ค่าเป็น 1 บน K แต่ยังเป็น 0 ก่อนถึง $B_\delta(K)$.

1. **เตรียมฟังก์ชันทดสอบรูปก้อน.** ให้ $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ไม่เป็นลบ, $\int \theta = 1$ และ $\operatorname{supp}\theta \subset B_{1/4}(0)$. กำหนด $\rho(y) := \delta^{-n}\theta(y/\delta)$; แล้ว $\rho \ge 0$, $\int \rho = 1$ และ $\operatorname{supp}\rho \subset B_{\delta/4}(0)$.

2. **นิยาม η.** ให้
$$\eta(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{B_{\delta/2}(K)}(x-y)\rho(y)\,dy.$$
เนื่องจาก ρ เรียบและมีตัวรองรับกระชับ η จึงเรียบ. เพราะ $0 \le \mathbf{1} \le 1$ และ $\int \rho = 1$ จึง $0 \le \eta \le 1$.

3. **ค่า 1 บน K.** ถ้า $x \in K$ และ $|y| \le \delta/4$ แล้ว $x - y \in B_{\delta/4}(x) \subset B_{\delta/2}(K)$. เพราะฉะนั้นตัวชี้วัดเป็น 1 ทุก y ในตัวรองรับของ ρ และ $\eta(x) = 1$.

4. **ตัวรองรับ.** ถ้า $\operatorname{dist}(x,K) \ge 3\delta/4$ และ $|y| \le \delta/4$ แล้ว $\operatorname{dist}(x-y,K) \ge \delta/2$. ดังนั้น $x - y \notin B_{\delta/2}(K)$ และตัวชี้วัดเป็น 0, จึง $\eta(x) = 0$. เพราะฉะนั้นเซตที่ $\eta \ne 0$ อยู่ใน $\{\operatorname{dist}(\cdot,K) < 3\delta/4\}$ และส่วนปิดคลุมของมันอยู่ใน $\{\operatorname{dist}(\cdot,K) \le 3\delta/4\} \subset B_\delta(K)$.

5. **ขอบเขตของอนุพันธ์.** จากสูตรการหาอนุพันธ์ภายใต้ปริพันธ์,
$$\partial^s \eta = \mathbf{1}_{B_{\delta/2}(K)} * \partial^s \rho, \qquad \partial^s \rho(y) = \delta^{-n-|s|}(\partial^s\theta)(y/\delta).$$
ดังนั้น
$$\|\partial^s \rho\|_{L^1} = \delta^{-|s|}\|\partial^s\theta\|_{L^1}.$$
โดยอสมการสังวัตนาการใน L^∞,
$$|\partial^s\eta(x)| \le \|\partial^s\rho\|_{L^1} \le C_{n,s}\delta^{-|s|}, \qquad C_{n,s} := \|\partial^s\theta\|_{L^1}.$$

สรุป: สังวัตนาการตัวชี้วัดของส่วนในด้วยฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนเล็ก ๆ ให้ฟังก์ชันเรียบที่เท่ากับ 1 บน K และหายก่อนถึงขอบของ $B_\delta(K)$. □

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ฟังก์ชันเรียบมีมากพอหรือไม่

การที่ $C_c^\infty(\Omega)$ หนาแน่นใน $L^p(\Omega)$ สำหรับ $p < \infty$ ไม่ได้หมายความว่ามันมีสมาชิก “มาก” ในความหมายของการนับ. มันหมายความว่าทุกฟังก์ชันใน L^p ถูกประมาณได้ดีตามต้องการด้วยสมาชิกของเซตนี้. ปริภูมิ $L^p(\mathbb{R}^n)$ สำหรับ $p < \infty$ เป็นเซตแยกกันได้: มีเซตย่อยนับได้ที่หนาแน่น. ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันขั้นบันไดที่มีขั้นเป็นกล่องตรรกยะและค่าตรรกยะก็เพียงพอ. ในทางกลับกัน $L^\infty([0,1])$ ไม่แยกกันได้: ฟังก์ชัน $\mathbf{1}_{[a,1]}$ สำหรับ $a \in [0,1]$ มีระยะห่างในซูพรีมัมนอร์มเท่ากับ 1 เมื่อ $a \neq b$ จึงต้องใช้เซตหนาแน่นที่นับไม่ได้. ความหนาแน่นของ C_c^∞ ใน L^p จึงเป็นสมบัติของ $p < \infty$ ไม่ใช่สมบัติของ L^∞.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): การแบ่งส่วนหนึ่ง

ให้ $K \subset \mathbb{R}^n$ กระชับ และ $U_1, \dots, U_k$ เป็นเซตเปิดที่คลุม K. เลือกเซตเปิด V_j ที่ $\overline{V_j}$ กระชับ, $\overline{V_j} \subset U_j$ และ $V_1 \cup \cdots \cup V_k$ ยังคลุม K. ใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันตัดตอนสร้าง $\eta_j \in C_c^\infty(U_j)$ ที่ $0 \le \eta_j \le 1$ และ $\eta_j = 1$ บน V_j. แล้ว $\eta := \sum_j \eta_j$ เป็นบวกบน K. บนย่านของ K ที่ $\eta > 0$ กำหนด

$$\zeta_j := \frac{\eta_j}{\eta}.$$

แต่ละ ζ_j เรียบ มีตัวรองรับใน U_j และ $\sum_j \zeta_j = 1$ บน K. เราเรียก (ζ_j) ว่า**การแบ่งส่วนหนึ่ง** (partition of unity) ของ K ตามการปกคลุม (U_j). การหารด้วย η จำเป็นเพราะผลบวกของฟังก์ชันตัดตอนอาจมากกว่า 1 เมื่อการปกคลุมซ้อนกัน.

ถ้าเป็นการปกคลุมเฉพาะที่ของเซตเปิด Ω ทั้งเซต เราใช้การปกคลุมย่อยนับได้และทำแบบเดียวกันบนเซตกระชับ K_i ที่เพิ่มขึ้นสู่ Ω. ในบริเวณเล็ก ๆ มีพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด จึงหารด้วยผลบวกได้ทุกจุด. เราไม่ใช้การแบ่งส่วนหนึ่งในบทนี้ แต่จะใช้ในบทว่าด้วยดิสทริบิวชัน.

ทฤษฎีบท 2.3.5: บทตั้งมูลฐานของแคลคูลัสการแปรผัน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $g \in L^1(\Omega; Y)$. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

1. $\displaystyle\int_\Omega \zeta(x) g(x)\, dx = 0$ สำหรับทุก $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$;
2. $\displaystyle\int_E g(x)\, dx = 0$ สำหรับทุกเซตที่วัดได้และมีขอบเขต E ที่ $\overline{E} \subset \Omega$;
3. $g = 0$ เกือบทุกแห่งบน Ω.

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิสูจน์ $(1) \Rightarrow (3)$ โดยสังวัตนาการ g กับเคอร์เนลเรียบ; ลำดับดิแรกทำให้ผลสังวัตนาการลู่กลับสู่ g ใน L^1. สำหรับ $(2) \Rightarrow (3)$ ฉาย g ลงบนทิศทางของค่าที่หนาแน่นในพิสัยด้วยฟังก์ชันนัล แล้วใช้กรณีค่าสเกลาร์.

1. $(1) \Rightarrow (3)$. ขยาย g เป็นศูนย์นอก Ω. ให้ ρ_ε เป็นลำดับดิแรกมาตรฐานของฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนที่มีตัวรองรับใน $B_1(0)$. สำหรับ $x \in \Omega$ และ $\varepsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, ฟังก์ชัน $y \mapsto \rho_\varepsilon(x - y)$ อยู่ใน $C_c^\infty(\Omega)$. จาก (1),

$$(\rho_\varepsilon * g)(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x - y) g(y)\, dy = 0.$$

ตามทฤษฎีบท 2.3.3(2) ใน $\mathbb{R}^n$, $\rho_\varepsilon * g \to g$ ใน $L^1(\mathbb{R}^n; Y)$; เมื่อจำกัดบน Ω จึงลู่เข้า g ใน $L^1(\Omega; Y)$. เลือก $\varepsilon_j \downarrow 0$. สำหรับแต่ละ $x \in \Omega$ จะมี j_0 ที่ $\varepsilon_j < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ ทุก $j \ge j_0$, ดังนั้น $(\rho_{\varepsilon_j} * g)(x) = 0$ ทุก $j \ge j_0$. ลำดับนี้จึง

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-21

ลู่เข้าศูนย์ทุกจุดบน Ω. เมื่อเลือก L^1-representative ของลิมิตและผ่านไปยังลำดับย่อยที่ลู่เข้าจุดต่อจุด ค่าลิมิตสองแบบต้องตรงกันเกือบทุกจุด. เพราะฉะนั้น $g = 0$ เกือบทุกแห่ง.

2. $(3) \Rightarrow (1)$ **และ** $(3) \Rightarrow (2)$**.** ถ้า $g = 0$ เกือบทุกแห่ง ปริพันธ์ทุกตัวเป็นศูนย์.

3. **กรณีค่าสเกลาร์ของ** $(2) \Rightarrow (3)$**.** ให้ $h \in L^1(\Omega)$ ค่าสเกลาร์ และ $\int_E h = 0$ สำหรับทุกเซตที่ยอมรับได้ในข้อ (2). ถ้า h ค่าจริง ให้ $E_+ = \{x \in \Omega : h(x) > 0\}$. สำหรับ $R > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ให้

$$E_{R,m} = E_+ \cap B_R(0) \cap \{x : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/m\}.$$

เซตนี้มีขอบเขตและส่วนปิดคลุมอยู่ใน Ω. จากสมมติฐาน $\int_{E_{R,m}} h = 0$. ถ้า $h > 0$ บนเซต E และ $\int_E h = 0$ แล้ว $\mu(E) = 0$. เมื่อให้ $R, m \to \infty$ จะได้ $\mu(E_+) = 0$, ดังนั้น $h \leq 0$ เกือบทุกแห่ง; ทำกับ $-h$ ได้ $h \geq 0$ เกือบทุกแห่ง. ดังนั้น $h = 0$ เกือบทุกแห่ง. กรณีค่าซับซ้อนแยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพ.

4. $(2) \Rightarrow (3)$ **สำหรับค่าใน** Y**.** จากนิยามของฟังก์ชันที่วัดได้ มีเซตการวัดเป็นศูนย์ N_0 ที่ทำให้ $g(\Omega \setminus N_0)$ แยกกันได้. เลือกเซตย่อยนับได้ $\{y_j\}_{j \geq 1}$ ที่หนาแน่นในพิสัยนี้. โดยทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค เลือก $\ell_j \in Y^*$ ที่ $\|\ell_j\| = 1$ และ $\ell_j(y_j) = \|y_j\|$. ให้ $h_j := \ell_j \circ g$. สำหรับเซต E ที่ยอมรับได้,

$$\int_E h_j = \ell_j\Big(\int_E g\Big) = 0.$$

จากข้อ 3, $h_j = 0$ เกือบทุกแห่ง. ให้ N เป็นยูเนียนของ N_0 กับเซตนับได้ที่ $h_j \neq 0$; แล้ว $\mu(N) = 0$. ถ้า $x \notin N$ และ $y_{j_k} \to g(x)$ แล้ว

$$\|y_{j_k}\| = |\ell_{j_k}(g(x)) - \ell_{j_k}(y_{j_k})| \leq \|g(x) - y_{j_k}\| \longrightarrow 0.$$

ดังนั้น $y_{j_k} \to 0$ พร้อมกับ $y_{j_k} \to g(x)$ ซึ่งให้ $g(x) = 0$. เพราะฉะนั้น $g = 0$ เกือบทุกแห่ง.

สรุป: ฟังก์ชันทดสอบเป็น “หัววัด” ที่ละเอียดพอจะเห็นทุกส่วนของ g; ถ้าหัววัดทุกตัวอ่านได้ศูนย์ แสดงว่า g เป็นศูนย์เกือบทุกแห่ง. □

2.3.5 กลับไปที่ขอบภาพ: ทำไมการเฉลี่ยทำให้เบลอ

ตอนนี้เรามีเครื่องมือครบที่จะอธิบายสถานการณ์เปิดบท. ให้

$$H(t) = \mathbf{1}_{[1/2,\infty)}(t)$$

เป็นขอบคมบน $[0, 1]$; ภายในช่วงนี้มันมีจุดกระโดดเพียงจุดเดียวที่ $1/2$. เราใช้เคอร์เนลกล่อง

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)$$

ซึ่งมีน้ำหนักรวม 1. สังวัตนาการ $H_\varepsilon := H * \varphi_\varepsilon$ ให้ฟังก์ชัน

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 1/2 - \varepsilon, \\ \dfrac{t - (1/2 - \varepsilon)}{2\varepsilon}, & |t - 1/2| \leq \varepsilon, \\ 1, & t > 1/2 + \varepsilon. \end{cases}$$

ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องทุกจุด เพราะค่าที่รอยต่อทั้งสองข้างตรงกัน. แต่ที่ $t = 1/2 \pm \varepsilon$ ความชันเปลี่ยนทันที ดังนั้น H_ε ต่อเนื่องแต่ไม่ใช่ C^1. ถ้าใช้เคอร์เนลที่เป็นฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนเรียบแทนกล่อง ผลลัพธ์จะเป็น C^∞.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ผลต่าง $H - H_\varepsilon$ ไม่เป็นศูนย์เฉพาะบนช่วง $[1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon]$. คำนวณตรง ๆ ได้

$$\|H - H_\varepsilon\|_{L^1} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|H - H_\varepsilon\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}, \qquad \|H - H_\varepsilon\|_{L^\infty} = \frac{1}{2}.$$

สำหรับ $\varepsilon = 1/8$ ค่าเหล่านี้คือ 0.0625, 0.1443 และ 0.5. เมื่อ $\varepsilon \to 0$ สองค่าแรกไปทาง 0 แต่ค่า L^∞ ยังเป็น $1/2$ เพราะที่จุดขอบ ค่าของ H_ε ยังเป็น $1/2$ ขณะที่ H กระโดดจาก 0 ไป 1.

ในโค้ด เราเก็บขอบเป็นลำดับแปดค่า $a = (0,0,0,0,1,1,1,1)$ และใช้เคอร์เนลไม่ต่อเนื่อง $k = (1/4, 1/2, 1/4)$. เติมค่าที่ขอบซ้ำหนึ่งตำแหน่งทั้งสองข้าง แล้วคำนวณ

$$(a * k)_j = \frac{1}{4}a_{j-1} + \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{4}a_{j+1}.$$

ผลลัพธ์คือ $(0,0,0,0.25,0.75,1,1,1)$. ค่า 0.25 และ 0.75 เกิดตรงรอยต่อ เพราะเคอร์เนลผสมค่าจากสองฝั่ง. การเติมค่าขอบซ้ำเป็นทางเลือกสำหรับลำดับจำกัด; ถ้าเติมศูนย์แทน ค่าที่ปลายจะต่างออกไป. แบบทดสอบใน `test_ch02.py` ตรวจผลลัพธ์นี้ทุกตำแหน่ง และตรวจสูตรเชิงปริพันธ์ของทางลาดแยกต่างหาก.

นอร์มของตัวฟังก์ชันเองก็บอกเรื่องเดียวกัน:

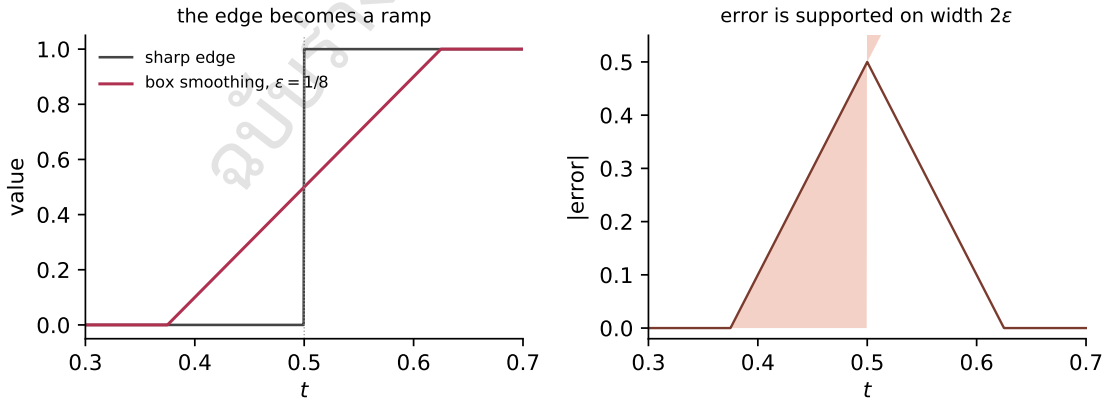
$$\|H\|_{L^1} = 0.5, \quad \|H\|_{L^2} = 0.7071, \quad \|H\|_{L^4} = 0.8409, \quad \|H\|_{L^\infty} = 1,$$

และสำหรับ H_ε ที่ $\varepsilon = 1/8$,

$$\|H_\varepsilon\|_{L^1} = 0.5, \quad \|H_\varepsilon\|_{L^2} = 0.6770, \quad \|H_\varepsilon\|_{L^4} = 0.8074, \quad \|H_\varepsilon\|_{L^\infty} = 1.$$

การเฉลี่ยรักษาพื้นที่ทั้งหมด (L^1) และรักษายอดสูงสุด (L^∞) แต่ลดพลังงาน (L^2) และ L^4 ลง เพราะมันกระจายค่าที่เคยสูงชันให้ราบลง.

นี่คือสาเหตุที่แท้จริงของความเบลอ ซึ่งมีสองส่วนด้วยกัน: ฟังก์ชันขอบไม่ต่อเนื่องจึงไม่อยู่ใน C^0 แม้จะอยู่ใน L^p ทุกตัว และ*การเฉลี่ยด้วยเคอร์เนลที่มีความกว้างบวก*ก็ทำให้ค่าที่เคยกระโดดกระจายออกไป. ตัวดำเนินการสังวัตนาการเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต และมันทำให้ฟังก์ชันเรียบขึ้นโดยแลกกับการขยายขอบออกไป 2ε. ถ้าเราเลือก ε เล็กลง ขอบจะคมขึ้น และค่าคลาดเคลื่อน L^p จะเล็กลงสำหรับ $p < \infty$ แต่ค่าคลาดเคลื่อน L^∞ ยังคง $1/2$ ตราบใดที่ $\varepsilon > 0$. นี่คือความแตกต่างระหว่าง “ลู่เข้าใน L^p” กับ “ลู่เข้าเอกรูป” ที่เราต้องแยกให้ชัด.



รูปที่ 2.4: ขอบคมและขอบที่ถูกสังวัตนาการด้วยเคอร์เนลกล่องความกว้าง $2\varepsilon = 1/4$. ทางซ้ายคือค่าของฟังก์ชัน; ทางขวาคือขนาดของผลต่าง. ผลต่างไม่เป็นศูนย์เฉพาะบนช่วงกว้าง 2ε (สร้างจาก `code/funkana/ch02.py`).

เสียงสมมติในตอนเปิดบทเล่าเรื่องเดียวกันในอีกมุมหนึ่ง. L^2 ของเสียงคือพลังงาน ซึ่งส่วนใหญ่มาจากช่วงเสียงพูด. L^∞ คือยอดที่ถูกตัด ซึ่งหยุดที่ 0.8 และไม่รู้ว่ายอดเดิมสูงแค่ไหน. การเลือกนอร์มจึงไม่ใช่รายละเอียดทางเทคนิค แต่เป็นการเลือกว่าคำถาม “ดังแค่ไหน” หมายถึงอะไร.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

สรุปใจความ

- สังวัตนาการเฉลี่ยค่าของ f ด้วยน้ำหนัก φ; ถ้า $\varphi \in L^1$ ผลลัพธ์อยู่ใน L^p และนอร์มไม่เกิน $\|\varphi\|_1 \|f\|_p$.
- ลำดับดิแรกคือเคอร์เนลที่น้ำหนักรวม 1 และกระจุกใกล้ศูนย์; สังวัตนาการด้วยมันลู่กลับสู่ f ใน L^p สำหรับ $p < \infty$.
- $C_c^\infty(\Omega)$ หนาแน่นใน $L^p(\Omega)$; เราได้มันจากการตัดฟังก์ชันให้ห่างจากขอบแล้วสังวัตนาการด้วยเคอร์เนลเรียบ.
- ฟังก์ชันตัดตอนเท่ากับ 1 บนเซตกระชับและหายก่อนถึงขอบ; บทตั้งมูลฐานบอกว่าถ้าฟังก์ชันทดสอบทุกตัวอ่านค่า g ได้ศูนย์ แล้ว $g = 0$ เกือบทุกแห่ง.
- การเฉลี่ยขอบคมทำให้เกิดทางลาดกว้าง 2ε; มันลู่เข้าใน L^p แต่ไม่ลู่เข้าเอกรูป.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ H_ε เป็นสังวัตนาการขอบคมด้วยกล่องกว้าง 2ε. จงคำนวณ $H_\varepsilon(1/2 - \varepsilon/2)$, $H_\varepsilon(1/2)$ และ $H_\varepsilon(1/2 + \varepsilon/2)$ สำหรับ $\varepsilon = 1/8$.

2. จงแสดงว่าสังวัตนาการด้วยเคอร์เนลกล่องที่มีน้ำหนักรวม 1 รักษา L^1 นอร์มของขอบคมบน $[0,1]$. ใช้ $\varepsilon = 1/8$ และตรวจค่าตัวเลข.

3. จงใช้สูตรค่าคลาดเคลื่อนในหัวข้อ 2.3.5 หา ε ที่ทำให้ $\|H - H_\varepsilon\|_{L^2} < 0.1$. ค่าที่ได้ต้องเป็นช่วงใด.

4. จงตัดสินว่าข้อความนี้จริงหรือเท็จ: “ถ้า $\varphi \in C_c^\infty$ และ $f \in L^p$ แล้ว $\varphi * f$ มีตัวรองรับกระชับเสมอ”. ถ้าเท็จ จงให้ตัวอย่างค้าน.

5. ให้ $f = 1$ บน $(0,1)$. จงหาฟังก์ชันทดสอบ $\zeta \in C_c^\infty((0,1))$ ที่ $\int_0^1 f\zeta \neq 0$ และอธิบายว่าทำไมสิ่งนี้ไม่ขัดกับบทตั้งมูลฐาน.

6. ใช้สังวัตนาการแบบไม่ต่อเนื่องกับลำดับ $[0,0,0,0,1,1,1,1]$ และเคอร์เนล $[1/4, 1/2, 1/4]$ โดยเติมค่าขอบซ้ำ. จงเขียนผลลัพธ์ทั้งแปดค่าและอธิบายว่าค่าใดเปลี่ยนไปบ้าง.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ที่ $t = 1/2 - \varepsilon/2$ ตัวเศษคือ $(1/2 - \varepsilon/2) - (1/2 - \varepsilon) = \varepsilon/2$ จึงได้ $1/4$. ที่ $t = 1/2$ ตัวเศษคือ ε จึงได้ $1/2$. ที่ $t = 1/2 + \varepsilon/2$ ตัวเศษคือ $3\varepsilon/2$ จึงได้ $3/4$. สำหรับ $\varepsilon = 1/8$ ค่าคือ $0.25, 0.5, 0.75$.

2. เขียน $H_\varepsilon = H * \varphi_\varepsilon$ ตามสูตรในหัวข้อ 2.3.5. บนช่วงทางลาด $[1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon]$ ฟังก์ชันเพิ่มจาก 0 เป็น 1 เป็นเส้นตรง จึงมีพื้นที่ใต้กราฟเท่ากับสามเหลี่ยมฐาน 2ε สูง 1, คือ ε. ทางขวาของทางลาด $H_\varepsilon = 1$ บนช่วงความยาว $1 - (1/2 + \varepsilon) = 1/2 - \varepsilon$. ดังนั้น

$$\int_0^1 H_\varepsilon(t)\,dt = \varepsilon + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{2} = \int_0^1 H(t)\,dt.$$

ที่ $\varepsilon = 1/8$ ค่าคือ 0.5 ตรงกับตาราง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. ต้องมี $\sqrt{\varepsilon/6} < 0.1$ ดังนั้น $\varepsilon/6 < 0.01$ และ $\varepsilon < 0.06$. ช่วงที่ใช้ได้คือ $0 < \varepsilon < 0.06$.

4. เท็จ. ให้ $p = 2$ และ $f(x) = (1+|x|)^{-1}$ บน $\mathbb{R}$. แล้ว $\int_{\mathbb{R}} |f|^2\,dx = 2 < \infty$ จึง $f \in L^2(\mathbb{R})$. ให้ φ เป็นฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนที่ไม่เป็นลบ, มีตัวรองรับใน $[-1,1]$ และ $\int \varphi = 1$. แล้ว
$$(\varphi * f)(x) = \int \varphi(x-y)\frac{1}{1+|y|}\,dy > 0$$
ทุก x เพราะตัวถูกปริพันธ์เป็นบวกบนตัวรองรับของ φ. ผลลัพธ์มีตัวรองรับเป็น $\mathbb{R}$ ไม่กระชับ. ตัวรองรับของผลสังวัตนาการจะกระชับเมื่อ f มีตัวรองรับกระชับด้วย.

5. ให้ ζ เป็นฟังก์ชันทดสอบรูปก้อนที่ไม่เป็นลบบน $(0,1)$ และ $\int_0^1 \zeta = 1$. แล้ว $\int_0^1 f\zeta = \int_0^1 \zeta = 1 \neq 0$. บทตั้งมูลฐานกล่าวว่าเงื่อนไข “ปริพันธ์เป็นศูนย์สำหรับทุก ζ” นั้นแรงมาก; การมี ζ ตัวเดียวที่ปริพันธ์ไม่เป็นศูนย์เพียงแสดงว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์.

6. เติมค่าขอบซ้ำจะได้ลำดับขยาย $[0,0,0,0,0,1,1,1,1,1]$ สำหรับสังวัตนาการที่ให้ผลยาวเท่าอินพุต ค่าคือ
$$[0,0,0,0.25,0.75,1,1,1].$$
ค่า 0.25 และ 0.75 เกิดที่รอยต่อ เพราะเคอร์เนลผสมค่าจากทั้งสองข้าง; ค่าที่อยู่ไกลรอยต่อยังเป็น 0 หรือ 1 ตามเดิม.

สรุปทั้งบทและอ่านต่อ

ปริภูมิ	นอร์ม	สิ่งที่วัด
$B(S;Y)$	$\sup_x \lvert f(x)\rvert$	ความสูงของกราฟ
$C^0(K;Y)$	$\sup_x \lvert f(x)\rvert$	ความสูงและการไม่กระโดด
$C^m(\overline{\Omega};Y)$	$\sum_{\lvert s\rvert\le m} \lVert\partial^s f\rVert_\infty$	ความสูงและอนุพันธ์ทุกอันดับ
$C^{0,\alpha}(S;Y)$	$\lVert f\rVert_\infty + \mathrm{Hol}_\alpha(f,S)$	ความสูงและอัตราการเปลี่ยน
$L^p(\mu;Y)$	$(\int \lvert f\rvert^p\,d\mu)^{1/p}$	พื้นที่ใต้กราฟของ $\lvert f\rvert^p$
$L^\infty(\mu;Y)$	$\operatorname{ess\,sup}\lvert f\rvert$	ยอดที่ไม่นับเซตขนาดศูนย์

เครื่องมือที่ต้องพกไปบทถัดไปมีสามอย่าง. อย่างแรกคืออสมการโฮลเดอร์และมินคอฟสกี ซึ่งจะใช้ทุกครั้งที่ประมาณนอร์ม. อย่างที่สองคือความบริบูรณ์ของ L^p ซึ่งทำให้เราหาลิมิตได้โดยไม่ต้องรู้ล่วงหน้าว่าลิมิตคืออะไร. อย่างที่สามคือสังวัตนาการ ซึ่งเป็นตัวอย่างแรกของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตและทำให้ฟังก์ชันเรียบขึ้น.

บท“เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต” จะเปลี่ยนจาก “ขนาด” ไปสู่ “มุม”. เราจะเพิ่มผลคูณภายในให้ปริภูมิ L^2 และศึกษาการฉายตั้งฉาก. คำถามหลักคือ: เมื่อเรามีปริภูมิย่อยปิดและการวัดระยะทางแบบ L^2 จุดที่ใกล้ที่สุดในปริภูมิย่อยคืออะไร. คำตอบจะอธิบายการปรับเส้นตรงให้เข้ากับข้อมูลที่มีเสียงรบกวน และจะเชื่อมกลับมาที่เสียงกับภาพในบทนี้.

สัญญา · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 3

เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต: การฉายและกำลังสองน้อยที่สุด

สถานการณ์สมมติ: เส้นที่ลากผ่านข้อมูล

สมมติว่าแอปนับก้าวบันทึกการเดินของเราสิบช่วง. ในแต่ละช่วง มันรายงานจำนวนก้าวเป็นพันก้าว และรายงานระยะทางที่ประมาณได้เป็นกิโลเมตร. ถ้าเซนเซอร์เที่ยงตรง ระยะทางควรเป็นสัดส่วนกับจำนวนก้าว บวกค่าออฟเซตเล็ก ๆ จากจุดเริ่มต้น. แต่เซนเซอร์จริงมีเสียงรบกวน: สองช่วงที่เดินใกล้กันอาจได้ตัวเลขต่างกันเล็กน้อย.

แอปจึงไม่ได้ลากเส้นผ่านทุกจุด เพราะไม่มีเส้นตรงเส้นเดียวที่ผ่านสิบจุดพร้อมกันได้. มันเลือกเส้นที่ทำให้ผลรวมของกำลังสองของระยะห่างแนวตั้งจากจุดถึงเส้นเล็กที่สุด. นี่คือการ*ประมาณ* ไม่ใช่การประมาณค่าในช่วงให้ผ่านทุกจุด. คำถามคือ เราจะอธิบาย “เส้นที่ใกล้ที่สุด” นี้ด้วยเรขาคณิตได้อย่างไร, และทำไมมันจึงเป็นคำตอบที่คำนวณได้ด้วยระบบสมการเชิงเส้น.

ปลายบทจะเกิดเรื่องหนึ่ง: มีจุดหนึ่งหลุดออกไปไกล เพราะโทรศัพท์ถูกทำตกกลางการเดิน. เส้นที่ลากใหม่เอียงไปทั้งเส้น. เราจะเห็นในหัวข้อ 3.3.5 ว่าข้อมูลผิดหนึ่งจุดดึงเส้นทั้งเส้นได้ เพราะเส้นตรงมีอิสระน้อยเกินกว่าจะเพิกเฉยต่อจุดนั้น และการฉายแบบกำลังสองน้อยที่สุดต้องประนีประนอมทุกจุดพร้อมกัน.

สถานการณ์ทั้งหมดเป็นสถานการณ์สมมติ. ตัวเลขทุกตัวที่อ้างในบทนี้มาจากโค้ดของเราและมีแบบทดสอบยืนยัน.

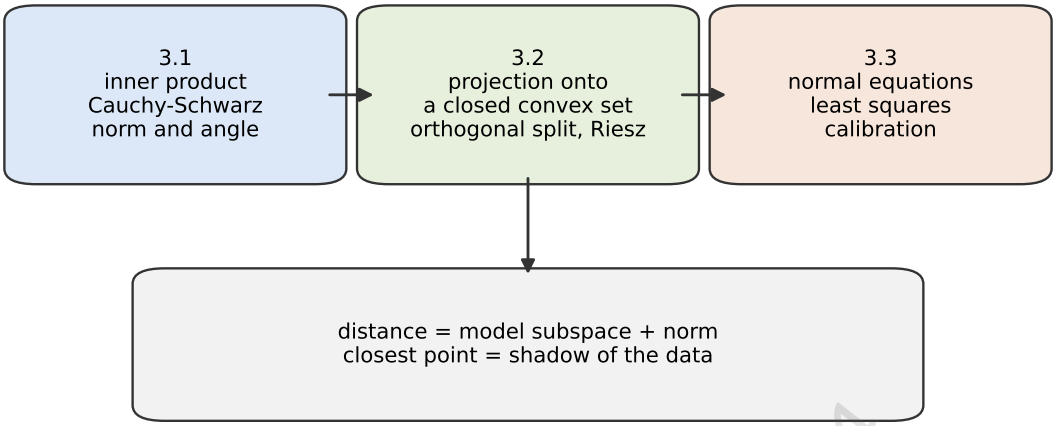
ภาพรวมบท

บทนี้เปลี่ยนจาก “ขนาด” ไปสู่ “มุม” และ “เงา”. ผลคูณภายในให้ทั้งความยาวและมุม. เมื่อมีมุม เราถามได้ว่าจุดหนึ่งอยู่ใกล้ปริภูมิย่อยแค่ไหน และจุดที่ใกล้ที่สุดคือจุดใด. เมื่อปริภูมิปิดภายใต้ลิมิต คำตอบคือ**การฉายเชิงตั้งฉาก** (orthogonal projection): ลากเส้นจากจุดนั้นลงมาตั้งฉากกับปริภูมิย่อย.

ภาพที่ต้องจำมีสามชั้น. ชั้นแรกคือข้อมูล ซึ่งเป็นเวกเตอร์ในปริภูมิมิติสูง. ชั้นที่สองคือ**ปริภูมิแบบจำลอง** (model subspace) ซึ่งเป็นเซตของคำตอบที่เรายอมรับ เช่น เส้นตรงทั้งหมด. พูดง่าย ๆ มันคือเซตของคำตอบทุกแบบที่แบบจำลองของเราสร้างได้. ชั้นที่สามคือการวัดระยะจากข้อมูลถึงปริภูมิแบบจำลอง. การเลือกปริภูมิและเลือกนอร์มคือการเลือกว่าคำตอบแบบใด “ดีที่สุด”.

ลำดับของบทคือ: สร้างผลคูณภายในและนอร์มในหัวข้อ 3.1, พิสูจน์ทฤษฎีบทการฉายและทฤษฎีบทการแทนของเฟรเชต์–รีสซ์ในหัวข้อ 3.2, แล้วใช้ทั้งสองอย่างเขียนสมการปรกติและแก้ปัญหากำลังสองน้อยที่สุดในหัวข้อ 3.3. ปลายบทเราจะกลับมาที่เส้นเอียงจากจุดที่ผิดปกติหนึ่งจุด.

สปันเรียง. Preprint. 2026-10-24



รูปที่ 3.1: แผนผังของบทนี้. หัวข้อ 3.1 สร้างผลคูณภายในและนอร์ม; หัวข้อ 3.2 พิสูจน์การฉายและรีสซ์; หัวข้อ 3.3 ใช้การฉายเขียนสมการปรกติและแก้ปัญหากำลังสองน้อยที่สุด (สร้างจาก `code/funkana/ch03.py`).

3.1 เรขาคณิตของผลคูณภายในและมุม

ในบทว่าด้วยระยะทางและนอร์ม เราเห็นแล้วว่านอร์มวัดความยาวของเวกเตอร์ได้. แต่ความยาวอย่างเดียวยังไม่บอกว่าเวกเตอร์สองตัว “ไปทางเดียวกัน” แค่ไหน. **ผลคูณภายใน** (inner product) คือการคูณเวกเตอร์สองตัวให้จำนวนหนึ่ง; จำนวนนี้บอกทั้งความยาวและมุม. เมื่อมีมุม เราก็มีคำว่า**ตั้งฉาก** (orthogonal) ซึ่งหมายถึงทำมุมฉากกัน และมีเครื่องมือสำหรับหาจุดที่ใกล้ที่สุด.

นิยาม 3.1.1: ผลคูณภายใน

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{K}$ โดย $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$. การส่ง

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

เรียกว่า**ผลคูณภายใน** (inner product; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”) ถ้าสำหรับทุก $x, x_1, x_2, y \in X$ และทุก $\lambda \in \mathbb{K}$ มี

(IP1) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;

(IP2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(IP3) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(IP4) $\langle x, x \rangle \geq 0$;

(IP5) $\langle x, x \rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$.

คู่ $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ เรียกว่า**ปริภูมิผลคูณภายใน** (inner product space).

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

- (IP1) และ (IP2) บอกว่าเมื่อตรึงช่องที่สองไว้ ผลคูณภายในเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในช่องแรก. เราดึงผลบวกและสเกลาร์ออกมาได้ตามปกติ.
- (IP3) บอกว่าเมื่อสลับช่อง ตัวเลขที่ได้เป็นสังยุคของตัวเดิม. ในกรณีจริง สังยุคไม่มีผล จึงได้สมมาตร $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
- (IP4) และ (IP5) บอกว่าค่าของเวกเตอร์กับตัวเองไม่ติดลบ และเป็นศูนย์เฉพาะเวกเตอร์ศูนย์. นี่คือเหตุผลที่ถอดรากที่สองแล้วได้ความยาวจริง ๆ.
- ตัวอย่าง: บน $\mathbb{R}^2$ ใช้ $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. นี่เป็นผลคูณภายใน เพราะน้ำหนัก $2, 3$ เป็นบวก. แต่ $x_1y_1 - x_2y_2$ ไม่ใช่ เพราะ $\langle (0,1), (0,1)\rangle = -1 < 0$.

ผลคูณภายในที่เราจะใช้บ่อยมีสามแบบ. แบบแรกคือผลคูณภายในแบบยุคลิดบน $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

แบบที่สองคือผลคูณภายในบนปริภูมิฟังก์ชัน $L^2([0,1])$:

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

แบบที่สามคือผลคูณภายในถ่วงน้ำหนักบน $\mathbb{R}^2$ ที่ใช้ใน easy box ข้างบน. ทั้งสามแบบมีโครงสร้างเดียวกัน แต่ให้ค่าและมุมต่างกัน.

ปริภูมิ	ผลคูณภายใน	ตัวอย่าง
$\mathbb{C}^n$	$\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}$	เวกเตอร์พิกัด n ช่อง
$L^2([0,1])$	$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$	สัญญาณหรือภาพที่มองเป็นฟังก์ชัน
$C([0,1])$	$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$	ฟังก์ชันต่อเนื่อง (ลิมิตอาจหลุดออกนอกปริภูมิ)

ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างปริภูมิพิกัด $\mathbb{R}^n$ หรือ $\mathbb{C}^n$ กับ L^2 ไม่ได้อยู่ที่สูตร แต่อยู่ที่ว่าลิมิตของลำดับ Cauchy ต้องอยู่ในปริภูมิหรือไม่. ปริภูมิ $C([0,1])$ ของฟังก์ชันต่อเนื่องพร้อมผลคูณภายใน L^2 มีโครงสร้างผลคูณภายในครบทุกข้อ. แต่ลิมิตของบางลำดับ Cauchy หลุดออกนอกปริภูมิ: ลำดับ

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ n\big(t - \frac{1}{2}\big), & \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกตัว และเป็นลำดับ Cauchy ในนอร์ม L^2. ลิมิตของมันใน L^2 คือฟังก์ชันขั้นบันได $\mathbf{1}_{(1/2,1]}$ ซึ่งไม่เท่ากับฟังก์ชันต่อเนื่องใดเกือบทุกแห่ง. ดังนั้นลิมิตไม่ได้อยู่ใน $C([0,1])$. **การทำให้บริบูรณ์** (completion; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”) คือการเติมลิมิตทั้งหมดเข้าไป; ผลลัพธ์สำหรับ $C([0,1])$ คือ $L^2([0,1])$. นี่คือเหตุผลที่เราต้องแยกปริภูมิที่มีผลคูณภายในออกจากปริภูมิที่ปิดภายใต้ลิมิต Cauchy อย่างจริงจัง.

สัมมนา Preprint 2026-10-24

การเป็นลำดับ Cauchy ตรวจได้จากพื้นที่ใต้กราฟของผลต่าง. ถ้า $n > m$ แล้ว f_n กับ f_m ต่างกันเฉพาะบนช่วง $(1/2, 1/2 + 1/m)$ ซึ่งยาว $1/m$, และค่าของผลต่างไม่เกิน 1. เพราะฉะนั้น

$$\|f_n - f_m\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{m}.$$

เมื่อ $m \to \infty$ ขอบเขตนี้ลู่เข้าศูนย์. ลำดับจึงเป็น Cauchy แต่ลิมิตใน L^2 ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง.

นิยาม 3.1.2: นอร์ม (ทบทวน)

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{K}$. ฟังก์ชัน $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ เป็น**นอร์ม** (norm; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”) ถ้าสำหรับทุก $x, y \in X$ และทุก $\lambda \in \mathbb{K}$ มี

(N1) $\|x\| \ge 0$ และ $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$;

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$;

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

ผลคูณภายในสร้างนอร์มได้ทันที: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. ข้อ (IP4) ทำให้ค่ารากที่สองมีความหมาย และ (IP5) ทำให้ได้ (N1). ข้อ (N2) มาจาก (IP2) และ (IP3). เหลือเพียงอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม ซึ่งต้องใช้อสมการโคชี–ชวาร์ซ.

ทฤษฎีบท 3.1.1: อสมการโคชี–ชวาร์ซ

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน. แล้วสำหรับทุก $x, y \in X$,

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle.$$

ความเท่ากันเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ x กับ y พึ่งพาเชิงเส้น.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า $y = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. ถ้า $y \neq 0$ เราเลือกสเกลาร์ λ ที่ทำให้ $x - \lambda y$ ตั้งฉากกับ y. แล้วใช้ข้อเท็จจริงว่าความยาวกำลังสองของเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ศูนย์ต้องไม่ติดลบ.

1. **กรณี $y = 0$.** จาก (IP3) และ (IP2) กับ $\lambda = 0$ ได้ $\langle x, 0\rangle = \overline{\langle 0, x\rangle} = 0$; และ (IP5) ให้ $\langle 0, 0\rangle = 0$. อสมการจึงเป็น $0 \le 0$. เวกเตอร์ศูนย์พึ่งพาเชิงเส้นกับ x ทุกตัว.

2. **กรณี $y \neq 0$.** ให้

$$\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.$$

จาก (IP2) และ (IP3),

$$\langle x - \lambda y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

ดังนั้น $x - \lambda y$ ตั้งฉากกับ y. กระจายความยาวกำลังสอง:

$$\|x\|^2 = \|(x - \lambda y) + \lambda y\|^2 = \|x - \lambda y\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2.$$

เพราะ $\|x - \lambda y\|^2 \ge 0$ จึงได้

$$\|x\|^2 \ge |\lambda|^2\|y\|^2 = \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

คูณด้วย $\|y\|^2 > 0$ แล้วได้อสมการที่ต้องการ.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

3. **เงื่อนไขความเท่ากัน.** ในขั้นที่แล้ว ความเท่ากันเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $\|x - \lambda y\|^2 = 0$ นั่นคือ $x = \lambda y$. ในกรณี $y = 0$ ความเท่ากันเกิดขึ้นเพราะทั้งสองข้างเป็นศูนย์ และ $x, 0$ พึ่งพาเชิงเส้นกัน. ดังนั้นความเท่ากันเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ x กับ y พึ่งพาเชิงเส้น.

สรุป: เราเลือก λ ให้ $x - \lambda y$ ตั้งฉากกับ y; พีทาโกรัสแบบกระจายให้ $\|x\|^2 = \|x - \lambda y\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2$, และพจน์แรกที่ไม่ติดลบให้อสมการ. □

อสมการโคชี–ชวาร์ซมีความหมายเชิงเรขาคณิตตรง ๆ: ถ้า $x, y \neq 0$ แล้ว

$$0 \leq \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} \leq 1.$$

ในกรณีจริง ค่าที่ไม่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์คือ $\cos\theta$ ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง. อสมการจึงบอกว่าโคไซน์ไม่มีทางหลุดออกนอกช่วง $[-1, 1]$. ความเท่ากันแปลว่าเวกเตอร์อยู่บนเส้นเดียวกัน: มุมเป็น 0 หรือ π. ในกรณีเชิงซ้อน $\langle x, y\rangle/(\|x\|\,\|y\|)$ อาจไม่เป็นจำนวนจริง จึงไม่มี “มุม” แบบมีเครื่องหมายจากเศษส่วนนี้; เราใช้เพียงขนาดของมันซึ่งไม่เกินหนึ่ง.

ลองเอง: โคชี–ชวาร์ซใน L^2

ให้ $f(t) = 1$ และ $g(t) = t$ บน $[0, 1]$ กับผลคูณภายใน L^2. จงคำนวณทั้งสองข้างของอสมการโคชี–ชวาร์ซ.

เรามี

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}, \qquad \|f\|_{L^2} = 1, \quad \|g\|_{L^2} = \left(\int_0^1 t^2\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

อสมการจึงเป็น

$$\frac{1}{2} \leq 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774,$$

ซึ่งเป็นจริงและไม่ใช่ความเท่ากัน เพราะ f กับ g ไม่ได้เป็นสัดส่วนกัน. ตัวเลขนี้ยืนยันด้วยแบบทดสอบในโค้ด.

บทตั้ง 3.1.2: นอร์มที่เกิดจากผลคูณภายใน

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีผลคูณภายใน และ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. แล้ว $\|\cdot\|$ เป็นนอร์มบน X.

พิสูจน์. **แนวคิด.** สองข้อแรกมาจากสัจพจน์ของผลคูณภายในโดยตรง. ข้อสามใช้โคชี–ชวาร์ซเพื่อควบคุมพจน์กลางของการกระจาย.

1. **ภาวะเป็นบวกและความแน่นอน.** $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \geq 0$ ตาม (IP4), และ $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x, x\rangle = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ ตาม (IP5).

2. **ภาวะเอกพันธุ์.** จาก (IP2) และ (IP3),

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2\|x\|^2.$$

   ถอดรากที่สองที่ไม่ติดลบทั้งสองข้างได้ $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

3. **อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม.** กระจาย

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

โดยโคชี–ชวาร์ซ, $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$. เพราะฉะนั้น

$$\|x+y\|^2 \le (\|x\|+\|y\|)^2.$$

ทั้งสองข้างไม่ติดลบ จึงถอดรากที่สองได้ $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$.

สรุป: สัจพจน์ของผลคูณภายในให้ (N1) และ (N2); โคชี–ชวาร์ซให้ (N3). □

นิยาม 3.1.3: ปริภูมิพรีฮิลเบิร์ตและปริภูมิฮิลเบิร์ต

ให้ $(X,\|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์ม. ถ้าบน X มีผลคูณภายในซึ่งทำให้ $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ สำหรับทุก $x\in X$ เราจะเรียก X ว่า**ปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต** (pre-Hilbert space; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”). ถ้าเพิ่มเงื่อนไขว่าทุกลำดับ Cauchy ใน X ลู่เข้าใน X ด้วย เราจะเรียก X ว่า**ปริภูมิฮิลเบิร์ต** (Hilbert space); คำว่า**บริบูรณ์** (complete) หมายถึงเงื่อนไขเพิ่มเติมข้อนี้.

คำว่า “บริบูรณ์” ในที่นี้หมายถึงทุกลำดับ Cauchy ลู่เข้าในปริภูมิ. เราศึกษาการทำให้บริบูรณ์ในบทว่าด้วยระยะทางและนอร์มแล้ว. ตัวอย่างสำคัญคือ $C([0,1])$ ที่ใช้ผลคูณภายใน L^2: มันเป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต แต่ไม่บริบูรณ์ เพราะลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องสามารถลู่เข้า (ในนอร์ม L^2) ไปยังฟังก์ชันขั้นบันไดที่ไม่ต่อเนื่อง. การทำให้บริบูรณ์ของมันคือ $L^2([0,1])$ (ยอมรับ; ตามความหนาแน่นของ $C([0,1])$ ใน L^2).

นิยาม 3.1.4: การตั้งฉาก

ในปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต X เรากล่าวว่า x ตั้งฉากกับ y เมื่อ $\langle x,y\rangle=0$ และเขียน $x\perp y$; คำว่า**เชิงตั้งฉาก** (ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”) ใช้เรียกความสัมพันธ์นี้. ถ้าสมาชิกทุกตัวของ $A\subset X$ ตั้งฉากกับสมาชิกทุกตัวของ $B\subset X$ เรากล่าวว่า A ตั้งฉากกับ B และเขียน $A\perp B$.

ทฤษฎีบท 3.1.3: ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ให้ X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต และ $x,y\in X$ กับ $x\perp y$. แล้ว

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** กระจาย $\|x+y\|^2$ แล้วใช้ $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle=0$.

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\|y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

พจน์กลางสองพจน์เป็นศูนย์เพราะ $x\perp y$.

สรุป: เมื่อสองส่วนตั้งฉากกัน ความยาวกำลังสองของผลบวกคือผลบวกของความยาวกำลังสอง. □

ใน $\mathbb{R}^2$ ให้ $x=(3,4)$ และ $y=(-4,3)$. แล้ว $\langle x,y\rangle=-12+12=0$ จึงตั้งฉากกัน. ทฤษฎีบทพีทาโกรัสให้ $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2=25+25=50$. ตรวจตรง ๆ: $x+y=(-1,7)$ และ $\|x+y\|^2=1+49=50$. ตัวอย่างเล็ก ๆ นี้แสดงว่า “ตั้งฉาก” ไม่ได้แปลว่า “ห่างกัน” แต่แปลว่าส่วนประกอบของเวกเตอร์ทั้งสองไม่ปนกัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 3.1.4: เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและบทกลับ

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม. แล้ว X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต (กล่าวคือมีผลคูณภายในที่สร้างนอร์มเดิม) ก็ต่อเมื่อ

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \qquad \text{สำหรับทุก } x,y\in X.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เริ่มด้วยการกระจาย $\|x\pm y\|^2$ สองครั้งแล้วบวกกัน. สำหรับบทกลับ เราจะใช้สูตรโพลาไรเซชันสร้างผลคูณภายในจากนอร์ม แล้วตรวจสัจพจน์. ขั้นตอนโดยละเอียดอยู่ในตำรา; ที่นี่เขียนเฉพาะโครงที่ตรวจตามได้.

1. **จากผลคูณภายในไปยังเอกลักษณ์.** ถ้ามีผลคูณภายในที่สร้างนอร์ม แล้ว
$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2,$$
และ
$$\|x-y\|^2=\|x\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2.$$
บวกกันแล้วพจน์กลางหักล้าง เหลือ $2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

2. **จากเอกลักษณ์กลับมาที่ผลคูณภายใน เมื่อสนามสเกลาร์เป็นจริง.** สมมติเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน. นิยาม
$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big).$$
การกระจายเอกลักษณ์ที่ใช้กับ x_1+x_2 และ y แสดงว่าการส่งนี้บวกได้ในช่องแรก; การใช้เอกลักษณ์ซ้ำกับ x และ y แสดงว่ามันเป็นเชิงเส้นในช่องแรก. ความสมมาตรได้จากการสลับ x,y และใช้ $\|y-x\|=\|x-y\|$. ค่าของ $\langle x,x\rangle$ คือ $\|x\|^2$ จึงได้ (IP4) และ (IP5).

3. **เมื่อสเกลาร์เป็นจำนวนเชิงซ้อน.** ใช้สูตร
$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)+\frac{i}{4}\big(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\big).$$
ส่วนจริงให้ผลคูณภายในจริงตามขั้นที่แล้ว. การตรวจว่า $\langle ix,y\rangle=i\langle x,y\rangle$ ใช้เอกลักษณ์กับ $x+iy$ และ $x-iy$; จากนั้นขยายสเกลาร์เชิงซ้อนเป็น $a+ib$. เราได้ผลคูณภายในที่สร้างนอร์มเดิม.

สรุป: เมื่อมีผลคูณภายในอยู่แล้ว การกระจายนอร์มให้เอกลักษณ์ทันที. ถ้าเอกลักษณ์เป็นจริงทุกคู่เวกเตอร์ สูตรโพลาไรเซชันจะสร้างผลคูณภายในที่ให้นอร์มเดิม. การตรวจสัจพจน์อย่างละเอียดอยู่ใน Werner หน้า 203–204. □

เพื่อเห็นว่าเอกลักษณ์นี้มีเนื้อหา ลองตรวจใน $\ell^1(\mathbb{R}^2)$. ให้ $x=(1,0)$ และ $y=(0,1)$. แล้ว
$$\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=2^2+2^2=8,$$
แต่
$$2\|x\|_1^2+2\|y\|_1^2=2+2=4.$$
เอกลักษณ์จึงไม่จริง. นอร์ม ℓ^1 ไม่ได้มาจากผลคูณภายใน. ในทางกลับกัน ถ้าเอกลักษณ์เป็นจริงทุกคู่เวกเตอร์ ทฤษฎีบทบอกว่าเราสามารถสร้างผลคูณภายในขึ้นมาได้ และนอร์มเดิมจะกลับมาเป็นนอร์มที่สร้างจากผลคูณภายในนั้น.

ใน $\ell^\infty(\mathbb{R}^2)$ ก็ล้มเหลวเช่นกัน: สำหรับ $x=(1,0)$ และ $y=(0,1)$,
$$\|x+y\|_\infty^2+\|x-y\|_\infty^2=1+1=2, \qquad 2\|x\|_\infty^2+2\|y\|_\infty^2=2+2=4.$$
ทั้งสองตัวอย่างชี้ให้เห็นว่า “นอร์มที่ดี” ไม่ได้มีทุกแบบ. เรขาคณิตแบบมุมฉากกับการฉายเป็นของเฉพาะนอร์มที่มาจากผลคูณภายใน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย: ตรวจว่านอร์มมาจากผลคูณภายในหรือไม่

- ขั้นแรก: เลือกเวกเตอร์สองตัวที่คำนวณง่าย แล้วตรวจเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน. ถ้าล้มเหลวครั้งเดียว ก็สรุปได้ว่านอร์มนั้นไม่มาจากผลคูณภายใน.
- ขั้นที่สอง: ถ้าเอกลักษณ์เป็นจริงทุกคู่ที่ลอง ให้ใช้สูตรโพลาไรเซชันสร้างผลคูณภายในขึ้นมา.
- ขั้นที่สาม: ตรวจสัจพจน์ทั้งห้าของผลคูณภายใน. ในทางปฏิบัติ เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นตัวตัดสินที่เร็วที่สุด.

ข้อควรระวัง: กึ่งนอร์มไม่ใช่ผลคูณภายใน

ถ้าเราเพียงต้องการ “กึ่งบวกแน่นอน” คือยอมให้ $\langle x, x\rangle = 0$ กับเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ศูนย์ได้ แล้ว $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ เป็นเพียง**กึ่งนอร์ม** (seminorm; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”): มันยังมีภาวะเอกพันธ์และอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม แต่มีเวกเตอร์ที่ไม่ใช่ศูนย์ซึ่งมีความยาวศูนย์. ในกรณีนั้น $\langle x, x\rangle = 0$ ไม่ได้บังคับ $x = 0$ และการฉายอาจไม่เพียงหนึ่งเดียว. บทนี้ใช้คำว่า “ผลคูณภายใน” ในความหมายบวกแน่นอนตาม (IP5) เท่านั้น. ถ้าเจอข้อความที่ใช้เพียงกึ่งบวกแน่นอน ให้ตรวจชื่อทฤษฎีบทให้ดี: ผลที่ได้จะเป็นสมบัติของกึ่งนอร์ม ไม่ใช่ของนอร์ม.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน

สูตรในบทพิสูจน์มีชื่อว่า**เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน** (polarization identity). ในกรณีจริงมันเขียนได้เป็น

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big).$$

สูตรนี้บอกว่าถ้าเรารู้ความยาวของผลบวกและผลต่างของเวกเตอร์ทุกคู่ เราก็รู้ผลคูณภายในทั้งหมด. พูดอีกอย่างคือผลคูณภายในไม่ใช่ข้อมูลใหม่ที่เป็นอิสระจากนอร์ม; มันถูกกำหนดโดยนอร์มเมื่อนอร์มนั้นมาจากผลคูณภายใน. ในกรณีเชิงซ้อน ต้องใช้ความยาวของ $x + iy$ และ $x - iy$ เพิ่มอีกสองค่า เพื่อแยกส่วนจินตภาพออกจากส่วนจริง.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไมเรียงช่องแบบนี้

หนังสือเล่มนี้ใช้ผลคูณภายในที่เป็นเชิงเส้นในช่องแรกและเชิงเส้นสังยุคในช่องที่สอง. บางตำราใช้ตรงกันข้าม. ทั้งสองแบบให้เรขาคณิตเดียวกัน แต่สูตรอย่าง $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ กับ $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$ จะสลับที่กัน. เราต้องเลือกแบบหนึ่งแล้วใช้ให้สม่ำเสมอ เพราะทฤษฎีบทการแทนของเฟรเชต์–รีสซ์ในหัวข้อ 3.2 จะเขียนฟังก์ชันนัลเป็น $\langle x, y\rangle$ โดยมี y อยู่ช่องที่สอง. ถ้าเปลี่ยนแบบกลางทาง สูตรจะติดสังยุคผิดตำแหน่ง.

ร่างต้น Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 3.1.5: ความต่อเนื่องของผลคูณภายใน

ให้ X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต. ถ้า $x_n \to x$ และ $y_n \to y$ ใน X แล้ว $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แทรกและลบ $\langle x, y\rangle$ สองครั้ง แล้วใช้โคชี–ชวาร์ซกับแต่ละผลต่าง. ลำดับที่ลู่เข้าต้องมีขอบเขต.

1. เขียน
$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle.$$
2. ใช้โคชี–ชวาร์ซ,
$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\|.$$
3. ลำดับ (y_n) ลู่เข้าจึงมีขอบเขต M. เทอมแรกมีขอบเขต $\|x_n - x\|M$ และเทอมที่สองมีขอบเขต $\|x\|\,\|y_n - y\|$. ทั้งสองเทอมลู่เข้าศูนย์.

สรุป: ผลคูณภายในต่อเนื่องเพราะควบคุมผลต่างได้ด้วยผลคูณของระยะทางในสองช่อง. □

บทตั้ง 3.1.6: บทตั้งความหนาแน่น

ให้ X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยที่หนาแน่น และ $x \in X$ กับ $\langle x, u\rangle = 0$ สำหรับทุก $u \in U$. แล้ว $x = 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือก $u_n \in U$ ที่ลู่เข้า x. ความต่อเนื่องของผลคูณภายในทำให้ $\langle x, x\rangle$ เป็นลิมิตของ $\langle x, u_n\rangle = 0$.

เพราะ U หนาแน่น มีลำดับ $u_n \in U$ ที่ $u_n \to x$. โดยบทตั้งความต่อเนื่อง,

$$\langle x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, u_n\rangle = 0.$$

จาก (IP5) ได้ $x = 0$.

สรุป: เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเซตหนาแน่นต้องเป็นศูนย์. □

ทฤษฎีบท 3.1.7: ปริภูมิย่อย การทำให้บริบูรณ์ และมิติสอง

(a) ปริภูมินอร์ม X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต ก็ต่อเมื่อปริภูมิย่อยสองมิติทุกตัวของ X เป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต.

(b) ปริภูมิย่อยของปริภูมิพรีฮิลเบิร์ตเป็นปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต.

(c) การทำให้บริบูรณ์ของปริภูมิพรีฮิลเบิร์ตเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต.

พิสูจน์. **แนวคิด.** (b) ทำได้โดยจำกัดผลคูณภายในลงบนปริภูมิย่อย. (a) ใช้เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน: เวกเตอร์สองตัวอยู่ในปริภูมิย่อยสองมิติเดียวกันเสมอ. (c) ขยายผลคูณภายในด้วยความต่อเนื่องไปยังการทำให้บริบูรณ์.

1. **(b).** ถ้า $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ X มีผลคูณภายใน เราจำกัดการส่งลงบน $Y \times Y$. สัจพจน์ทั้งห้ายังเป็นจริง เพราะการบวกและการคูณสเกลาร์ใน Y เป็นแบบเดียวกับใน X. เมื่อวัดความยาวด้วยผลคูณภายในที่ตัดมา จะได้ค่าเดียวกับที่วัดในปริภูมิใหญ่.
2. **(a) เมื่อมีผลคูณภายในอยู่แล้ว.** ปริภูมิย่อยสองมิติย่อมได้รับโครงสร้างนั้นโดยการจำกัด (ข้อ (b)).

สัมมนา · Preprint · 2026-10-21

3. **(a) ทิศกลับ.** สมมติปริภูมิย่อยสองมิติทุกตัวเป็นพรีฮิลเบิร์ต. ให้ $x, y \in X$. ปริภูมิย่อย $E = \operatorname{span}\{x, y\}$ มีมิติไม่เกินสอง. ถ้ามิติเป็นสอง มันเป็นพรีฮิลเบิร์ตตามสมมติ; ถ้ามิติเป็นศูนย์หรือหนึ่ง เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตรวจได้ตรง ๆ. ดังนั้นเอกลักษณ์เป็นจริงใน E สำหรับ x, y. โดยทฤษฎีบทเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานและบทกลับ, X เป็นพรีฮิลเบิร์ต.

4. **(c).** เขียน $\widehat{X}$ สำหรับผลของการทำให้บริบูรณ์ X. ผลคูณภายในเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $X \times X$ ตามบทตั้งความต่อเนื่องจึงขยายได้อย่างเดียวไปยัง $\widehat{X} \times \widehat{X}$ โดยใช้ลิมิตของลำดับ Cauchy. สัจพจน์ทั้งห้ายังคงจริงเพราะทั้งสองข้างต่อเนื่อง. นอร์มที่ได้คือการขยายนอร์มเดิม และ $\widehat{X}$ บริบูรณ์โดยการสร้าง.

สรุป: สรุป: (b) จำกัดโครงสร้าง, (a) ตรวจเอกลักษณ์บนปริภูมิสองมิติ, (c) ขยายผลคูณภายในด้วยความต่อเนื่อง. การพิสูจน์ (c) อย่างละเอียดอยู่ใน Werner หน้า 205. □

ข้อ (c) สำคัญเพราะเรามักทำงานกับปริภูมิที่ไม่บริบูรณ์ก่อน แล้วค่อยเติมลิมิตเข้าไป. ตัวอย่างเช่น ปริภูมิของพหุนามบน $[0, 1]$ กับผลคูณภายใน L^2 เป็นพรีฮิลเบิร์ต แต่ไม่บริบูรณ์. การทำให้บริบูรณ์ของมันคือ $L^2([0, 1])$ (ยอมรับ; ตามความหนาแน่นของพหุนามใน L^2). เมื่อเติมลิมิตแล้ว ผลคูณภายในยังต่อเนื่องและยังสร้างนอร์มเดิมบนปริภูมิใหม่. นี่คือเหตุผลที่เราสามารถพูดถึง “การฉายใน L^2” ได้แม้เมื่อคำตอบที่ใกล้ที่สุดไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง.

ตัวอย่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตที่เราจะใช้ต่อไปมีสองแบบหลัก. แบบแรกคือ $\mathbb{R}^n$ หรือ $\mathbb{C}^n$ พร้อมผลคูณภายในแบบยุคลิด ซึ่งบริบูรณ์เพราะมิติจำกัด. แบบที่สองคือ $L^2(\mu)$ ซึ่งบริบูรณ์ตามทฤษฎีบทฟิชเชอร์–ริสซ์ที่เราเห็นในบทว่าด้วยปริภูมิ L^p. ทั้งสองแบบมีผลคูณภายในและมีมุม. แต่ปริภูมิพิกัดเหมาะกับการคำนวณที่มีพิกัดจำนวนจำกัด ส่วน L^2 เหมาะกับสัญญาณและภาพซึ่งเป็นฟังก์ชัน.

ลองเอง: มุมระหว่างเวกเตอร์สองตัว

ใน $\mathbb{R}^3$ ให้ $x = (1, 2, 2)$ และ $y = (2, 0, 1)$. จงหา $\langle x, y\rangle$, $\|x\|$, $\|y\|$, ค่า $\cos\theta$ และมุม θ.

คำนวณได้

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 4, \qquad \|x\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \qquad \|y\| = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}.$$

ดังนั้น

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{4}{3\sqrt{5}} \approx 0.5963, \qquad \theta \approx 53.40^\circ.$$

อสมการโคชี–ชวาร์ซบอกว่า $4 \le 3\sqrt{5} \approx 6.708$, ซึ่งเป็นจริง. ตัวเลขเหล่านี้มาจากโค้ดของบทและมีแบบทดสอบยืนยัน.

ลองเอง: เงาของ y บนเส้นของ x

ใช้ $x = (1, 2, 2)$ และ $y = (2, 0, 1)$ จากกล่องก่อน. จงหาจุด p บนเส้น $\operatorname{span}\{x\}$ ที่ใกล้ y ที่สุด แล้วตรวจว่า $y - p$ ตั้งฉากกับ x.

จุดที่ใกล้ที่สุดบนเส้นคือการฉาย

$$p = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = \frac{4}{9}(1, 2, 2) = \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

ค่าตกค้างคือ

$$y - p = \left(2 - \frac{4}{9}, 0 - \frac{8}{9}, 1 - \frac{8}{9}\right) = \left(\frac{14}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ตรวจการตั้งฉาก:

$$\langle y-p, x\rangle = \frac{14}{9} - \frac{16}{9} + \frac{2}{9} = 0.$$

นอกจากนี้ $\|p\|^2 = 144/81 = 16/9$ และ $\|y-p\|^2 = 261/81 = 29/9$ ดังนั้น $\|p\|^2 + \|y-p\|^2 = 45/9 = 5 = \|y\|^2$. นี่คือพีทาโกรัส: การแยก $y = p + (y-p)$ เป็นส่วนที่อยู่ในเส้นกับส่วนที่ตั้งฉากกับเส้น. หัวข้อ 3.2 จะพิสูจน์ว่าการแยกแบบนี้มีเพียงหนึ่งเดียวในปริภูมิฮิลเบิร์ต.

ขั้นตอนที่ใช้ซ้ำตลอดบทนี้มีสามอย่าง. อย่างแรก: หาความยาวด้วย $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. อย่างที่สอง: ในปริภูมิจริง หามุมด้วย $\cos\theta = \langle x, y\rangle / (\|x\|\,\|y\|)$. อย่างที่สาม: หา “เงา” ของ y บนเส้นที่เกิดจาก x ด้วยสัมประสิทธิ์ $\langle y, x\rangle / \langle x, x\rangle$. ทั้งสามอย่างใช้ข้อมูลเดียวกันคือผลคูณภายใน. เมื่อเราขยายจากเส้นหนึ่งเส้นไปยังปริภูมิย่อยหลายมิติ งานจะกลายเป็นการแก้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งคือหัวใจของหัวข้อ 3.3.

ข้อควรระวัง

- ในกรณีเชิงซ้อน ลำดับของช่องสำคัญ: $\langle x, y\rangle$ เป็นเชิงเส้นใน x และเชิงเส้นสังยุคใน y. ถ้าสลับช่องจะได้ค่าสังยุค ไม่ใช่ค่าเดิม.
- ความเท่ากันในอสมการโคชี–ชวาร์ซไม่ได้แปลว่า $x = y$; มันแปลว่า x กับ y อยู่บนเส้นเดียวกัน (หรือตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์).
- เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่จริงในทุกปริภูมินอร์ม. ตัวอย่างเช่น $\ell^1(\mathbb{R}^2)$ ไม่ได้มาจากผลคูณภายใน. นี่คือเหตุผลที่เราแยก “ปริภูมินอร์ม” กับ “ปริภูมิฮิลเบิร์ต”.
- ℓ^2 กับ L^2 ใช้สัญลักษณ์คล้ายกัน แต่เป็นคนละปริภูมิ: ℓ^2 คือลำดับหรือเวกเตอร์มิติจำกัด ส่วน L^2 คือฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้.

สรุปใจความ

- ผลคูณภายในให้ความยาว $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; ในปริภูมิจริง มุมมาจาก $\cos\theta = \langle x, y\rangle / (\|x\|\,\|y\|)$.
- อสมการโคชี–ชวาร์ซควบคุมผลคูณภายในด้วยผลคูณของความยาว และเป็นเครื่องมือหลักของอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม.
- ปริภูมิฮิลเบิร์ตคือปริภูมิพรีฮิลเบิร์ตที่บริบูรณ์; L^2 เป็นตัวอย่างสำคัญ และ $C([0,1])$ กับนอร์ม L^2 ยังไม่บริบูรณ์.
- เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นเครื่องหมายว่าปริภูมินอร์มหนึ่งมาจากผลคูณภายใน.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $x = (2, 1, 2)$ และ $y = (1, -2, 2)$ ใน $\mathbb{R}^3$ กับผลคูณภายในมาตรฐาน. จงคำนวณ $\langle x, y\rangle$, $\|x\|$, $\|y\|$, $\cos\theta$ และมุม θ แล้วตรวจอสมการโคชี–ชวาร์ซ.

2. จงแสดงว่า $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ เป็นผลคูณภายในบน $\mathbb{R}^2$. จงหานอร์มของ $(1, 1)$ และแสดงว่า $2x_1y_1 - 3x_2y_2$ ไม่เป็นผลคูณภายใน.

3. ให้ $u = (1, 1, 1)$ และ $v = (1, -2, 1)$ ใน $\mathbb{R}^3$. จงตรวจว่า $u \perp v$ และตรวจทฤษฎีบทพีทาโกรัสสำหรับ $u + v$.

4. จงตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ: “ถ้า $x \perp y$ และ $x \perp z$ แล้ว $y \perp z$”. ถ้าเท็จ จงให้ตัวอย่างค้าน.

5. ให้ $f(t) = 1$ และ $g(t) = t$ บน $[0, 1]$ กับผลคูณภายใน L^2. จงคำนวณ $\langle f, g\rangle$, $\|f\|_{L^2}$, $\|g\|_{L^2}$ แล้วตรวจอสมการโคชี–ชวาร์ซ.

6. ใช้ฟังก์ชัน `parallelogram_defect` ใน `code/funkana/ch03.py` ตรวจเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสำหรับเวกเตอร์สุ่ม 200 คู่ใน $\mathbb{R}^7$. จงรายงานค่าคลาดเคลื่อนที่มากที่สุด และอธิบายว่าทำไมค่าที่ได้ไม่ใช่ศูนย์เป๊ะ.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. กระจายผลคูณภายในได้ $\langle x, y\rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 2 = 2 - 2 + 4 = 4$. ความยาวคือ $\|x\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ และ $\|y\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. ดังนั้น $\cos\theta = 4/(3\cdot 3) = 4/9 \approx 0.4444$ และ $\theta = \arccos(4/9) \approx 63.61^\circ$. อสมการโคชี–ชวาร์ซคือ $4 \le 9$, ซึ่งจริง.

2. (IP1) และ (IP2) ตรวจได้จากการกระจาย; (IP3) ชัดเพราะน้ำหนักเป็นจำนวนจริง; (IP4) คือ $2x_1^2 + 3x_2^2 \ge 0$; (IP5) คือผลบวกของกำลังสองเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อทั้งสองพิกัดเป็นศูนย์. นอร์มของ $(1, 1)$ คือ $\sqrt{2 + 3} = \sqrt{5}$. ส่วน $2x_1y_1 - 3x_2y_2$ ให้ค่า -3 เมื่อแทน $x = y = (0, 1)$ จึงละเมิด (IP4).

3. $\langle u, v\rangle = 1 - 2 + 1 = 0$ จึงตั้งฉาก. $u + v = (2, -1, 2)$ และ $\|u + v\|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$. ขณะที่ $\|u\|^2 = 3$ และ $\|v\|^2 = 6$ ดังนั้น $9 = 3 + 6$.

4. เท็จ. ใช้ $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$ และ $z = (0, 1, 1)$. แล้ว $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = 0$ แต่ $\langle y, z\rangle = 1 \neq 0$. การที่ x ตั้งฉากกับทั้งสองตัวไม่ได้บังคับให้สองตัวนั้นตั้งฉากกัน.

5. หาปริพันธ์ทีละตัว: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 t\,dt = [t^2/2]_0^1 = 1/2$, $\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ และ $\|g\|_{L^2}^2 = \int_0^1 t^2\,dt = [t^3/3]_0^1 = 1/3$. จึง $\|g\|_{L^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$. อสมการคือ $1/2 \le 1/\sqrt{3}$, ซึ่งจริง.

6. โค้ดใช้เวกเตอร์สุ่มด้วยเมล็ดคงที่และคำนวณผลต่างของสองข้าง. ค่าที่มากที่สุดน้อยกว่า 10^{-10} แต่ไม่เป็นศูนย์เป๊ะเพราะการคำนวณจุดลอยตัวปัดเศษ. เอกลักษณ์เป็นจริงทางคณิตศาสตร์; ตัวเลขที่ได้เป็นเพียงความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ.

อ่านต่อ

หัวข้อ 3.1 ให้ความยาว มุม และการตั้งฉาก. แต่ยังไม่ได้ตอบคำถามว่า “จุดที่ใกล้ปริภูมิย่อยที่สุดคือจุดใด”. หัวข้อ 3.2 จะตอบคำถามนั้นด้วยทฤษฎีบทการฉาย และจะแสดงว่าฟังก์ชันนัลต่อเนื่องทุกตัวบนปริภูมิฮิลเบิร์ตมีตัวแทนเป็นผลคูณภายในกับเวกเตอร์ตัวหนึ่ง.

ร่างเรียงพิมพ์ · 2026-10-24

3.2 ทฤษฎีบทการฉายและการแทนของเฟรเชต์–รีสซ์

ลองนึกภาพว่าเรายืนอยู่ที่จุด x_0 นอกเซต K และต้องการเดินไปยังจุดใน K ที่ใกล้ที่สุด. ถ้า K เป็นเส้นตรงหรือระนาบ คำตอบคือ “ปล่อยเส้นตั้งฉากจาก x_0 ลงไป”. แต่ถ้า K เป็นเซตโค้ง ๆ เช่น ส่วนของวงกลมหรือรูปหลายเหลี่ยม คำตอบยังมีหรือไม่, มีเพียงหนึ่งเดียวหรือไม่, และเราจะรู้ได้อย่างไรว่าจุดที่ได้เป็นจุดที่ใกล้ที่สุดจริง. หัวข้อนี้ตอบคำถามทั้งสาม. สองสมบัติของ K ที่จะใช้ตลอดหัวข้อนี้คือ ความคอนเวกซ์และความปิด; ถ้าขาดข้อใดข้อหนึ่ง คำตอบอาจไม่มีหรือมีหลายจุด.

3.2.1 เซตคอนเวกซ์และปัญหาจุดใกล้ที่สุด

นิยาม 3.2.1: เซตคอนเวกซ์

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{K}$ และ $A \subset X$. **เปลือกหุ้มคอนเวกซ์** (convex hull) ของ A คือเซต

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \,:\; k \in \mathbb{N},\; x_i \in A,\; a_i \geq 0,\; \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \right\}.$$

เซต A เรียกว่า**เซตคอนเวกซ์** (convex set) ถ้า $A = \operatorname{conv}(A)$. เงื่อนไขนี้สมมูลกับ: สำหรับทุก $x, y \in A$ และทุก $a \in (0,1)$, จุด $(1-a)x + ay$ อยู่ใน A.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

เซตคอนเวกซ์คือเซตที่ “ไม่มีส่วนเว้า”: ถ้าเลือกจุดสองจุดในเซต ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมสองจุดนั้นต้องอยู่ในเซตทั้งหมด. วงกลมเต็มเป็นเซตคอนเวกซ์; วงกลมที่เอาแต่เส้นรอบวงไม่ใช่ เพราะส่วนของเส้นตรงระหว่างสองจุดบนเส้นรอบวงตัดผ่านบริเวณภายในที่อยู่นอกเซต. ใน $\mathbb{R}^n$ ปริภูมิย่อย ปริภูมิย่อยสัมพรรค และครึ่งปริภูมิล้วนเป็นเซตคอนเวกซ์; **บอลปิด** (closed ball; ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางไม่เกินรัศมี ก็เป็นเซตคอนเวกซ์เช่นกัน.

เหตุใดจึงต้องมีเงื่อนไขคอนเวกซ์? เพราะบทพิสูจน์จะใช้ “จุดกึ่งกลาง” ของจุดที่ใกล้ที่สุดสองจุด. ถ้าเซตไม่คอนเวกซ์ จุดกึ่งกลางอาจหลุดออกนอกเซต และอาร์กิวเมนต์ล้มทันที. เงื่อนไขปิดก็สำคัญ: ลำดับของจุดที่ระยะทางลดลงอาจลู่เข้าหาจุดที่อยู่นอกเซต ถ้าเซตไม่ปิด. ความปิดจึงไม่ใช่เงื่อนไขทางเทคนิค แต่เป็นสิ่งที่ทำให้ค่าต่ำสุดที่คำนวณได้เป็นจุดจริงในเซต. ตัวอย่างเช่น $K = (0,1]$ ใน $\mathbb{R}$ กับ $x_0 = 0$: ระยะทางลดลงเข้าใกล้ 0 แต่ไม่มีจุดใดใน K ที่ให้ระยะทาง 0. ในทางกลับกัน ถ้า K ปิดแต่ไม่คอนเวกซ์ จุดใกล้ที่สุดอาจมีมากกว่าหนึ่งจุด.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ฟังก์ชันคอนเวกซ์

ฟังก์ชัน $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ บนเซตคอนเวกซ์ A เรียกว่า**ฟังก์ชันคอนเวกซ์** (convex function) ถ้า

$$f\big((1-a)x + ay\big) \leq (1-a)f(x) + af(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in A$ และ $0 \leq a \leq 1$. ฟังก์ชัน $y \mapsto \|x_0 - y\|^2$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์อย่างเคร่งบนปริภูมิฮิลเบิร์ต. นี่คือเหตุผลเชิงวิเคราะห์ที่ทำให้จุดใกล้ที่สุดมีเพียงหนึ่งเดียว: ฟังก์ชันคอนเวกซ์อย่างเคร่งมีจุดต่ำสุดได้ครั้งเดียว. ในบทนี้เราใช้บทพิสูจน์เชิงเรขาคณิตโดยตรง ซึ่งให้ผลเดียวกันและให้เงื่อนไขลักษณะเฉพาะที่ใช้งานได้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 3.2.1: ทฤษฎีบทการฉายบนเซตคอนเวกซ์ปิด

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต, $K \subset H$ เป็นเซตไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์, และ $x_0 \in H$. แล้วมี $x \in K$ เพียงตัวเดียวที่

$$\|x_0 - x\| = \operatorname{dist}(x_0, K) := \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือกจุดใน K ที่ระยะทางลดลงเข้าหาค่าอินฟิมัม. จุดสองจุดที่เกือบถึงค่าต่ำสุดต้องอยู่ใกล้กัน เพราะจุดกึ่งกลางยังอยู่ใน K; ความบริบูรณ์และความปิดจึงให้ลิมิตที่ต้องการ.

1. **เลือกจุดที่ระยะทางเกือบถึงค่าต่ำสุด.** ให้ $d = \operatorname{dist}(x_0, K)$. สำหรับแต่ละ n เลือก $y_n \in K$ ที่

$$d \le \|x_0 - y_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

2. **แสดงว่า (y_n) เป็น Cauchy.** ตอนนี้เปรียบเทียบสองจุดที่เกือบถึงค่าต่ำสุด. เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2 - 4\left\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2.$$

   จากสมบัติคอนเวกซ์ของ K, จุดกึ่งกลาง $(y_n + y_m)/2$ อยู่ใน K. ดังนั้นระยะทางจาก x_0 ถึงจุดนั้นอย่างน้อย d, และ

$$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2.$$

   เมื่อ $n, m \to \infty$ ขอบเขตนี้ลู่เข้าศูนย์. ลำดับจึงเป็น Cauchy.

3. **หาลิมิต.** เพราะ H บริบูรณ์ มี $x \in H$ ที่ $y_n \to x$. เพราะ K ปิด, $x \in K$. ระยะทางจึงลู่เข้าหาค่าที่คำนวณจากลิมิต,

$$\|x_0 - x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\| = d.$$

4. **ไม่มีจุดใกล้ที่สุดสองจุด.** ถ้า $x, x' \in K$ มีระยะทางเท่ากับ d ทั้งคู่, เพราะ K คอนเวกซ์ จุดกึ่งกลาง $(x + x')/2$ อยู่ใน K จึง $\|x_0 - (x + x')/2\| \ge d$. ใช้เอกลักษณ์เดิมกับ $x_0 - x$ และ $x_0 - x'$:

$$\|x - x'\|^2 \le 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

   ดังนั้น $x = x'$.

สรุป: ลำดับที่ระยะทางเกือบต่ำสุดเป็น Cauchy เพราะจุดกึ่งกลางยังอยู่ในเซตและระยะทางถึง x_0 ไม่ต่ำกว่า d. ความบริบูรณ์ให้ลิมิต และความปิดกับคอนเวกซ์ให้ลิมิตเป็นจุดใกล้ที่สุดเพียงจุดเดียว. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 3.2.2: ลักษณะเฉพาะของจุดใกล้ที่สุด

ให้ K เป็นเซตย่อยปิดและคอนเวกซ์ของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ $x_0 \in H$. สำหรับ $x \in K$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) $\|x_0 - x\| = \operatorname{dist}(x_0, K)$;

(ii) $\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \le 0$ สำหรับทุก $y \in K$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** (i) $\Rightarrow$ (ii): ถ้าผลคูณภายในมีส่วนจริงเป็นบวก ให้ขยับจาก x ไปทาง y เล็กน้อยแล้วระยะทางจะลดลง. (ii) $\Rightarrow$ (i): กระจายระยะทางจาก x_0 ถึง y โดยแทรก x.

1. **(i) $\Rightarrow$ (ii).** สมมติมี $y \in K$ ที่ $\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle > 0$. ให้ $z_t = (1-t)x + ty = x + t(y-x)$ สำหรับ $0 < t < 1$. จากสมบัติคอนเวกซ์ของ K, z_t อยู่ใน K. กระจาย

$$\|x_0 - z_t\|^2 = \|x_0 - x\|^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle + t^2\|y - x\|^2.$$

   สำหรับ $t > 0$ เล็กพอ พจน์เชิงเส้นที่เป็นลบจะชนะพจน์กำลังสอง ดังนั้น $\|x_0 - z_t\| < \|x_0 - x\|$, ขัดกับ (i).

2. **(ii) $\Rightarrow$ (i).** ให้ $y \in K$. เขียน $x_0 - y = (x_0 - x) + (x - y)$. แล้ว

$$\|x_0 - y\|^2 = \|x_0 - x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle + \|y - x\|^2.$$

   โดย (ii) พจน์กลางไม่ติดลบ, และ $\|y - x\|^2 \ge 0$. ดังนั้น $\|x_0 - y\|^2 \ge \|x_0 - x\|^2$. เนื่องจาก $y \in K$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ, x มีระยะทางต่ำสุด.

สรุป: เงื่อนไข (ii) บอกว่าเวกเตอร์ $x_0 - x$ ทำมุมป้านกับทุกทิศที่เดินเข้าไปใน K; จึงไม่มีทิศใดทำให้ใกล้ x_0 มากขึ้น. □

ข้อควรระวัง

- ถ้า K ไม่คอนเวกซ์ จุดใกล้ที่สุดอาจมีหลายจุด. ใน $\mathbb{R}^2$ ให้ K เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย (เฉพาะเส้นรอบวง) และ $x_0 = 0$. ทุกจุดของ K มีระยะทาง 1 จาก x_0, จึงไม่มีจุดใกล้ที่สุดเพียงจุดเดียว.
- ถ้า K ไม่ปิด ลิมิตของจุดที่ระยะทางลดลงอาจอยู่นอก K และค่าต่ำสุดอาจไม่ถูกบรรลุ. ตัวอย่างเช่น $K = (0, 1]$ ใน $\mathbb{R}$ กับ $x_0 = 0$: ระยะทางเข้าใกล้ 0 แต่ไม่มีจุดใดใน K ที่ระยะทางเป็น 0.
- เงื่อนไข (ii) ใช้ส่วนจริง เพราะในกรณีเชิงซ้อนผลคูณภายในอาจเป็นจำนวนเชิงซ้อน. การเปรียบเทียบ “น้อยกว่าหรือเท่ากับ” ต้องทำกับจำนวนจริง.

3.2.2 การฉายบนปริภูมิย่อยและการแยกตั้งฉาก

เมื่อมีปริภูมิย่อยปิด U ของปริภูมิฮิลเบิร์ต เราอยากแยกเวกเตอร์ทุกตัวออกเป็นส่วนที่อยู่ใน U กับส่วนที่ตั้งฉากกับ U. เราเริ่มจากเซตของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเซตหนึ่งก่อน.

สัมย่าง Preprint · 2026-10-24

นิยาม 3.2.2: ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก

กำหนดเซต $A \subset X$ ในปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต. เราเก็บเวกเตอร์ $y \in X$ ที่ทำผลคูณภายในกับสมาชิกทุกตัวของ A ได้ศูนย์ไว้ด้วยกัน:

$$A^{\perp} = \{y \in X : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in A\}$$

เราเรียก $A^{\perp}$ ว่า**ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก** (orthogonal complement; ทบทวนจากบท"จากหน้าจอสู่ปริภูมิ") ของ A.

$A^{\perp}$ เป็นปริภูมิย่อยปิดเสมอ: ถ้า $y_n \in A^{\perp}$ และ $y_n \to y$ แล้ว $\langle x, y\rangle = \lim \langle x, y_n\rangle = 0$ สำหรับทุก $x \in A$ โดยความต่อเนื่องของผลคูณภายใน. คำว่า "ส่วนเติมเต็ม" ในที่นี้ไม่ใช่ส่วนเติมเต็มของเซตแบบธรรมดา; มันคือเซตของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับสมาชิกทุกตัวของ A.

ทฤษฎีบท 3.2.3: การฉายเชิงตั้งฉากบนปริภูมิย่อยปิด

ให้ $U \neq \{0\}$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของปริภูมิฮิลเบิร์ต H. แล้วมีการฉายเชิงเส้น $P_U : H \to U$ ที่

$$\|P_U\| = 1, \qquad \ker(P_U) = U^{\perp}, \qquad H = U \oplus_2 U^{\perp}.$$

นอกจากนี้ $I - P_U$ เป็นการฉายจาก H ลงบน $U^{\perp}$ ที่มีนอร์ม 1 ยกเว้นเมื่อ $U = H$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ทฤษฎีบทการฉายกับเซต U ซึ่งปิดและคอนเวกซ์. ใช้ลักษณะเฉพาะ (ii) กับจุด $P_U x \pm u$ และ $P_U x \pm iu$ เพื่อพิสูจน์ว่าเศษตั้งฉากกับ U. แล้วจึงใช้ความเป็นหนึ่งเดียวของจุดใกล้ที่สุดสร้างความเป็นเชิงเส้น.

1. **สร้างการส่งและหาเศษที่ตั้งฉาก.** สำหรับ $x \in H$ ให้ $P_U x$ เป็นจุดใกล้ที่สุดใน U ซึ่งมีอยู่และมีเพียงหนึ่งเดียวโดยทฤษฎีบทการฉาย. ให้ $u \in U$. ใช้บทตั้งลักษณะเฉพาะกับฐาน $P_U x$ และจุด $P_U x + u$, $P_U x - u \in U$:

   $$\operatorname{Re}\langle x - P_U x, u\rangle \leq 0, \qquad \operatorname{Re}\langle x - P_U x, -u\rangle \leq 0.$$

   จึงได้ $\operatorname{Re}\langle x - P_U x, u\rangle = 0$. ทำแบบเดียวกันกับ iu และ $-iu$ เพื่อกำจัดส่วนจินตภาพในกรณีเชิงซ้อน. ดังนั้น $\langle x - P_U x, u\rangle = 0$ สำหรับทุก $u \in U$, นั่นคือ $x - P_U x \in U^{\perp}$.

2. **ภาวะเชิงเส้น.** ให้ $x, x' \in H$. เพราะ $P_U x + P_U x' \in U$ และ

   $$x + x' - (P_U x + P_U x') = (x - P_U x) + (x' - P_U x') \in U^{\perp},$$

   การแยก $x + x' = (P_U x + P_U x') + (\text{ส่วนใน } U^{\perp})$ เป็นการแยกตั้งฉาก. อีกด้านหนึ่ง $P_U(x + x')$ ให้การแยกตั้งฉากอีกแบบหนึ่ง. เพราะ $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ ตาม (IP5), ทั้งสองแบบมีส่วนใน U เท่ากัน; จึง $P_U(x + x') = P_U x + P_U x'$. สำหรับ $\lambda \in \mathbb{K}$ ใช้เหตุผลเดียวกันกับ $\lambda x = \lambda P_U x + (\lambda x - \lambda P_U x)$ และได้ $P_U(\lambda x) = \lambda P_U x$. ฉะนั้นการส่งนี้เป็นเชิงเส้น.

3. **เรนจ์และเคอร์เนล.** ถ้า $x \in U$ แล้ว $P_U x = x$ เพราะ x เป็นจุดใน U ที่ใกล้ตัวเองที่สุด. ดังนั้นเรนจ์คือ U. ถ้า $P_U x = 0$ แล้ว $x = x - 0 \in U^{\perp}$; ในทางกลับกัน ถ้า $x \in U^{\perp}$ แล้ว $0 \in U$ เป็นจุดใกล้ที่สุด เพราะ $\|x - 0\|^2 \leq \|x - y\|^2$ สำหรับทุก $y \in U$ โดยพีทาโกรัส. ดังนั้น $\ker P_U = U^{\perp}$.

4. **การแยกตั้งฉาก.** สำหรับทุก x, เขียน $x = P_U x + (x - P_U x)$. เทอมแรกอยู่ใน U และขั้นที่ 1 แสดงว่าเทอมที่สองตั้งฉากกับ U. จึงเป็นผลบวกตรงแบบตั้งฉาก $H = U \oplus_2 U^{\perp}$.

5. **นอร์ม.** จากพีทาโกรัส, $\|x\|^2 = \|P_U x\|^2 + \|x - P_U x\|^2 \geq \|P_U x\|^2$, ดังนั้น $\|P_U\| \leq 1$. ถ้า $U \neq \{0\}$ เลือก $u \in U$ ที่ $u \neq 0$; แล้ว $P_U u = u$ จึง $\|P_U\| \geq 1$. ดังนั้น $\|P_U\| = 1$.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

6. **การฉายลงบนส่วนเติมเต็ม.** ให้ $Q = I - P_U$. แล้ว $Q^2 = I - 2P_U + P_U^2 = I - P_U = Q$ และเรนจ์ของ Q คือ $U^\perp$. ถ้า $U \neq H$ แล้ว $U^\perp \neq \{0\}$ เพราะการฉายของ $x \notin U$ เป็นจุดใน U ที่ไม่เท่ากับ x. เมื่อแทน U ด้วย $U^\perp$ ในข้อ 4 (ซึ่งพิสูจน์ว่าการฉายบนปริภูมิย่อยปิดที่ไม่ใช่ศูนย์มีนอร์มหนึ่ง) ก็ได้ $\|Q\| = 1$. ถ้า $U = H$ แล้ว $Q = 0$.

สรุป: การฉายคือจุดใกล้ที่สุด; การแยก $x = P_U x + (I - P_U)x$ ตั้งฉากและมีเพียงหนึ่งเดียว; นอร์มของการฉายที่ไม่ใช่ศูนย์คือ 1. □

ทฤษฎีบท 3.2.4: การฉายบนปริภูมิย่อยสัมพรรค

ให้ $A \subset H$ เป็นเซตไม่ว่าง ปิด และเป็นปริภูมิย่อยสัมพรรค (กล่าวคือ ถ้า $x, y \in A$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$ แล้ว $(1-\alpha)x + \alpha y \in A$). ให้ P เป็นการฉายจากทฤษฎีบทการฉายบน A. แล้ว P เป็นเชิงเส้นสัมพรรค:

$$P\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) = (1-\alpha)P(x) + \alpha P(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in H$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$. ถ้า $a_0 \in A$ แล้ว $P(x)$ ถูกบ่งลักษณะโดย

$$\langle x - P(x), a - a_0 \rangle = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } a \in A.$$

ถ้า A เป็นปริภูมิย่อยปิด แล้ว P เป็นเชิงเส้น และ $x - P(x) \in A^\perp$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ลักษณะเฉพาะ (ii) โดยมีฐานอยู่ที่ $P(x)$ เอง. ในกรณีสัมพรรค เราเดินจาก $P(x)$ ไปยังจุดอื่นใน A; ในกรณีปริภูมิย่อย เราเดินสองทิศตรงข้ามและคูณด้วย i.

1. **กรณีสัมพรรค.** ให้ $a \in A$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$. เพราะ A สัมพรรค,
$$\tilde{a} = (1-\alpha)P(x) + \alpha a \in A, \qquad \tilde{a} - P(x) = \alpha(a - P(x)).$$
ใช้ (ii) กับจุด $\tilde{a}$ ซึ่งมีฐาน $P(x)$:
$$\operatorname{Re} \overline{\alpha} \langle x - P(x), a - P(x) \rangle \leq 0 \qquad \text{สำหรับทุก } \alpha.$$
เลือก $\alpha = \langle x - P(x), a - P(x) \rangle$. ด้านซ้ายกลายเป็น $|\langle x - P(x), a - P(x) \rangle|^2 \leq 0$, ดังนั้น
$$\langle x - P(x), a - P(x) \rangle = 0.$$
ใช้ผลนี้กับ a และ a_0 แล้วลบกัน ได้ $\langle x - P(x), a - a_0 \rangle = 0$ สำหรับทุก $a \in A$.

2. **การเป็นเชิงเส้นแบบสัมพรรค.** ให้ $x, y \in H$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$. จุด $(1-\alpha)P(x) + \alpha P(y)$ อยู่ใน A เพราะ A สัมพรรค. เวกเตอร์
$$(1-\alpha)x + \alpha y - \big((1-\alpha)P(x) + \alpha P(y)\big) = (1-\alpha)(x - P(x)) + \alpha(y - P(y))$$
ตั้งฉากกับ $A - A$ โดยขั้นที่แล้ว. ถ้า $a \in A$ แล้ว $a - \big((1-\alpha)P(x) + \alpha P(y)\big) \in A - A$; ดังนั้นเวกเตอร์นี้จึงตั้งฉากกับทุกทิศของ A จากจุดตัวเลือก. โดยความเป็นหนึ่งเดียวของจุดใกล้ที่สุด, ตัวเลือกนี้คือ $P((1-\alpha)x + \alpha y)$.

3. **กรณีปริภูมิย่อย.** ตอนนี้ A ปิดภายใต้การบวกและการคูณสเกลาร์. ให้ $a \in A$. ใช้ (ii) กับ $P(x) + a$ และ $P(x) - a$ (ทั้งคู่อยู่ใน A):
$$\operatorname{Re}\langle x - P(x), a \rangle \leq 0, \qquad \operatorname{Re}\langle x - P(x), -a \rangle \leq 0.$$
จึงได้ $\operatorname{Re}\langle x - P(x), a \rangle = 0$. แทน a ด้วย ia และ $-ia$ เพื่อกำจัดส่วนจินตภาพ. ดังนั้น $x - P(x) \in A^\perp$. ความเป็นเชิงเส้นตามมาจากขั้นที่แล้วโดยใช้ α ใด ๆ.

สรุป: สำหรับเซตสัมพรรค เงื่อนไขคือ “ตั้งฉากกับทิศของ A”; สำหรับปริภูมิย่อย เงื่อนไขคือ $x - P(x) \in A^\perp$. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทแทรก 3.2.5: ความปิดและส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากสองชั้น

ให้ U เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H. แล้ว

$$\overline{U} = (U^{\perp})^{\perp}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** การรวม $\overline{U} \subset (U^{\perp})^{\perp}$ ตรง ๆ. การรวมกลับใช้การแยกตั้งฉากของ $\overline{U}$.

1. ถ้า $u \in U$ และ $y \in U^{\perp}$ แล้ว $\langle u, y\rangle = 0$. โดยความต่อเนื่อง, สมาชิกทุกตัวของ $\overline{U}$ ก็ตั้งฉากกับ y. ดังนั้น $\overline{U} \subset (U^{\perp})^{\perp}$.

2. ให้ $x \in (U^{\perp})^{\perp}$. เขียน $x = u + v$ โดย $u \in \overline{U}$ และ $v \in \overline{U}^{\perp}$. แล้ว $v = x - u \in (U^{\perp})^{\perp}$ เพราะทั้งสองเทอมอยู่ใน $(U^{\perp})^{\perp}$. แต่ $v \in \overline{U}^{\perp} = U^{\perp}$. ดังนั้น v ตั้งฉากกับตัวเอง, จึง $v = 0$. เพราะฉะนั้น $x = u \in \overline{U}$.

สรุป: การเติมส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉากสองครั้งให้ความปิดของปริภูมิย่อย. □

3.2.3 ทุกฟังก์ชันนัลมีเวกเตอร์คู่ของมัน

ทฤษฎีบท 3.2.6: ทฤษฎีบทการแทนของเฟรเชต์–รีสซ์

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ H' เป็นปริภูมิคู่ (เซตของฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่องบน H). การส่ง

$$\Phi\colon H \to H', \qquad \Phi(y)(x) = \langle x, y\rangle,$$

เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง รักษานอร์ม และเชิงเส้นสังยุค. กล่าวคือ สำหรับทุก $f \in H'$ มี $y \in H$ เพียงตัวเดียวที่

$$f(x) = \langle x, y\rangle \qquad \text{สำหรับทุก } x \in H,$$

และ $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า $f = 0$ ใช้ $y = 0$. ถ้า $f \neq 0$ ให้ $U = \ker f$ ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยปิดที่มี**มิติรอง** (codimension)หนึ่ง. เลือกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $z \in U^{\perp}$ แล้วเขียน $f(x)$ ผ่าน $\langle x, z\rangle$.

1. **เตรียมเคอร์เนล.** ถ้า $f = 0$ ให้ $y = 0$. สมมติ $f \neq 0$. เนื่องจากการส่ง f ต่อเนื่อง เคอร์เนล $U = \ker f$ จึงปิด. เพราะ $f \neq 0$, มี x_0 ที่ $f(x_0) \neq 0$, ดังนั้น $U \neq H$. โดยทฤษฎีบทการฉาย, $U^{\perp} \neq \{0\}$. เลือก $z \in U^{\perp}$ ที่ $\|z\| = 1$.

2. **สร้างตัวแทน.** สำหรับ $x \in H$, จุด
$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z$$
อยู่ใน $\ker f$ เพราะ $z \in U^{\perp} \setminus \{0\}$ และ $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ จึง $z \notin U$ และ $f(z) \neq 0$. จึงตั้งฉากกับ z:
$$0 = \left\langle x - \frac{f(x)}{f(z)} z, z \right\rangle = \langle x, z\rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \|z\|^2 = \langle x, z\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}.$$
ดังนั้น $f(x) = f(z)\langle x, z\rangle$. ให้ $y = \overline{f(z)} z$. แล้ว
$$\langle x, y\rangle = \langle x, \overline{f(z)} z\rangle = f(z)\langle x, z\rangle = f(x).$$

สัมมนา · Preprint · 2026-10-24

3. **ความเป็นหนึ่งเดียว.** ถ้า $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$ สำหรับทุก x แล้ว $y - y'$ ตั้งฉากกับทุก x, โดยเฉพาะกับตัวเอง. ดังนั้น $\|y - y'\|^2 = 0$ และ $y = y'$.

4. **การรักษานอร์ม.** อสมการโคชี–ชวาร์ซควบคุมขนาดของ $f(x)$ ด้วย $\|x\|\,\|y\|$. เมื่อหารด้วย $\|x\|$ สำหรับ $x \neq 0$ จะเห็นว่า $\|f\|_{H'} \leq \|y\|$. ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $f(y/\|y\|) = \|y\|$, ดังนั้น $\|f\|_{H'} \geq \|y\|$. จึงเท่ากัน. เมื่อ $y = 0$ ค่าทั้งสองฝั่งเท่ากับศูนย์.

5. **ภาวะเชิงเส้นแบบสังยุค.** $\Phi(\lambda y)(x) = \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle = \overline{\lambda}\Phi(y)(x)$.

สรุป: ในกรณี $f \neq 0$ เคอร์เนล $\ker f$ มีมิติรองเท่ากับหนึ่ง; เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับมันจึงสร้างตัวแทน y ออกมา และนอร์มของ f เท่ากับความยาวของ y. □

ลองเอง: ตัวแทนของฟังก์ชันนัล

บน $\mathbb{R}^2$ ใช้ผลคูณภายในถ่วงน้ำหนัก $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$ และ $f(x) = 3x_1 - x_2$. จงหา y ที่ $f(x) = \langle x, y\rangle$ สำหรับทุก x, แล้วหานอร์มของ f.

ต้องมี $2y_1 = 3$ และ $y_2 = -1$, ดังนั้น $y = (3/2, -1)$. นอร์มคือ

$$\|f\| = \|y\| = \sqrt{2 \cdot (3/2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11/2} \approx 2.345.$$

ตรวจ: สำหรับ $x = (x_1, x_2)$,

$$\langle x, y\rangle = 2x_1 \cdot \frac{3}{2} + x_2 \cdot (-1) = 3x_1 - x_2 = f(x).$$

บทแทรก 3.2.7: การลู่เข้าแบบอ่อนในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ (x_n) เป็นลำดับใน H. ลำดับนี้ลู่เข้าแบบอ่อนไปยัง $x \in H$ ก็ต่อเมื่อ

$$\langle x_n - x, y\rangle \to 0 \qquad \text{สำหรับทุก } y \in H.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์แทนฟังก์ชันนัลต่อเนื่องทุกตัวด้วยผลคูณภายในกับเวกเตอร์หนึ่งตัว.

ให้ $x_n \rightharpoonup x$ หมายความว่า $f(x_n) \to f(x)$ สำหรับทุก $f \in H'$. โดยทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์, $f = \Phi(y)$ สำหรับ $y \in H$ เพียงตัวเดียว. ดังนั้น $f(x_n) \to f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ สำหรับทุก y, ซึ่งเทียบเท่ากับ $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$. *สรุป:* การลู่เข้าแบบอ่อนในฮิลเบิร์ตคือการลู่เข้าของผลคูณภายในกับเวกเตอร์ทดสอบทุกตัว. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ส่วนอื่นของข้อสรุป

ข้อสรุปจากต้นฉบับยังมีอีกสองส่วน: H เป็นปริภูมิสะท้อนกลับ และทุกลำดับที่มีขอบเขตมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน. ทั้งสองส่วนต้องใช้ภาษาและการพิสูจน์ของการลู่เข้าแบบอ่อน ซึ่งเราจะพัฒนาในบทว่าด้วยการลู่เข้าแบบอ่อน. เราจึงเก็บไว้ที่นั่นและไม่ใช้ในบทนี้. การลู่เข้าแบบอ่อนในฮิลเบิร์ตยังมีสมบัติเพิ่มเติมที่สำคัญ: ถ้า $x_n \rightharpoonup x$ และ $\|x_n\| \to \|x\|$ แล้ว $x_n \to x$ ตามนอร์ม. เราจะเห็นการใช้สมบัตินี้ในบทว่าด้วยทฤษฎีบทหลักสามข้อ.

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

3.2.4 บทตั้งของรีสซ์และทฤษฎีบทบานาค–ซักส์

บทตั้ง 3.2.8: บทตั้งของรีสซ์

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยแท้ที่ปิด, และ $0 < \theta < 1$. แล้วมี $x_\theta \in X$ ที่

$$\|x_\theta\| = 1, \qquad \theta \le \operatorname{dist}(x_\theta, Y) \le 1.$$

ถ้า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต อนุญาตให้ $\theta = 1$ ได้.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือกจุดนอก Y ที่ระยะทางเกือบถึง $d = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ แล้ว normalize เวกเตอร์จาก Y ไปยังจุดนั้น. ระยะทางที่เหลือถูกควบคุมโดย d หารด้วยความยาวของเวกเตอร์นั้น.

1. เลือก $x_0 \notin Y$. เพราะ Y ปิด, $d = \operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$. เลือก $y_0 \in Y$ ที่ $\|x_0 - y_0\| \le d/\theta$. (ทำได้เพราะ d เป็น infimum และ $d/\theta > d$.)

2. ให้ $z = (x_0 - y_0)/\|x_0 - y_0\|$. แล้ว $\|z\| = 1$. สำหรับ $y \in Y$,
$$\|z - y\| = \frac{\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\|}{\|x_0 - y_0\|} \ge \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \ge \theta,$$
เพราะ $y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in Y$. ดังนั้น $\operatorname{dist}(z, Y) \ge \theta$. และ $\operatorname{dist}(z, Y) \le \|z - 0\| = 1$ เพราะ $0 \in Y$.

3. **กรณีฮิลเบิร์ตและ $\theta = 1$.** ให้ P เป็นการฉายของ x_0 ลงบน Y. แล้ว $x_0 - Px_0 \ne 0$ และตั้งฉากกับ Y. ให้ $z = (x_0 - Px_0)/\|x_0 - Px_0\|$. สำหรับ $y \in Y$, พีทาโกรัสให้ $\|z - y\|^2 = 1 + \|y\|^2 \ge 1$. ดังนั้น $\operatorname{dist}(z, Y) = 1$.

สรุป: ในปริภูมินอร์มทั่วไป เราได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่อยู่ห่างจาก Y อย่างน้อย θ; ในฮิลเบิร์ต เราได้ระยะทางเต็ม 1 เพราะมีเวกเตอร์ตั้งฉากที่แท้จริง. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทฤษฎีบทบานาค–ซักส์

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน H. แล้วมีลำดับย่อย (y_n) ที่ลู่เข้าแบบอ่อนไปยัง $x \in H$ และทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

ลู่เข้าหา x ตามนอร์ม. แนวคิดคือตั้ง $z_k = y_k - x$; แล้ว $z_k \rightharpoonup 0$. เลือกลำดับย่อยซ้ำจน $|\langle z_j, z_k\rangle| \le 2^{-j}$ เมื่อ $j < k$. ถ้า M เป็นขอบเขตของ $\|z_k\|$ แล้ว

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \right\|^2 \le \frac{M^2}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k} |\langle z_j, z_k\rangle| \le \frac{M^2}{n} + \frac{2}{n} \to 0,$$

เพราะ $\sum_{j<k} 2^{-j} \le n \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} < n$. จากนั้น

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = x + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \to x.$$

ค่าเฉลี่ยของ y_k จึงลู่เข้าหา x ตามนอร์ม. การมีอยู่ของจุดลิมิตอ่อนและการเลือกลำดับย่อยต้องใช้ความกระชับแบบอ่อน ซึ่งเราจะพิสูจน์ในบทว่าด้วยการลู่เข้าแบบอ่อน. เราจึงกล่าวถึงผลนี้เป็นภาพรวม ไม่ใช้ในบทนี้.

ฉบับร่าง Preprint 2025-10-21

สรุปใจความ

- ในปริภูมิฮิลเบิร์ต เซตปิดคอนเวกซ์ที่ไม่ว่างมีจุดใกล้ที่สุดเพียงจุดเดียวสำหรับทุกจุด.
- จุดใกล้ที่สุด x ถูกบ่งลักษณะโดย $\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \le 0$ สำหรับทุก $y \in K$.
- ปริภูมิย่อยปิด U ให้การแยกตั้งฉาก $H = U \oplus_2 U^{\perp}$ และการฉายมีนอร์ม 1 เมื่อ $U \neq \{0\}$.
- ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ระบุ H' กับ H ผ่าน $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ และรักษานอร์ม.
- บทตั้งของรีสซ์แสดงว่าปริภูมินอร์มทั่วไปไม่มี “เวกเตอร์ตั้งฉากเต็มหน่วย” เหมือนฮิลเบิร์ต; นี่คือความพิเศษของฮิลเบิร์ต.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $x = (1, 2)$ และให้ $L = \operatorname{span}\{(3, 4)\}$ ใน $\mathbb{R}^2$. จงหาการฉายของ x ลงบน L และระยะทางจาก x ถึง L.
2. ให้ $H = \mathbb{R}^3$ และ $W = \{x : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. จงหาการฉายของ $x = (1, 2, 3)$ ลงบน W และระยะทางจาก x ถึง W.
3. ให้ K เป็นบอลปิดหนึ่งหน่วยใน $\mathbb{R}^2$ และ $x_0 = (3, 4)$. จงหาจุดใกล้ที่สุดใน K และตรวจเงื่อนไข $\operatorname{Re}\langle x_0 - x, y - x\rangle \le 0$ สำหรับ $y \in K$.
4. จงตัดสินว่าข้อความนี้จริงหรือเท็จ: “ถ้า $K \subset \mathbb{R}^2$ ไม่ว่างและปิด แล้วทุกจุดมีจุดใกล้ที่สุดใน K เพียงจุดเดียว”. ถ้าเท็จจงให้ตัวอย่างค้าน.
5. ให้ $H = \mathbb{R}^2$ กับผลคูณภายในถ่วงน้ำหนัก $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2$ และ $f(x) = 5x_1 - 3x_2$. จงหา y ที่เป็นตัวแทนของ f และหานอร์มของ f.
6. ใน $\mathbb{R}^3$ ให้ $U = \operatorname{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. จงหา $U^{\perp}$ และแยก $x = (1, 0, 0)$ เป็นส่วนใน U กับส่วนใน $U^{\perp}$.
7. ใช้ฟังก์ชัน `projection_matrix` ใน `code/funkana/ch03.py` กับการออกแบบ $A = [[3], [4]]$. จงตรวจว่า $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ มี $P^2 = P$, $P = P^T$ และ $\operatorname{tr} P = 1$. แล้วอธิบายว่า P ฉายเวกเตอร์ใด ๆ ลงบนเส้นใด.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สัมประสิทธิ์คือ $\langle x, u\rangle / \langle u, u\rangle = (3 + 8)/25 = 11/25$. ดังนั้น $p = (33/25, 44/25) = (1.32, 1.76)$. ระยะทางคือ $\|x - p\| = \|(-0.32, 0.24)\| = 0.4$.
2. เวกเตอร์ปกติของ W คือ $n = (1, 1, 1)$. $\langle x, n\rangle = 6$ และ $\|n\|^2 = 3$. ดังนั้น $p = x - (6/3)n = x - 2n = (-1, 0, 1)$. ระยะทางคือ $\|x - p\| = \|(2, 2, 2)\| = 2\sqrt{3} \approx 3.464$.
3. เพราะ x_0 อยู่นอกบอล, จุดใกล้ที่สุดคือการปรับให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย: $x = x_0/\|x_0\| = (3/5, 4/5) = (0.6, 0.8)$. ตรวจเงื่อนไข: สำหรับ y ใด ๆ ในบอล, $\|y\| \le 1$ และโดยอสมการโคชี–ชวาร์ซ $\langle x_0 - x, y\rangle \le \|x_0 - x\|\,\|y\| \le 4$. ขณะที่ $\langle x_0 - x, x\rangle = (12/5)(3/5) + (16/5)(4/5) = 4$. ดังนั้น $\langle x_0 - x, y - x\rangle \le 0$ ตามต้องการ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. เท็จ. ให้ K เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย (เส้นรอบวง) ใน $\mathbb{R}^2$ และ $x_0 = 0$. ทุกจุดใน K มีระยะทาง 1 จาก x_0, จึงมีจุดใกล้ที่สุดมากมายไม่จำกัด. เซตนี้ปิดแต่ไม่คอนเวกซ์.

5. ต้องมี $2y_1 = 5$ และ $y_2 = -3$, ดังนั้น $y = (5/2, -3)$. นอร์มคือ $\sqrt{2(5/2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25/2 + 9} = \sqrt{43/2} \approx 4.637$.

6. $U^\perp$ คือเซตของ y ที่ $y_1 + y_2 = 0$ และ $y_2 + y_3 = 0$, ดังนั้น $y = t(1, -1, 1)$. เลือก $n = (1, -1, 1)$. การฉายของ x บน $U^\perp$ คือ $\langle x, n\rangle / \|n\|^2\, n = (1/3)n = (1/3, -1/3, 1/3)$. ส่วนใน U คือ $x - (1/3, -1/3, 1/3) = (2/3, 1/3, -1/3)$. เขียนส่วนนี้เป็น $\frac{2}{3}(1,1,0) - \frac{1}{3}(0,1,1)$ จึงอยู่ใน U; และมันตั้งฉากกับ n เพราะ $(2/3)(1) - (1/3)(-1) + (-1/3)(1) = 0$.

7. สำหรับ $A = (3,4)^T$, $A^TA = 25$ และ $P = AA^T/25 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$. ตรวจ: $P^2 = P$, $P^T = P$ และ trace $= 25/25 = 1$. เรนจ์คือเส้นที่เกิดจาก $(3,4)$, ดังนั้น P ฉายเวกเตอร์ใด ๆ ลงบนเส้นนั้น.

อ่านต่อ

หัวข้อ 3.2 ให้การฉายและตัวแทนของฟังก์ชันนัล. หัวข้อ 3.3 จะใช้การฉายกับเมทริกซ์เพื่อเขียนสมการปรกติ, แก้ปัญหากำลังสองน้อยที่สุด, และกลับไปที่เส้นเอียงจากจุดที่ผิดปกติหนึ่งจุดในสถานการณ์เปิดบท.

3.3 กำลังสองน้อยที่สุดและตัวดำเนินการฉาย

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในหัวข้อที่แล้ว จุดที่ใกล้ปริภูมิย่อยที่สุดคือเงาของจุดนั้น. หัวข้อนี้เขียนเงานั้นเป็นสูตร: b ถูกฉายลงบน**ปริภูมิแบบจำลอง** (model subspace) $M = \mathcal{R}(A)$, ค่าตกค้าง $b - Pb$ ตั้งฉากกับ M, จึงได้**สมการปรกติ** (normal equations) $A^TAx = A^Tb$. เงาและเมทริกซ์เป็นสองภาษาของคำตอบเดียวกัน.

3.3.1 การฉายเชิงเส้นและตัวดำเนินการฉาย

นิยาม 3.3.1: การฉายเชิงเส้น

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย. การส่งเชิงเส้น $P : X \to X$ เรียกว่า**การฉายเชิงเส้น** (linear projection) บน Y ถ้า

$$P^2 = P \qquad \text{และ} \qquad \mathcal{R}(P) = Y.$$

สำหรับการฉายเช่นนี้ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง: (a) P เป็นการฉายบน Y ก็ต่อเมื่อ $P(X) \subset Y$ และ $P(y) = y$ สำหรับทุก $y \in Y$; (b) $X = \mathcal{N}(P) \oplus \mathcal{R}(P)$; (c) $I - P$ เป็นการฉายบน $\mathcal{N}(P)$ และ $\mathcal{N}(I - P) = \mathcal{R}(P)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** (a) ใช้ $P^2 = P$; (b) แยก x; (c) คำนวณ $(I - P)^2$ และอ่านเรนจ์กับเคอร์เนล.

1. **(a).** ถ้า $P^2 = P$ และ $\mathcal{R}(P) = Y$ แล้ว P ส่งทุกเวกเตอร์เข้า Y; สำหรับ $y = Px \in Y$ ได้ $Py = P^2x = y$. กลับกัน ถ้า $P(X) \subset Y$ และ P ตรึงสมาชิกของ Y ไว้ แล้ว $P^2x = P(Px) = Px$ และเรนจ์คือ Y.

ร่างต้น · preprint · 2026-10-24

2. **(b).** สำหรับ $x \in X$ เขียน
$$x = (x - Px) + Px.$$
เทอมแรกอยู่ใน $\mathcal{N}(P)$ เพราะ $P(x-Px) = Px-P^2x = 0$; เทอมที่สองอยู่ใน $\mathcal{R}(P)$. ถ้า $z \in \mathcal{N}(P)\cap\mathcal{R}(P)$ แล้ว $z = Px$ สำหรับบาง x และ $0 = Pz = P^2x = Px = z$. ผลรวมนี้จึงแยกเป็นสองส่วนที่ไม่ทับกัน.

3. **(c).** คำนวณ
$$(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P.$$
เรนจ์ของ $I - P$ คือ $\mathcal{N}(P)$ เพราะ $(I - P)x = x - Px$. เคอร์เนลของ $I - P$ คือเซตที่ $x = Px$ ซึ่งคือ $\mathcal{R}(P)$. จึงได้ทั้งสองสมการ.

สรุป: การฉายเชิงเส้นแยก X เป็นเคอร์เนลกับเรนจ์; $I - P$ สลับสองส่วนนี้. □

อ่านแบบเข้าใจง่าย

การฉายเชิงเส้นไม่จำเป็นต้องตั้งฉาก. ตัวอย่างใน $\mathbb{R}^2$ คือ $P(x, y) = (x + y, 0)$. แล้ว $P^2 = P$, เรนจ์คือแกน x และเคอร์เนลคือ $y = -x$. นี่คือการยุบตามทิศเฉียง: $(1, 0)$ และ $(0, 1)$ ถูกฉายเป็น $(1, 0)$ เหมือนกัน; ส่วนต่าง $(1, -1)$ ถูกยุบเป็น $(0, 0)$.

นิยาม 3.3.2: การฉายที่ต่อเนื่อง

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม. เซต
$$\mathcal{P}(X) = \{P \in \mathcal{L}(X) : \ P^2 = P\}$$
คือเซตของ**ตัวดำเนินการฉาย** (projection operator) ที่ต่อเนื่องบน X. สำหรับ $P \in \mathcal{P}(X)$:

(a) $\mathcal{N}(P)$ และ $\mathcal{R}(P)$ เป็นเซตปิด;

(b) $\|P\| \geq 1$ หรือ $P = 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เคอร์เนลของตัวดำเนินการต่อเนื่องปิด; เรนจ์เขียนเป็นเคอร์เนลของ $I - P$. สำหรับนอร์ม ใช้สมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ของเรนจ์ซึ่งถูกตรึงไว้.

1. **(a).** เนื่องจากการส่ง P ต่อเนื่อง เซต $\mathcal{N}(P) = P^{-1}(\{0\})$ จึงปิด. เพราะ $I-P$ ต่อเนื่องและ $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I-P)$ โดยข้อ (c) ของนิยามก่อน, เรนจ์จึงปิดด้วย.

2. **(b).** ถ้า $P \neq 0$ มี x ที่ $Px \neq 0$. เพราะ $Px \in \mathcal{R}(P)$ และ P เป็นเอกลักษณ์บนเรนจ์, $P(Px) = Px$. ดังนั้น
$$\|P\| \geq \frac{\|P(Px)\|}{\|Px\|} = \frac{\|Px\|}{\|Px\|} = 1.$$

สรุป: ความต่อเนื่องทำให้ทั้งเคอร์เนลและเรนจ์ปิด; การฉายที่ไม่ใช่ศูนย์มีนอร์มอย่างน้อยหนึ่ง. □

ข้อควรระวัง: การฉายเชิงเส้นกับการฉายตั้งฉาก

คำว่า “การฉาย” ในที่นี้หมายถึง $P^2 = P$ เท่านั้น; ทิศที่ยุบยังไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับจอ. ในมิติอนันต์ การฉายเชิงเส้นอาจไม่ต่อเนื่อง; บทนี้ใช้เฉพาะการฉาย*เชิงตั้งฉาก*บนปริภูมิย่อยปิดเท่านั้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 3.3.1: ลักษณะของการฉายเชิงตั้งฉาก

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $P : H \to H$ เป็นการส่งเชิงเส้น. ข้อต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) P เป็นการฉายเชิงตั้งฉากบน $\mathcal{R}(P)$ กล่าวคือ

$$\|x - Px\| \le \|x - Py\| \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in H;$$

(ii) $\langle x - Px, Py\rangle = 0$ สำหรับทุก $x, y \in H$;

(iii) $P^2 = P$ และ $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ สำหรับทุก $x, y \in H$;

(iv) $P \in \mathcal{P}(H)$ และ $\|P\| \le 1$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** (i) ทำให้ Px เป็นจุดต่ำสุดบนเรนจ์; ขยับตามทิศของเรนจ์แล้วอนุพันธ์ที่ศูนย์ให้ (ii). (ii) ให้ทั้งการฉายซ้ำและสมมาตร. (iii) ให้ P มีขอบเขตด้วยนอร์มไม่เกินหนึ่ง. (iv) ใช้การรบกวน $\varepsilon z + \alpha y$ เพื่อบังคับให้เศษตั้งฉากกับเรนจ์.

1. **(i) ⇒ (ii).** ให้ $x \in H$ และ $z \in \mathcal{R}(P)$. สำหรับจำนวนจริง t เล็ก ๆ, $Px + tz \in \mathcal{R}(P)$. เพราะ Px มีระยะทางต่ำสุด,

$$\|x - Px\|^2 \le \|x - Px - tz\|^2 = \|x - Px\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x - Px, z\rangle + t^2\|z\|^2.$$

ลบพจน์แรกแล้วหารด้วย $t > 0$ ได้ $0 \le -2\,\mathrm{Re}\langle x - Px, z\rangle + t\|z\|^2$; ปล่อย $t \searrow 0$ ได้ $\mathrm{Re}\langle x - Px, z\rangle \le 0$. ทำกับ $t < 0$ ได้อสมการกลับทิศ จึงได้ส่วนจริงเป็นศูนย์. แทน z ด้วย iz เพื่อกำจัดส่วนจินตภาพในกรณีเชิงซ้อน. ดังนั้น $\langle x - Px, z\rangle = 0$ สำหรับทุก $z \in \mathcal{R}(P)$; เขียน $z = Py$ ได้ (ii).

2. **(ii) ⇒ (iii).** ให้ $z = x - Px$. จาก (ii) กับ x ได้ $z \perp \mathcal{R}(P)$. ใช้ (ii) กับ z อีกครั้ง: $z - Pz \perp \mathcal{R}(P)$. เพราะ $z \perp \mathcal{R}(P)$ จึงได้ $Pz = z - (z - Pz) \perp \mathcal{R}(P)$. แต่ $Pz \in \mathcal{R}(P)$; เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับตัวเองจึงเป็นศูนย์, นั่นคือ $Pz = 0$. ดังนั้น $P^2x = Px$.

สำหรับสมมาตร ใช้ (ii) กับ x: $x - Px \perp \mathcal{R}(P)$. ใช้ (ii) กับ y ด้วย: $y - Py \perp \mathcal{R}(P)$; เพราะ $Px \in \mathcal{R}(P)$ จึง $\langle Px, y - Py\rangle = 0$. และ $Py \in \mathcal{R}(P)$, จึง

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle Px, y - Py\rangle = \big(\langle x, Py\rangle - \langle x - Px, Py\rangle\big) + 0 = \langle x, Py\rangle.$$

นี่คือ (iii).

3. **(iii) ⇒ (iv).** จาก (iii),

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle x, P^2x\rangle = \langle x, Px\rangle \le \|x\|\,\|Px\|.$$

ถ้า $Px \neq 0$ หารด้วย $\|Px\|$ ได้ $\|Px\| \le \|x\|$; ถ้า $Px = 0$ อสมการก็จริง. ดังนั้น P มีขอบเขตและ $\|P\| \le 1$.

4. **(iv) ⇒ (ii).** ให้ $x \in H$, $y \in \mathcal{R}(P)$ และ $z = x - Px$. เพราะ $P^2 = P$, $Py = y$ และ $Pz = 0$. สำหรับ $\varepsilon > 0$ และสเกลาร์ α ที่ $|\alpha| = 1$,

$$P(\varepsilon z + \alpha y) = \alpha y.$$

เพราะ $\|P\| \le 1$,

$$\|y\|^2 = \|P(\varepsilon z + \alpha y)\|^2 \le \|\varepsilon z + \alpha y\|^2 = \varepsilon^2\|z\|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\langle z, \alpha y\rangle + \|y\|^2.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-12-24

ลบ $\|y\|^2$ แล้วหารด้วย ε ได้ $0 \le \varepsilon\|z\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle z, \alpha y\rangle$. ปล่อย $\varepsilon \searrow 0$:

$$0 \le \mathrm{Re}\langle z, \alpha y\rangle \qquad \text{สำหรับทุก } \alpha,\ |\alpha| = 1.$$

ถ้า $\langle z, y\rangle \neq 0$ เลือก $\alpha = -\langle z, y\rangle/|\langle z, y\rangle|$ จะได้ด้านขวาเป็น $-|\langle z, y\rangle| < 0$ ซึ่งขัดแย้ง. ดังนั้น $\langle z, y\rangle = 0$; นี่คือ (ii). จาก (ii) กลับไป (i) ได้โดยพีทาโกรัส: สำหรับ $y \in \mathcal{R}(P)$,

$$\|x - y\|^2 = \|(x - Px) + (Px - y)\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px - y\|^2 \ge \|x - Px\|^2.$$

สรุป: การฉายตั้งฉากถูกกำหนดได้สามภาษาที่เท่ากัน: เป็นจุดใกล้ที่สุด, เป็นตัวที่เศษตั้งฉากกับเรนจ์, และเป็นตัวที่ฉายซ้ำได้กับสมมาตร. เงื่อนไขนอร์มไม่เกินหนึ่งก็เพียงพอจะบังคับให้เป็นแบบตั้งฉาก. □

ก่อนใช้คำว่า “ตัวดำเนินการผูกพัน” เรานิยามให้ชัด. สำหรับ $P \in \mathcal{L}(H)$ มีตัวดำเนินการ $P^* \in \mathcal{L}(H)$ เพียงตัวเดียวที่

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, P^* y\rangle \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in H.$$

การมีอยู่และความเป็นหนึ่งเดียวมาจากทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์: สำหรับแต่ละ y ฟังก์ชัน $x \mapsto \langle Px, y\rangle$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง จึงมี $P^* y$ เพียงตัวเดียวแทนมัน. เราเรียก P^* ว่า**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) ของ P. ตัวดำเนินการเรียกว่า**ปรกติ** (normal) ถ้า $P^*P = PP^*$, และ**ตัวดำเนินการผูกพันในตัว** (self-adjoint) ถ้า $P = P^*$.

บทตั้ง 3.3.2: บทตั้งของตัวดำเนินการปรกติ

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $T \in \mathcal{L}(H)$ เป็นตัวดำเนินการปรกติ. แล้ว

$$\|Tx\| = \|T^* x\| \qquad \text{สำหรับทุก } x \in H,$$

และโดยเฉพาะ $\ker T = \ker T^*$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เอา $T^*T - TT^* = 0$ ไปประกบกับ x สองข้าง; ผลคูณภายในที่ได้คือผลต่างของกำลังสองของนอร์ม.

สำหรับ $x \in H$,

$$0 = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle = \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2.$$

ดังนั้น $\|Tx\| = \|T^*x\|$. เพราะนอร์มเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์เป็นศูนย์, $Tx = 0$ ก็ต่อเมื่อ $T^*x = 0$; จึง $\ker T = \ker T^*$.

สรุป: บทตั้งนี้บอกว่าขนาดของ Tx กับ T^*x เท่ากันทุก x; เคอร์เนลทั้งสองจึงตรงกัน. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2025-10-24

ทฤษฎีบท 3.3.3: ทฤษฎีบทการฉายเชิงตั้งฉาก (Orthogonalprojektion)

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $P \in \mathcal{L}(H)$ เป็นการฉายที่มี $P^2 = P$ และ $P \neq 0$. ข้อต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$;

(ii) $\|P\| = 1$;

(iii) $P = P^*$;

(iv) P ปรกติ;

(v) $\langle Px, x\rangle \geq 0$ สำหรับทุก $x \in H$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** วงจรหลักใช้บทตั้งก่อนหน้า: การฉายตั้งฉากคือการฉายที่ผูกพันในตัว. ส่วนที่เป็นของใหม่คือการเชื่อม “ปรกติ” กับการแยกเรนจ์–เคอร์เนล และการเชื่อมเงื่อนไข $\langle Px, x\rangle \geq 0$ กับการไม่มีความยาวในทิศตั้งฉาก.

1. **(i) ⇔ (iii).** สำหรับการฉาย ($P^2 = P$), เงื่อนไข $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$ สมมูลกับการที่ Px เป็นจุดใกล้ที่สุดบน $\mathcal{R}(P)$: ถ้าสองปริภูมิตั้งฉากกัน การแยก $x = Px + (x - Px)$ กับพีทาโกรัสทำให้ $\|x - Px\| \leq \|x - y\|$ ทุก $y \in \mathcal{R}(P)$; ถ้า Px ใกล้ที่สุด เศษ $x - Px$ ต้องตั้งฉากกับเรนจ์. เมื่อรวมกับบทตั้งก่อนหน้า เงื่อนไขนี้สมมูลกับ $P^2 = P$ และ $P = P^*$. เนื่องจากเราสมมติ $P^2 = P$ อยู่แล้ว จึงได้การสมมูล.

2. **(iii) ⇒ (ii).** บทตั้งก่อนหน้าให้ $\|P\| \leq 1$. ข้อ (b) ของนิยามการฉายที่ต่อเนื่องให้ $\|P\| \geq 1$ เพราะ $P \neq 0$. จึง $\|P\| = 1$.

3. **(ii) ⇒ (iii).** ถ้า $\|P\| = 1$ แล้ว $\|P\| \leq 1$; บทตั้งก่อนหน้าให้ $P = P^*$.

4. **(iii) ⇒ (iv).** ถ้า $P = P^*$ แล้ว $P^*P = P^2 = PP^*$, จึงปรกติ.

5. **(iv) ⇒ (i).** ให้ $z \in \mathcal{N}(P)$ และ $y = Px \in \mathcal{R}(P)$. โดยบทตั้งของตัวดำเนินการปรกติก่อนหน้า, $\ker P = \ker P^*$; ดังนั้น $P^*z = 0$. แล้ว
$$\langle y, z\rangle = \langle Px, z\rangle = \langle x, P^*z\rangle = 0.$$
ดังนั้น $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

6. **(i) ⇒ (v).** เขียน $x = Px + (x - Px)$. เทอมแรกอยู่ในเรนจ์, เทอมที่สองอยู่ในเคอร์เนล, และสองปริภูมิตั้งฉากกัน. ดังนั้น
$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px\rangle + \langle Px, x - Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0.$$

7. **(v) ⇒ (i).** ให้ $x \in \mathcal{N}(P)$ และ $y \in \mathcal{R}(P)$. สำหรับจำนวนจริง λ,
$$P(x + \lambda y) = \lambda y.$$
จาก (v),
$$0 \leq \langle P(x + \lambda y), x + \lambda y\rangle = \lambda^2\|y\|^2 + \lambda\,\mathrm{Re}\langle y, x\rangle.$$
หารด้วย $\lambda > 0$ แล้วปล่อย $\lambda \searrow 0$ ได้ $\mathrm{Re}\langle y, x\rangle \geq 0$. หารด้วย $\lambda < 0$ แล้วปล่อย $\lambda \nearrow 0$ ได้ $\mathrm{Re}\langle y, x\rangle \leq 0$. ดังนั้นส่วนจริงเป็นศูนย์; ในกรณีเชิงซ้อนทำแบบเดียวกันกับ iy เพื่อกำจัดส่วนจินตภาพ. จึงได้ $\langle y, x\rangle = 0$ และ $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

สรุป: สำหรับการฉายที่ไม่เป็นศูนย์ การตั้งฉาก การมีนอร์มหนึ่ง การผูกพันในตัว ภาวะปรกติ และค่า $\langle Px, x\rangle$ ที่ไม่ติดลบ ล้วนเป็นหน้าเดียวกันของเหรียญเดียวกัน. □

3.3.2 สมการปรกติจากการฉาย

นิยาม 3.3.3: ปัญหากำลังสองน้อยที่สุด

ให้ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ และ $b \in \mathbb{R}^m$. ปัญหา**กำลังสองน้อยที่สุด** (least squares) คือการหา $x \in \mathbb{R}^n$ ที่ทำให้

$$J(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

เล็กที่สุด. เราเรียก Ax ว่าค่าที่แบบจำลองทำนาย, $r = b - Ax$ ว่า**ค่าตกค้าง** (residual), และ A ว่า**เมทริกซ์การออกแบบ** (design matrix).

ค่า J วัดผลรวมกำลังสองของระยะห่างแนวตั้ง; จุดที่ผิดมากจึงมีน้ำหนักมากเป็นพิเศษ. ปริภูมิแบบจำลอง $M = \mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด จึงปิดและคอนเวกซ์. โดยทฤษฎีบทการฉาย มี $p \in M$ ที่ใกล้ b ที่สุดเพียงจุดเดียว และคำตอบคือ x ที่ $Ax = p$.

ทฤษฎีบท 3.3.4: สมการปรกติ

ให้ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ มี**อันดับเต็มคอลัมน์** (full column rank) n และ $b \in \mathbb{R}^m$. แล้วปัญหากำลังสองน้อยที่สุดมีคำตอบ $x_* \in \mathbb{R}^n$ เพียงตัวเดียว และ x_* เป็นคำตอบก็ต่อเมื่อ

$$A^T A x_* = A^T b.$$

ถ้า $r = b - Ax_*$ แล้ว $A^T r = 0$, และสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax_* - b\|_2^2 + \|A(x - x_*)\|_2^2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ฉาย b ลงบน $M = \mathcal{R}(A)$; การฉายตั้งฉากทำให้ค่าตกค้างตั้งฉากกับทุกคอลัมน์. อันดับเต็มคอลัมน์ทำให้คำตอบ x ของ $Ax = p$ มีเพียงตัวเดียว.

1. **การมีอยู่.** M เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด จึงปิด; โดยทฤษฎีบทการฉาย, มี $p \in M$ ที่ใกล้ b ที่สุดเพียงจุดเดียว.
2. **ความเป็นหนึ่งเดียวของ x.** เขียน $p = Ax_*$. ถ้า $Ax_* = Ax$ แล้ว $A(x_* - x) = 0$. เพราะ A มีอันดับเต็มคอลัมน์, เคอร์เนลของ A มีเพียงศูนย์; ดังนั้น $x = x_*$.
3. **สมการปรกติ.** เพราะ p เป็นจุดใกล้ที่สุด, $b - p \perp M$. สมาชิกของ M ทุกตัวเป็นผลรวมเชิงเส้นของคอลัมน์ $a_1, \ldots, a_n$ ของ A; ดังนั้น $a_j^T(b - Ax_*) = 0$ สำหรับทุก j. เรียงสมการทั้ง n สมการเป็นเวกเตอร์ได้ $A^T(b - Ax_*) = 0$, นั่นคือ $A^T A x_* = A^T b$.
4. **บทกลับ.** สมมติ $A^T(b - Ax_*) = 0$. แล้ว $b - Ax_* \perp \mathcal{R}(A)$. สำหรับ x ใด ๆ,

   $$b - Ax = (b - Ax_*) + A(x_* - x).$$

   สองเทอมทางขวาตั้งฉากกัน เพราะเทอมแรกตั้งฉากกับเรนจ์และเทอมที่สองอยู่ในเรนจ์. โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส,

   $$\|b - Ax\|^2 = \|b - Ax_*\|^2 + \|A(x_* - x)\|^2 \geq \|b - Ax_*\|^2.$$

   ดังนั้น x_* เป็นคำตอบ. ถ้า x เป็นคำตอบด้วย ความเท่ากันบังคับให้ $A(x_* - x) = 0$; อันดับเต็มคอลัมน์ให้ $x = x_*$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุป: สมการปรกติบอกว่าค่าตกค้างตั้งฉากกับทุกคอลัมน์; อันดับเต็มคอลัมน์ทำให้คำตอบมีเพียงตัวเดียว. □

ลองเอง: สมการปรกติกับการลากเส้น

ให้จุด $(0,1),(1,3),(2,4),(3,6)$. จงเขียนเมทริกซ์ A สำหรับเส้นตรง $y = a + bx$, แก้สมการปรกติ, และหาค่าตกค้างกับผลรวมกำลังสอง.

เมทริกซ์การออกแบบและเวกเตอร์ข้อมูลคือ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

ดังนั้น

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \qquad A^T b = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

แก้ระบบ $4a + 6b = 14$, $6a + 14b = 29$ ได้ $a = 1.1$ และ $b = 1.6$. เส้นคือ $y = 1.1 + 1.6x$. ค่าที่ทำนายคือ $1.1, 2.7, 4.3, 5.9$; ค่าตกค้างคือ

$$(-0.1,\ 0.3,\ -0.3,\ 0.1),$$

และผลรวมกำลังสองคือ $0.01 + 0.09 + 0.09 + 0.01 = 0.2$. ตรวจสมการปรกติ: ผลรวมค่าตกค้างเป็นศูนย์ และผลรวมถ่วงน้ำหนักด้วย x เป็นศูนย์.

บทตั้ง 3.3.5: ความสอดคล้องของสมการปรกติ

สำหรับ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ใด ๆ และ $b \in \mathbb{R}^m$ สมการ $A^T Ax = A^T b$ มีคำตอบเสมอ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แสดงว่า A^T กับ $A^T A$ มีเรนจ์เดียวกัน; แล้ว $A^T b$ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของ A^T ย่อมอยู่ในเรนจ์ของ $A^T A$.

ให้ $z \in \mathbb{R}^n$ ตั้งฉากกับ $\mathcal{R}(A^T A)$. แล้ว $z^T A^T Az = 0$, นั่นคือ $\|Az\|^2 = 0$, ดังนั้น $Az = 0$. เพราะ $\ker A = \mathcal{R}(A^T)^\perp$, ได้ $z \in \mathcal{R}(A^T)^\perp$. เราได้ $\mathcal{R}(A^T A)^\perp \subset \mathcal{R}(A^T)^\perp$; กลับทิศก็จริงเพราะ $\mathcal{R}(A^T A) \subset \mathcal{R}(A^T)$. ดังนั้นสองเรนจ์เท่ากัน. เพราะ $A^T b \in \mathcal{R}(A^T) = \mathcal{R}(A^T A)$, มี x ที่ $A^T Ax = A^T b$.

สรุป: สมการปรกติไม่มีทาง “ไม่มีคำตอบ”; ปัญหามีแต่คำตอบเดียวหรือหลายคำตอบเมื่ออันดับไม่เต็ม. □

3.3.3 เมทริกซ์ฉายและอันดับไม่เต็ม

ทฤษฎีบท 3.3.6: เมทริกซ์ของการฉายเชิงตั้งฉาก

ให้ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ มีอันดับเต็มคอลัมน์. แล้ว

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

เป็นการฉายเชิงตั้งฉากบน $\mathcal{R}(A)$. ยิ่งกว่านั้น $P^2 = P$, $P^T = P$, $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\|P\| = 1$ และ $\operatorname{tr} P = n$.

ร่างปรับปรุง · preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** ตรวจสองสมบัติของบทตั้งลักษณะ: ฉายซ้ำและสมมาตร. แล้วอ่านเรนจ์และเคอร์เนลจากสูตร. **รอยเมทริกซ์** (trace) คือผลรวมของสมาชิกบนแนวทแยง; มันเท่ากับมิติเพราะ P ตรึงทุกเวกเตอร์ในเรนจ์ไว้.

1. **ฉายซ้ำและสมมาตร.** เพราะ A^TA กลับได้,
$$P^2 = A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P.$$
และ
$$P^T = A\left((A^TA)^{-1}\right)^T A^T = A(A^TA)^{-1}A^T = P,$$
เพราะ A^TA สมมาตร. โดยบทตั้งลักษณะ, P เป็นการฉายเชิงตั้งฉาก.

2. **เรนจ์และเคอร์เนล.** ทุก Px อยู่ใน $\mathcal{R}(A)$, และถ้า $y = Ax$ แล้ว $Py = Ax$ เพราะ P เป็นเอกลักษณ์บนเรนจ์; จึง $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A)$. เพราะ $A^TP = A^T$, ถ้า $Px = 0$ แล้ว $A^Tx = 0$; กลับกันถ้า $A^Tx = 0$ ก็ได้ $Px = 0$. ดังนั้น $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

3. **นอร์มและรอยเมทริกซ์.** เพราะ $P \neq 0$ และ $P^2 = P$, ข้อ (b) ของนิยามการฉายที่ต่อเนื่องให้ $\|P\| \geq 1$; บทตั้งลักษณะให้ $\|P\| \leq 1$. จึงเท่ากับหนึ่ง. สุดท้าย
$$\operatorname{tr} P = \operatorname{tr}\big(A(A^TA)^{-1}A^T\big) = \operatorname{tr}\big((A^TA)^{-1}A^TA\big) = \operatorname{tr} I_n = n.$$

สรุป: เมทริกซ์ฉายสร้างจาก A โดยตรง; มันฉายลงบนปริภูมิคอลัมน์และมีรอยเมทริกซ์เท่ากับจำนวนคอลัมน์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น. □

ข้อควรระวัง: คอนดิชันนัมเบอร์กำลังสอง

การแก้สมการปรกติด้วย A^TA อาจไม่คงตัวในการคำนวณจุดลอยตัว เพราะ**คอนดิชันนัมเบอร์** (condition number) ของ A^TA คือกำลังสองของคอนดิชันนัมเบอร์ของ A. สำหรับข้อมูลเซนเซอร์ $\operatorname{cond}(A) = 10.1723$ และ $\operatorname{cond}(A^TA) = 103.4752$; งานจริงจึงมักใช้ QR หรือ SVD แทน.

ถ้า A ไม่มีอันดับเต็มคอลัมน์ สมการปรกติยังมีคำตอบ แต่คำตอบไม่จำเป็นต้องมีเพียงตัวเดียว: ถ้า x_0 เป็นคำตอบหนึ่ง เซตคำตอบคือ $x_0 + \ker A$. บทนี้ใช้เงื่อนไขอันดับเต็มคอลัมน์เพื่อรับประกันคำตอบเดียว; คำตอบที่มีนอร์มเล็กที่สุดจะกล่าวถึงเมื่อศึกษา SVD.

3.3.4 การสอบเทียบเซนเซอร์และการลดเสียงรบกวน

กลับไปที่แอปนับก้าวในสถานการณ์เปิดบท. ข้อมูลสิบช่วงเป็นข้อมูลที่เราสร้างขึ้น ไม่ได้มาจากอุปกรณ์จริง. ให้ x_i เป็นจำนวนพันก้าว และ y_i เป็นระยะทางที่อ่านได้เป็นกิโลเมตร. แบบจำลองเส้นตรงคือ $y = a + bx$; เขียนเป็นเมทริกซ์ได้ $A\theta$ โดย $\theta = (a, b)^T$ และ A มีคอลัมน์แรกเป็นหนึ่ง คอลัมน์ที่สองเป็น x_i.

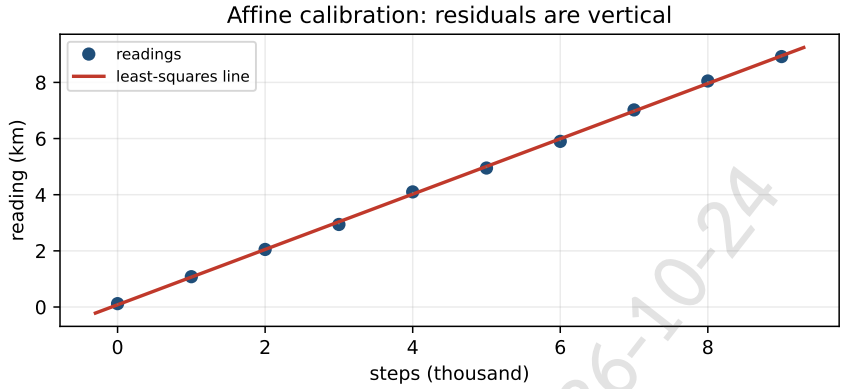
สำหรับข้อมูลชุดนี้
$$\sum x_i = 45, \qquad \sum x_i^2 = 285, \qquad \sum y_i = 45.13, \qquad \sum x_i y_i = 284.37.$$
สมการปรกติจึงเป็น
$$\begin{pmatrix} 10 & 45 \\ 45 & 285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.13 \\ 284.37 \end{pmatrix}.$$

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

แก้ได้ $a = 0.0792727$ และ $b = 0.9852727$. เส้นที่ได้คือ

$$y = 0.0793 + 0.9853x.$$

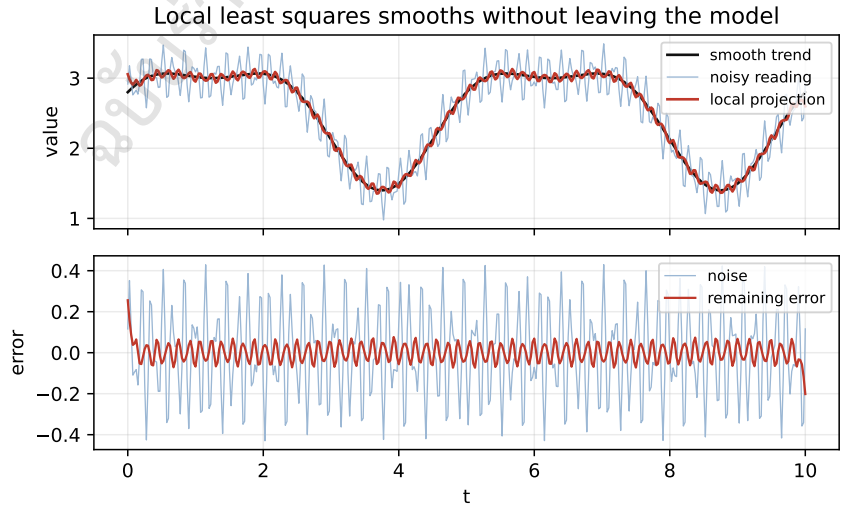
ความชัน 0.9853 กิโลเมตรต่อพันก้าวคือประมาณ 0.985 เมตรต่อก้าว; ค่าตัดแกน 0.0793 กิโลเมตรคือประมาณ 79 เมตร. ค่าตกค้างมีผลรวมและผลรวมถ่วงน้ำหนักด้วย x เป็นศูนย์; ค่าสัมบูรณ์ที่มากที่สุดคือ 0.0951, ผลรวมกำลังสองคือ 0.0391 และ RMSE คือ 0.0625 กิโลเมตร.



รูปที่ 3.2: ข้อมูลเซนเซอร์สมมติสิบช่วงและเส้นกำลังสองน้อยที่สุด. เส้นประแนวตั้งคือค่าตกค้าง; สมการปรกติทำให้ผลรวมของค่าตกค้างและผลรวมถ่วงน้ำหนักด้วย x เป็นศูนย์ (สร้างจาก `code/funkana/ch03.py`).

ในภาษาการฉาย $M = \mathcal{R}(A)$ คือเซตของค่าที่เส้นตรงทุกเส้นให้ที่จุดข้อมูลทั้งสิบ (เวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^{10}$); มันเป็นปริภูมิย่อยสองมิติ และ $b - A\theta_*$ ตั้งฉากกับสองคอลัมน์. จึงได้สองสมการของสมการปรกติ: ผลรวมค่าตกค้างเป็นศูนย์ และผลรวมถ่วงน้ำหนักด้วย x เป็นศูนย์.

การลดเสียงรบกวนฉายเฉพาะหน้าต่างรอบจุดหนึ่ง ๆ แทนสัญญาณทั้งเส้น เพราะสัญญาณโค้ง. หน้าต่างรัศมี h มี $2h + 1$ จุด (ยกเว้นปลายสัญญาณ); เราใช้เส้นตรงสองพารามิเตอร์แล้วอ่านค่าที่จุดกลาง. วิธีนี้คือ**การลดเสียงรบกวน** (denoising) ด้วยกำลังสองน้อยที่สุดท้องถิ่น.



รูปที่ 3.3: สัญญาณสมมติ 401 จุด: แนวโน้มเรียบ, ค่าที่มีเสียงรบกวน และผลของการฉายท้องถิ่นด้วยรัศมี $h = 4$. แผนล่างเปรียบเทียบเสียงกับความคลาดเคลื่อนที่เหลือ (สร้างจาก `code/funkana/ch03.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สำหรับสัญญาณที่สร้างขึ้นนี้ ค่า RMSE เทียบกับแนวโน้มเรียบก่อนลดเสียงคือ 0.2176. หลังใช้ $h = 4$ ค่าเหลือ 0.0459 คือประมาณ 21.07% ของเดิม. ค่าสัมบูรณ์ที่มากที่สุดลดจาก 0.4297 เป็น 0.2558. เมื่อเพิ่มเป็น $h = 6$ ค่า RMSE เหลือ 0.0199 และค่าสูงสุดเหลือ 0.2293; เมื่อใช้ $h = 15$ ค่า RMSE กลับขึ้นเป็น 0.0393 แต่ค่าสูงสุดลดลงเป็น 0.0889.

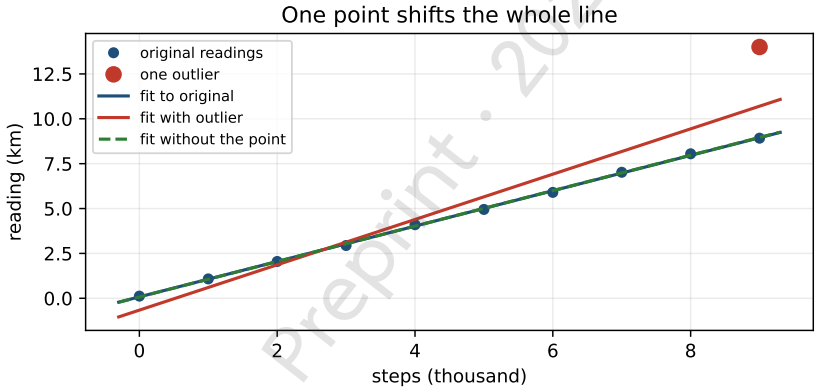
หน้าต่างใหญ่ขึ้นลดความแปรปรวน แต่หน้าต่างใหญ่เกินไปเริ่ม “ไม่ทัน” ความโค้งของสัญญาณ. ที่ยอดเรียบ $t = 0.575$ ค่าจริงคือ 3.066649; ค่าประมาณเมื่อ $h = 4, 6, 15$ สูงกว่า 0.0225, ต่ำกว่า 0.0003 และต่ำกว่า 0.0228 ตามลำดับ. ค่าสูงสุดของ $h = 4, 6$ อยู่ที่ปลายซ้าย $t = 0$ เพราะหน้าต่างถูกตัดข้างหนึ่ง; ของ $h = 15$ อยู่ที่ $t \approx 3.675$. $h = 6$ ให้ RMSE ต่ำสุดและรักษายอดดีสุด; $h = 15$ ให้ค่าสูงสุดต่ำสุด.

3.3.5 ค่าผิดปกติ: ทำไมเส้นทั้งเส้นจึงเอียง

ตอนนี้กลับไปที่เหตุการณ์ปลายบท: โทรศัพท์ถูกทำตก และเซนเซอร์อ่าน 14.0 กิโลเมตรที่ช่วงสุดท้าย. เราเรียกจุดที่ผิดปกติเช่นนี้ว่าค่าผิดปกติ; ค่าที่ควรเป็นใกล้ 9. เราไม่ลบจุดนี้ แต่แก้ปัญหากำลังสองน้อยที่สุดใหม่ ได้เส้น

$$y = -0.6596 + 1.2624x,$$

เส้นนี้ต่างจากเดิมชัดเจน: ความชันเพิ่มจาก 0.9853 เป็น 1.2624, ค่าตัดแกนเปลี่ยนจาก 0.0793 เป็น -0.6596. ผลรวมกำลังสองเพิ่มจาก 0.0391 เป็น 16.6590, RMSE เป็น 1.2907, และค่าตกค้างที่ค่าผิดปกติคือ 3.2984 กิโลเมตร.



รูปที่ 3.4: ค่าผิดปกติหนึ่งจุดกับเส้นที่ลากใหม่. เส้นน้ำเงินคือข้อมูลเดิม, เส้นแดงคือเส้นที่ลากโดยรวมค่าผิดปกติ, เส้นประเขียวคือเส้นที่ลากเมื่อตัดจุดนั้นออก (สร้างจาก `code/funkana/ch03.py`).

ถ้าตัดจุดสุดท้ายออก เส้นที่เหลือคือ $y = 0.0733 + 0.9875x$, ใกล้เส้นเดิมมาก; ผลรวมกำลังสองของเก้าจุดที่เหลือคือ 0.0380 (ไม่นับจุดที่ตัด). วิธีทนทาน (ค่ามัธยฐานของความชันทุกคู่) ให้ $y = 0.0725 + 0.9950x$ เช่นกัน. ทำไมกำลังสองน้อยที่สุดจึงปล่อยให้จุดเดียวเอียงเส้นทั้งเส้น?

คำตอบอยู่ในสมการปรกติ. สำหรับเส้นตรงมีสองสมการ:

$$\sum_{i=1}^{10} r_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i r_i = 0.$$

สมการแรกบอกว่าผลรวมค่าตกค้างเป็นศูนย์; ค่าผิดปกติมีค่าตกค้าง 3.2984, จุดอื่นจึงต้องรวมเป็น -3.2984. สมการที่สองถ่วงด้วยตำแหน่ง; จุดปลายขวาจึงออกแรงมาก. การฉายเลือกเส้นที่ใกล้ b ที่สุด; เส้นตรงมีอิสระเพียงสององศา จึงเพิกเฉยจุดหนึ่งโดยไม่กระทบจุดอื่นไม่ได้.

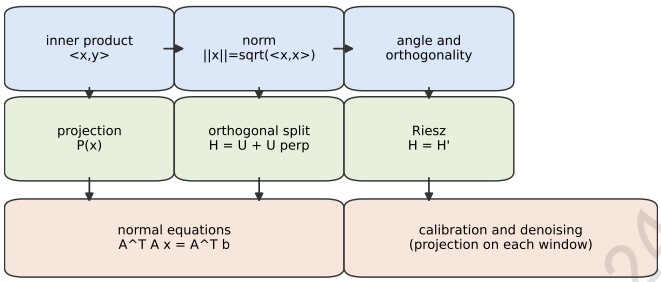
เพื่อแยกผลของปริภูมิแบบจำลองออกจากข้อมูลที่ผิด, เราเพิ่มคอลัมน์ตัวชี้ให้จุดสุดท้าย. เมทริกซ์ใหม่มีสามคอลัมน์: หนึ่ง, x, และตัวชี้ที่เป็น 1 เฉพาะแถวสุดท้าย. การฉายบนปริภูมิสามมิตินี้ให้เส้น

$$y = 0.0733 + 0.9875x$$

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

สำหรับ เก้า จุด แรก และ ให้ ค่า ตัว ชี้ 5.0392 ดูดค่าตกค้างของ ค่า ผิด ปกติ เข้าไป. ผล รวม กำลัง สอง กลับ มา อยู่ ที่ 0.0380 และค่าตกค้างที่เหลือมีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่า 0.1. ปริภูมิที่กว้างขึ้นจึงมีทิศใหม่แยกความผิดปกติ โดยไม่เอียงเส้นทั้งเส้น. แต่ตัวชี้หนึ่งจุดเทียบเท่าตัดจุดนั้นทิ้ง; ต้องมีเหตุผลอิสระว่าจุดนั้นผิดก่อน.

นี่คือคำตอบของจุดพลิก: ข้อมูลจุดนั้นผิดจริง แต่การฉายบนเส้นตรงสองมิติต้องประนีประนอมทุกจุด เพราะมีอิสระเพียงสององศา.



รูปที่ 3.5: แผนที่ของบทนี้. ผลคูณภายในให้ความยาวและมุม; การฉายให้จุดใกล้ที่สุดและการแยกตั้งฉาก; สมการปรกติเปลี่ยนการฉายให้เป็นระบบเชิงเส้นที่แก้ได้ (สร้างจาก `code/funkana/ch03.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้จุด $(0,2),(1,2),(2,5),(3,5)$. จงเขียนเมทริกซ์การออกแบบ, แก้สมการปรกติ, หาค่าตกค้าง และผลรวมกำลังสอง.

2. ให้จุด $(0,1),(1,2),(2,2)$. จงทำเช่นเดียวกับข้อ 1 และตรวจว่าผลรวมค่าตกค้างเป็นศูนย์.

3. ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. จงคำนวณ $P = A(A^TA)^{-1}A^T$, ตรวจว่า $P^2 = P$, $P^T = P$ และ $\operatorname{tr} P = 2$.

4. ให้ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. จงแสดงว่า $P^2 = P$, หา $\mathcal{R}(P)$ และ $\mathcal{N}(P)$, และอธิบายว่าทำไม P ไม่ใช่การฉายเชิงตั้งฉาก. จงหานอร์มของ P.

5. ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ และ $b = (1,2,3)^T$. จงแสดงว่าสมการปรกติมีคำตอบมากกว่าหนึ่ง, หาเซตคำตอบทั้งหมด, และหาคำตอบที่มีนอร์มเล็กที่สุด.

6. จงตัดสินว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ: “ถ้า A มีอันดับเต็มคอลัมน์ แล้วค่าตกค้างของคำตอบกำลังสองน้อยที่สุดต้องเป็นศูนย์เสมอ”. ถ้าเท็จ จงให้ตัวอย่างค้าน.

7. ใช้ฟังก์ชัน `denoise_summary` ใน `code/funkana/ch03.py` กับ $h = 4$ และ $h = 6$. จงรายงาน RMSE ก่อนและหลัง, ค่าสูงสุดก่อนและหลัง, และอธิบายว่าทำไม $h = 6$ จึงให้ RMSE ต่ำกว่าแต่ไม่ได้แปลว่าดีที่สุดทุกด้าน.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สำหรับจุด $(0,2),(1,2),(2,5),(3,5)$, เมทริกซ์การออกแบบมีแถว $(1,0),(1,1),(1,2),(1,3)$ และ $b=(2,2,5,5)^T$. จาก $A^TA=\left(\begin{smallmatrix}4&6\\6&14\end{smallmatrix}\right)$ และ $A^Tb=(14,27)^T$, สมการ $4a+6b=14$, $6a+14b=27$ ให้ $a=1.7$, $b=1.2$. ค่าที่ทำนายคือ $1.7,2.9,4.1,5.3$; ค่าตกค้างคือ $(0.3,-0.9,0.9,-0.3)$; ผลรวมกำลังสองคือ $0.09+0.81+0.81+0.09=1.8$.

2. A มีแถว $(1,0),(1,1),(1,2)$ และ $b=(1,2,2)^T$. จาก $A^TA=\left(\begin{smallmatrix}3&3\\3&5\end{smallmatrix}\right)$ และ $A^Tb=(5,6)^T$, แก้ได้ $a=7/6$, $b=1/2$. ค่าที่ทำนายคือ $7/6,5/3,13/6$; ค่าตกค้างคือ $(-1/6,1/3,-1/6)$ และผลรวมคือ $-1/6+1/3-1/6=0$. ผลรวมกำลังสองคือ $1/36+1/9+1/36=1/6$.

3. $A^TA=\begin{pmatrix}3&3\\3&5\end{pmatrix}$ และ $(A^TA)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-3\\-3&3\end{pmatrix}$. ดังนั้น
$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}.$$
ตรวจโดยการคูณ: $P^2=P$, $P^T=P$ และ $\operatorname{tr}P=(5+2+5)/6=2$.

4. $P^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=P$. เรนจ์คือแกน x; เคอร์เนลคือ $y=-x$ เพราะ $P(x,-x)=(0,0)$. ทั้งสองไม่ตั้งฉาก (ผลคูณภายใน $(1,0)$ กับ $(1,-1)$ คือ 1), จึง P ไม่ใช่การฉายเชิงตั้งฉาก. สำหรับ $\|(x,y)\|=1$, $\|P(x,y)\|=|x+y|\le\sqrt{2}$; ค่าสูงสุดที่ $(1,1)/\sqrt{2}$ คือ $\sqrt{2}$, จึง $\|P\|=\sqrt{2}$.

5. $A^TA=\left(\begin{smallmatrix}3&3\\3&3\end{smallmatrix}\right)$, $A^Tb=(6,6)^T$, สมการ $3x_1+3x_2=6$ ทั้งสอง; ดังนั้น $x_1+x_2=2$. คำตอบทั้งหมด $(t,2-t)$. นอร์มกำลังสอง $t^2+(2-t)^2=2(t-1)^2+2$ ต่ำสุดที่ $t=1$; คำตอบนอร์มเล็กสุด $(1,1)$. ค่าตกค้าง $b-A(1,1)=(-1,0,1)$, ผลรวมกำลังสอง 2.

6. เท็จ. ให้ $A=(1,1)^T$ และ $b=(0,1)^T$. แล้ว $A^TA=2$ และ $A^Tb=1$, ดังนั้น $x_*=1/2$. ค่าตกค้างคือ $(-1/2,1/2)$, ซึ่งไม่เป็นศูนย์; ผลรวมกำลังสองคือ $1/2$. อันดับเต็มคอลัมน์ให้คำตอบเดียว แต่ไม่ได้แปลว่า fit ได้พอดี.

7. สำหรับ $h=4$: RMSE $0.2176\to0.0459$, ค่าสูงสุด $0.4297\to0.2558$. สำหรับ $h=6$: RMSE $0.2176\to0.0199$, ค่าสูงสุด $0.4297\to0.2293$. $h=6$ ใช้จุดมากกว่า จึงลด RMSE. ที่ยอด $t=0.575$ ความคลาดเคลื่อนเป็น $+0.0225$ ($h=4$) และ -0.0003 ($h=6$); การรักษายอดจึงเลือก $h=6$, ส่วน $h=15$ ลดยอดลงประมาณ 0.023.

สรุปทั้งบท

- ผลคูณภายในให้ความยาว มุม และการตั้งฉาก; นอร์มจากมันต้องเป็นไปตามเอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน. ปริภูมิฮิลเบิร์ตคือพรีฮิลเบิร์ตที่บริบูรณ์ (L^2 และ ℓ^2 เป็นตัวอย่าง).
- บนเซตปิดคอนเวกซ์มีจุดใกล้ที่สุดเพียงจุดเดียว; บนปริภูมิย่อยปิด การฉายตั้งฉากแยกปริภูมิเป็นสองส่วน.
- การฉายตั้งฉากให้สมการปรกติ $A^TAx=A^Tb$; ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องแทนได้ด้วยผลคูณภายใน (รีสซ์).

อ่านต่อ. บทถัดไปใช้ผลคูณภายในกับฐานเชิงตั้งฉากและการตัดอนุกรม; การบีบอัดเสียงก็คือการฉายบนปริภูมิย่อย.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 4

ฐานเชิงตั้งฉาก อนุกรมฟูเรียร์ และการบีบอัดเสียง

สถานการณ์สมมติ: เพลงที่ฟังดู “ปกติ” กับฉาบที่ฟังดู “เบลอ”

สมมติว่าเราเปิดเพลงจากแอปสตรีมมิงในรถ ขณะที่สัญญาณโทรศัพท์อ่อน แอปจึงส่งเพลงด้วย**อัตราบิต** (bitrate) ต่ำ. อัตราบิตคือจำนวนบิตที่ใช้ส่งข้อมูลในหนึ่งวินาที; ยิ่งต่ำ ข้อมูลที่ส่งได้ก็ยิ่งน้อยลง. เพลงยังฟังได้ ยอดเสียงร้องยังชัด และทำนองยังครบ. เราอาจไม่สังเกตว่ามีข้อมูลถูกทิ้งไปจำนวนมาก. นี่คือสถานการณ์เปิดบท: เพลงที่บีบอัดแล้วยัง “ฟังดูปกติ”.

จากนั้นถึงท่อนฉาบ. **ฉาบ** (cymbal) คือเครื่องดนตรีโลหะที่ตีแล้วเกิดเสียงสั้น ๆ. เสียงฉาบไม่ได้เป็นเสียงเดียวที่ค้างอยู่นาน ๆ; มันเป็นเสียงสั้น ๆ ที่มีพลังงานกระจายไปทั่วช่วงความถี่สูง. เมื่อเล่นจากไฟล์เดียวกัน ฉาบกลับฟังดูเบลอและสั้นลง เหมือนถูก “ปาด” หางเสียงทิ้ง. คำถามของบทนี้คือ: เราโยนอะไรทิ้งไปตอนบีบอัด, โยนได้มากแค่ไหน, และเราวัด “สิ่งที่หายไป” อย่างซื่อสัตย์ได้อย่างไร.

คำตอบสั้น ๆ คือ เราไม่ได้ทำให้ลำโพงแย่ลง. เราตัด**ฐาน**ที่ใช้แทนเสียงให้เหลือเพียงไม่กี่ทิศ. เพลงที่มีเสียงหลักไม่กี่ความถี่ทนต่อการตัดนี้ได้ เพราะพลังงานส่วนใหญ่อยู่ในสัมประสิทธิ์ไม่กี่ตัว. ฉาบมีพลังงานสูงกระจายอยู่ในสัมประสิทธิ์จำนวนมาก การเก็บเฉพาะตัวที่ใหญ่ที่สุดจึงตัดส่วนที่ทำให้เสียงฉาบ “คม” ออกไป. หัวข้อ 4.3 จะตอบคำถามนี้ด้วยตัวเลขจากการคำนวณของเรา.

สถานการณ์ทั้งหมดเป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าแอปหรือรุ่นลำโพงใดทำอะไร. ตัวเลขที่อ้างว่าเป็นการคำนวณของเราในบทนี้มาจากโค้ดและมีแบบทดสอบยืนยัน.

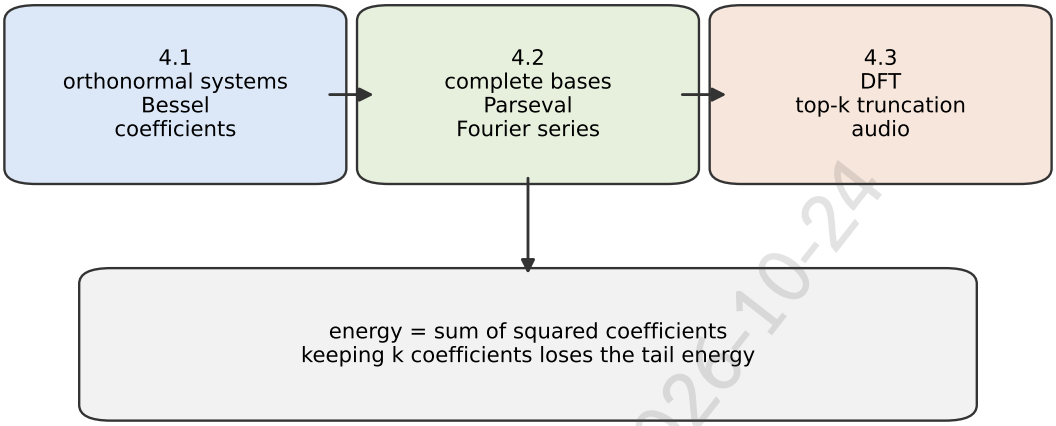
ภาพรวมบท

บทนี้ตอบคำถามเดียวซ้ำในสามระดับ: *เราเขียนเวกเตอร์เป็นผลรวมของชิ้นส่วนตั้งฉากได้เมื่อไร, และแต่ละชิ้นส่วนแบกพลังงานไปเท่าไร.* ระดับแรกคือ**ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal system) ซึ่งคือชุดเวกเตอร์ยาวหนึ่งที่ตั้งฉากกันเป็นคู่ ๆ. ระดับที่สองคือ**ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal basis) ซึ่งเป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์: ทุกเวกเตอร์เขียนเป็นอนุกรมได้. ระดับที่สามคือ**ผลการแปลงฟูเรียร์วิยุต** (discrete Fourier transform, DFT) ซึ่งเปลี่ยนลำดับตัวอย่างจำนวนจำกัดให้เป็นพิกัดความถี่; มันเป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{C}^N$ ที่ใช้กับเสียงบนคอมพิวเตอร์.

ภาพที่ต้องจำคือกล่องเสียงหนึ่งกล่องกับแกนหลายแกนที่ตั้งฉากกัน. การฉายเสียงลงบนแกนหนึ่ง ๆ ให้ตัวเลขหนึ่งตัวคือสัมประสิทธิ์. **อสมการเบสเซล** (Bessel inequality) บอกว่าผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์ที่เราเก็บไว้ต้องไม่เกินพลังงานทั้งหมดของเสียง; คำว่า**พลังงาน** (energy) ในที่นี้หมายถึงผลรวมกำลังสองของขนาดของส่วนประกอบทั้งหมด. **เอกลักษณ์ปาร์เซวาล** (Parseval identity) บอกว่าเมื่อแกนครบทั้งชุด ผลรวมนั้นเท่ากับพลังงานทั้งหมดพอดี. เพราะฉะนั้น “เก็บ k ตัวแรก” จึงมีความหมายทางเรขาคณิตชัดเจน: เราทิ้งพลังงานส่วนที่เหลือ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลำดับของบทคือ: สร้างระบบเชิงตั้งฉากปรกติและพิสูจน์อสมการเบสเซลในหัวข้อ 4.1; จากนั้นจึงพิสูจน์ว่าเมื่อระบบบริบูรณ์จะได้อนุกรมฟูเรียร์และเอกลักษณ์ปาร์เซวาลในหัวข้อ 4.2; แล้วเขียน DFT และการบีบอัดเสียงด้วยการเก็บสัมประสิทธิ์ใหญ่สุด k ตัวในหัวข้อ 4.3.



รูปที่ 4.1: แผนผังของบทนี้. หัวข้อ 4.1 ให้ระบบเชิงตั้งฉากปรกติและอสมการเบสเซล; หัวข้อ 4.2 เพิ่มความบริบูรณ์ของระบบและได้อนุกรมฟูเรียร์กับปาร์เซวาล; หัวข้อ 4.3 ใช้ฐาน DFT กับการตัดทอนสำหรับเสียง (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

ร่างไม่เป็นทางการ · Preprint · 2026-10-24

4.1 ระบบเชิงตั้งฉากปรกติและอสมการเบสเซล

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพว่าเรามีไม้บรรทัดหลายอันที่ตั้งฉากกัน. ถ้าเราอยากรู้ว่าเวกเตอร์ x ยาวเท่าไรในทิศของไม้บรรทัดอันหนึ่ง เราไม่ต้องยุ่งกับทิศอื่นเลย: ใช้ผลคูณภายในกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของทิศนั้น. ระบบเชิงตั้งฉากปรกติคือชุดไม้บรรทัดที่ทำแบบนี้ได้ทีละอัน. อสมการเบสเซลคือข้อเท็จจริงว่าผลรวมของ “เงา” ทั้งหมดที่วัดได้ ต้องไม่ยาวเกินตัว x เอง.

นิยาม 4.1.1: ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ

ให้ H เป็นปริภูมิที่มีผลคูณภายใน (ทบทวนจากบท“เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต”). เซต $S \subset H$ เรียกว่า**ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal system) ถ้า

$$\|e\| = 1 \quad \text{สำหรับทุก } e \in S, \qquad \langle e, f \rangle = 0 \quad \text{สำหรับทุก } e, f \in S \text{ ที่ } e \neq f.$$

ถ้า S เป็นลำดับ $(e_k)_{k \in N}$ เราจะเรียกมันว่าระบบเชิงตั้งฉากปรกติเช่นกัน. คำว่า “เชิงตั้งฉาก” อย่างเดียวหมายถึงเงื่อนไข $\langle e, f \rangle = 0$ โดยไม่บังคับความยาว; เราเรียกเวกเตอร์ทุกตัวในระบบนั้นว่าตั้งฉากกัน.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

เงื่อนไขมีสองข้อเท่านั้น. ข้อแรกบอกว่าไม้บรรทัดทุกอันยาวหนึ่งหน่วย. ข้อสองบอกว่าไม้บรรทัดทุกคู่วางตั้งฉากกัน. ตัวอย่างที่คุ้นเคยคือ $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ ใน $\mathbb{R}^3$: แต่ละตัวยาวหนึ่ง และผลคูณภายในระหว่างคู่ต่างกันเป็นศูนย์. ตัวอย่างที่ไม่ใช่: $(1,0)$ กับ $(1,1)$ ใน $\mathbb{R}^2$ เพราะผลคูณภายในเป็น $1 \neq 0$. อีกตัวอย่างที่ไม่ใช่: เซตที่มีเวกเตอร์ศูนย์ เพราะเวกเตอร์ศูนย์ยาวไม่เท่ากับหนึ่ง.

นิยาม 4.1.2: ฐานเชิงตั้งฉากปรกติและระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์

ให้ $S \subset H$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ. เราเรียก S ว่า**ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal basis) ถ้าไม่มีระบบที่ใหญ่กว่า S อย่างแท้จริง กล่าวคือ

$$S \subset T, \quad T \text{ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ} \quad \Longrightarrow \quad T = S.$$

ฐานเชิงตั้งฉากปรกติเรียกอีกชื่อว่า**ระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์** (complete orthonormal system). เงื่อนไขที่ว่าเพิ่มเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับทุกตัวในระบบไม่ได้อีกนี้ เรียกว่า**ความบริบูรณ์** (completeness) ของระบบ.

ข้อควรระวัง

ฐานเชิงตั้งฉากปรกติไม่ใช่ฐานของปริภูมิเวกเตอร์ในความหมายพีชคณิต เพราะการรวมเชิงเส้นจำกัดไม่พอ; แต่เมื่อระบบบริบูรณ์ ทุกเวกเตอร์เขียนเป็นอนุกรมได้ (ทฤษฎีบทความสมมูลข้างล่าง). คำว่า “บริบูรณ์” ยังใช้กับปริภูมิฮิลเบิร์ตด้วย: ปริภูมิ*บริบูรณ์*หมายถึงทุกลำดับ Cauchy ลู่เข้าในปริภูมิ. ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ*บริบูรณ์*หมายถึงเติมเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับทุกตัวในระบบไม่ได้อีก. ทั้งสองบริบทเกี่ยวข้องกันในทฤษฎี แต่ไม่ได้แปลแทนกัน.

ลองเอง: เขียนเวกเตอร์ด้วยไม้บรรทัดสามอัน

ใน $\mathbb{R}^3$ ให้

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \qquad e_3 = (0,0,1),$$

และ $x = (3,1,4)$. จงตรวจว่า e_1, e_2, e_3 เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ แล้วเขียน x เป็นผลรวมเชิงเส้นของ e_1, e_2, e_3.

การตรวจความตั้งฉากใช้ผลคูณภายในมาตรฐาน:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{1}{2}(1-1) = 0, \qquad \langle e_1, e_3 \rangle = 0, \qquad \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

แต่ละตัวยาวหนึ่ง เพราะ $\|e_1\|^2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$ และทำนองเดียวกัน. สัมประสิทธิ์คือ

$$c_1 = \langle x, e_1 \rangle = \frac{3+1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284, \qquad c_2 = \langle x, e_2 \rangle = \frac{3-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142,$$

และ

$$c_3 = \langle x, e_3 \rangle = 4.$$

ดังนั้น

$$x = 2\sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{2}\, e_2 + 4 e_3.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ตรวจพลังงาน: กำลังสองของสัมประสิทธิ์คือ $8, 2, 16$ และผลรวมเป็น 26 ซึ่งเท่ากับ $\|x\|^2 = 9 + 1 + 16 = 26$ พอดี. ตัวอย่างนี้เป็นกรณีที่ระบบครบทั้งสามทิศ. ถ้าเก็บไว้เพียง e_1 เราจะเหลือพลังงาน 8 จาก 26; ระยะที่หายไปกำลังสองคือ 18 และระยะทางคือ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.2426$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

กระบวนการแกรม–ชมิดท์ (Gram--Schmidt process) คือวิธีสร้างระบบเชิงตั้งฉากปรกติทีละตัวจากเซตอิสระเชิงเส้น: นำเวกเตอร์ใหม่มาลบส่วนที่ชี้ไปทางเวกเตอร์เก่า แล้วหารด้วยความยาว.

ทฤษฎีบท 4.1.1: กระบวนการแกรม–ชมิดท์

สมมติว่า $x_1, x_2, \dots$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขึ้นต่อกันเชิงเส้นในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ซึ่งคือปริภูมิที่มีผลคูณภายในและบริบูรณ์. เราสามารถสร้างระบบเชิงตั้งฉากปรกติ S ที่ขึงปริภูมิปิดเดียวกันกับเวกเตอร์เหล่านี้:

$$\overline{\operatorname{lin}} S = \overline{\operatorname{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** สร้างทีละตัว: เอา x_{k+1} ลบส่วนที่ชี้ไปทางเวกเตอร์ที่สร้างไว้แล้ว แล้วปรับความยาวเป็นหนึ่ง. ส่วนที่ลบไปอยู่ในปริภูมิเดิม จึงไม่เปลี่ยนผลการแผ่เชิงเส้น; การลบทำให้เวกเตอร์ใหม่ตั้งฉากกับตัวเก่าทุกตัว.

1. **ตัวแรก.** ให้ $e_1 = x_1/\|x_1\|$. ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์เพราะ $x_1 \neq 0$ ตามความเป็นอิสระเชิงเส้น.

2. **ขั้นอุปนัย.** สมมติว่าสร้าง $e_1, \dots, e_k$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ และ

   $$\operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_k\}.$$

   ให้

   $$w_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_j \rangle e_j, \qquad e_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}.$$

   ถ้า $w_{k+1} = 0$ แล้ว $x_{k+1} \in \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_k\}$ ซึ่งขัดกับความเป็นอิสระเชิงเส้น. เพราะฉะนั้น $w_{k+1} \neq 0$ และหารได้.

3. **ขั้นที่สาม: ตรวจทิศทางและความยาว.** สำหรับ $j \leq k$,

   $$\langle w_{k+1}, e_j \rangle = \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0.$$

   ดังนั้น $e_{k+1} \perp e_j$ และ $\|e_{k+1}\| = 1$ โดยการหารด้วยนอร์ม.

4. **ขั้น ที่ สี่: ปริภูมิ ย่อย ยัง เหมือน เดิม.** เพราะ w_{k+1} เป็นผลรวมเชิงเส้นของ x_{k+1} กับ $e_1, \dots, e_k$ จึงอยู่ใน $\operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$; ย้อนกลับ,

   $$x_{k+1} = w_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_j \rangle e_j \in \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_{k+1}\}.$$

   ทั้งสองปริภูมิจึงมีมิติ $k+1$ และเท่ากัน.

5. **สรุป.** ให้ $S = \{e_1, e_2, \dots\}$. จากขั้นที่แล้ว $\operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_k\}$ ทุก k; เมื่อรวมทุก k และปิดคลุมทั้งสองข้าง จะได้ผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดแล้วเท่ากัน.

สรุป: การลบส่วนที่อยู่ในปริภูมิเดิมทำให้เวกเตอร์ใหม่ตั้งฉากกับตัวเก่า และการหารด้วยนอร์มทำให้ยาวหนึ่ง; ผลการแผ่เชิงเส้นจึงไม่เปลี่ยน. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลองเอง: แกรม–ชมิดท์สามตัว

ให้ $x_1 = (1,1,0)$, $x_2 = (1,0,1)$ และ $x_3 = (0,1,1)$ ใน $\mathbb{R}^3$. จงทำกระบวนการแกรม–ชมิดท์และตรวจว่าผลลัพธ์เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ.

เริ่มจาก $e_1 = (1,1,0)/\sqrt{2}$. ต่อไป

$$w_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \qquad \|w_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}.$$

ดังนั้น

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2).$$

สำหรับตัวที่สาม,

$$w_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

และ $\|w_3\|^2 = \frac{4}{3}$, จึง

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1).$$

ตรวจได้ว่า $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$ และแต่ละตัวยาวหนึ่ง. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ทฤษฎีบท 4.1.2: อสมการเบสเซลสำหรับระบบจำกัด

ให้ $(e_1, \dots, e_n)$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติในปริภูมิที่มีผลคูณภายใน X. แล้วสำหรับทุก $x \in X$,

$$0 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 = \operatorname{dist}(x, \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\})^2 .$$

โดยเฉพาะ

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** กระจายกำลังสองของระยะจาก x ถึงผลรวมเชิงเส้นใด ๆ แล้วจัดเป็นกำลังสองสมบูรณ์. ค่าที่ทำให้ทุกพจน์เป็นศูนย์คือการเลือกสัมประสิทธิ์เป็นผลคูณภายใน.

1. **กระจายสำหรับสัมประสิทธิ์ทั่วไป.** ให้ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ เป็นสเกลาร์. ใช้ $\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{kl}$,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \overline{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\langle x, e_k\rangle} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

2. **ขั้นที่สอง: เติมพจน์ให้ครบกำลังสอง.** บวกและลบ $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle x, e_k\rangle|^2.$$

3. **ขั้นที่สาม: หาค่าสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ระยะสั้นสุด.** พจน์สุดท้ายไม่ติดลบและเป็นศูนย์เมื่อ $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ ทุก k. ดังนั้นผลรวมเชิงเส้นนี้ให้ระยะกำลังสองต่ำสุด และค่าต่ำสุดคือ $\|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2$. เนื่องจากระยะกำลังสองไม่ติดลบ จึงได้อสมการเบสเซล.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. **ระยะถึงปริภูมิย่อย.** ผลรวมเชิงเส้นของ $e_1, \dots, e_n$ ทุกรูปเขียนเป็น $\sum \alpha_k e_k$ ได้ เพราะระบบนี้เป็นฐานของปริภูมิย่อยที่มันขึง. ดังนั้นค่าต่ำสุดข้างต้นคือกำลังสองของระยะจาก x ถึงปริภูมิย่อยนั้นพอดี.

สรุป: เมื่อเขียนระยะกำลังสองใหม่ จะเหลือผลบวก $|\alpha_k - \langle x, e_k\rangle|^2$; ทุกพจน์มีค่าอย่างน้อยศูนย์ จึงไม่มีสัมประสิทธิ์ชุดใดให้ระยะสั้นกว่าการเลือก $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$. □

ข้อควรระวัง

อสมการเบสเซลเป็น*อสมการ* ไม่ใช่สมการ. ความเท่ากันจะเกิดเมื่อ x อยู่ในปริภูมิย่อยที่ระบบขึงเท่านั้น. ตัวอย่างใน $\mathbb{R}^2$: ให้ $e_1 = (1, 0)$ และ $x = (0, 1)$. แล้ว $\langle x, e_1\rangle = 0$ แต่ $\|x\|^2 = 1$; ผลรวมสัมประสิทธิ์เป็น 0 ไม่เท่ากับ 1. ระบบที่มีเวกเตอร์เดียวจึงยังไม่ครบ.

ต่อไปเราทดสอบอสมการในปริภูมิ $L^2(-\pi, \pi)$ ซึ่งเป็นปริภูมิของฟังก์ชันที่กำลังสองหาปริพันธ์ได้บนช่วงนี้.

ลองเอง: เบสเซลใน L^2

บน $(-\pi, \pi)$ ให้

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_2 = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \qquad e_3 = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \qquad f(t) = t.$$

จงคำนวณสัมประสิทธิ์ทั้งสามและตรวจอสมการเบสเซล.

ฟังก์ชัน $f(t) = t$ เป็นฟังก์ชันคี่. ดังนั้น

$$\langle f, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = 0, \qquad \langle f, e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t\, dt = 0.$$

ส่วนสัมประสิทธิ์ที่สาม

$$\langle f, e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi} \approx 3.5449.$$

กำลังสองคือ $4\pi \approx 12.5664$, ขณะที่

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{2\pi^3}{3} \approx 20.6709.$$

อสมการเบสเซลจึงเป็น $4\pi \le 2\pi^3/3$, จริงและไม่ใช่ความเท่ากัน เพราะ f ไม่ได้อยู่ในปริภูมิที่ขึงด้วย e_1, e_2, e_3 เพียงสามตัว. ระยะที่เหลือกำลังสองคือ $2\pi^3/3 - 4\pi \approx 8.1045$ และระยะทางประมาณ 2.8468. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ทฤษฎีบท 4.1.3: อสมการเบสเซลสำหรับระบบอนันต์

ให้ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติในปริภูมิฮิลเบิร์ต H. แล้วสำหรับทุก $x \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

อนุกรมทางซ้ายลู่เข้า และผลบวกไม่เกินกำลังสองของนอร์ม.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ผลจำกัดกับผลบวกย่อยทุกตัว. ผลบวกย่อยของพจน์ที่ไม่ติดลบมีขอบเขตบนด้วย $\|x\|^2$ จึงลู่เข้าและลิมิตไม่เกินขอบเขตนั้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

1. **ผลบวกย่อยจำกัด.** สำหรับทุก N ให้ $S_N = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2$. ระบบ $(e_1, \dots, e_N)$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติจำกัด จึงได้ $S_N \le \|x\|^2$ จากอสมการเบสเซลสำหรับระบบจำกัด.

2. **ลู่เข้า.** ลำดับ (S_N) ไม่ลดลงและมีขอบเขตบนด้วย $\|x\|^2$. ลำดับจำนวนจริงที่ไม่ลดลงและมีขอบเขตบนย่อมลู่เข้าสู่ค่าที่ไม่เกินขอบเขตบนนั้น.

3. **สรุป.** ลิมิตคือผลบวกของอนุกรม และมีค่าไม่เกิน $\|x\|^2$.

สรุป: ทุกผลบวกย่อยถูกควบคุมด้วย $\|x\|^2$; ลำดับผลบวกที่ไม่ติดลบและไม่ลดลงจึงลู่เข้า และลิมิตยังไม่เกินขอบเขตเดิม. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ข้อสรุป “ลู่เข้า” ในทฤษฎีบทนี้สำคัญกว่าตัวอสมการ. ถ้าไม่รู้ว่าอนุกรมลู่เข้า การเขียน $\sum_{n=1}^{\infty}$ ก็ยังไม่มีความหมายเป็นจำนวนจริง. เราได้ทั้งการลู่เข้าและขอบเขตจากการที่ผลบวกย่อยไม่ลดลงและมีขอบเขต. ในหัวข้อ 4.2 เราจะเห็นว่าเมื่อระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์ อสมการนี้กลายเป็นสมการสำหรับทุก x.

บทตั้ง 4.1.4: สัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์มีไม่เกินนับได้

ให้ $S \subset H$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ และ $x \in H$. แล้วเซต

$$S_x = \{e \in S : \langle x, e\rangle \neq 0\}$$

เป็นเซตนับได้อย่างมาก (จำกัดหรือเรียงเป็นลำดับได้).

พิสูจน์. **แนวคิด.** แบ่งตามขนาดของสัมประสิทธิ์: ตัวที่ใหญ่กว่าหนึ่งส่วน n มีได้ไม่เกิน $n^2\|x\|^2$ ตัว. รวมชั้นเหล่านี้ทั้งหมดด้วยจำนวนนับได้.

1. **ชั้นที่มีขนาดใหญ่.** สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ ให้

$$S_{x,n} = \left\{ e \in S : |\langle x, e\rangle| \ge \frac{1}{n} \right\}.$$

ถ้า $e_1, \dots, e_m \in S_{x,n}$ ต่างกันทั้งหมด แล้ว

$$\frac{m}{n^2} \le \sum_{j=1}^{m} |\langle x, e_j\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

ตามอสมการเบสเซลสำหรับระบบจำกัด. ดังนั้น $m \le n^2\|x\|^2$; ชั้นนี้จึงมีสมาชิกได้ไม่เกินจำนวนเต็มบวกตัวนั้น.

2. **รวมชั้น.** ถ้า $\langle x, e\rangle \neq 0$ แล้ว $|\langle x, e\rangle| \ge 1/n$ สำหรับจำนวนเต็ม n ที่ใหญ่พอ. ดังนั้น

$$S_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{x,n}.$$

3. **นับได้.** แต่ละ $S_{x,n}$ จำกัด และยูเนียนของเซตจำกัดจำนวนนับได้เป็นเซตนับได้อย่างมาก.

สรุป: ทุกค่าที่ไม่เป็นศูนย์ตกอยู่ในชั้น $S_{x,n}$ บางชั้น; ชั้นละจำนวนจำกัด จึงมีสมาชิกทั้งหมดได้ไม่เกินนับได้. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลองเอง: สัมประสิทธิ์ที่มองไม่เห็น

ให้ $H = \ell^2(\mathbb{N})$ (ปริภูมิของลำดับที่ผลรวมกำลังสองจำกัด) และ e_n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานตัวที่ n. ให้ $x = (1, 1/2, 1/3, 0, 0, \dots)$. จงหาว่า $\langle x, e_n\rangle \neq 0$ สำหรับ n ใด และตรวจอสมการเบสเซล.

เพราะ e_n มี 1 ที่ตำแหน่ง n และ 0 ที่อื่น, $\langle x, e_n\rangle = x_n$. ดังนั้นสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์คือ $n = 1, 2, 3$ เท่านั้น; เซตนี้จำกัด. ผลรวมกำลังสองคือ

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{36 + 9 + 4}{36} = \frac{49}{36} \approx 1.3611,$$

ขณะที่ $\|x\|^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$ เพราะ x มีพิกัดไม่เป็นศูนย์เพียงสามตัว. ผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์จึงเท่ากับ $\|x\|^2$ พอดี: อสมการเบสเซลเป็นความเท่ากัน และระยะที่เหลือกำลังสองเป็นศูนย์. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

สรุปใจความ

- ระบบเชิงตั้งฉากปรกติคือชุดเวกเตอร์ยาวหนึ่งที่ตั้งฉากกันทุกคู่; ฐานเชิงตั้งฉากปรกติคือระบบที่ไม่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยอื่นตั้งฉากกับทุกตัวเหลือให้เพิ่ม.
- กระบวนการแกรม–ชมิดท์เปลี่ยนเซตอิสระเชิงเส้นเป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติโดยไม่เปลี่ยนผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดแล้ว.
- สำหรับระบบจำกัด สัมประสิทธิ์ $\langle x, e_k\rangle$ ให้จุดที่ใกล้ x ที่สุดในปริภูมิย่อย และระยะที่เหลือกำลังสองคือ $\|x\|^2 - \sum |\langle x, e_k\rangle|^2$.
- อสมการเบสเซล $\sum |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$ จึงเป็นการเปรียบเทียบพลังงานของเงากับพลังงานของเวกเตอร์เดิม.
- มีสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ได้ไม่เกินนับได้ตัว; อนุกรมที่ดูเหมือนมีพจน์มากมายจึงมีเพียงจำนวนนับได้ที่ต้องคำนวณ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $e_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $e_2 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$, $e_3 = (0, 0, 1)$ และ $x = (2, -1, 3)$. จงหาสัมประสิทธิ์ทั้งสามและตรวจว่าผลรวมกำลังสองเท่ากับ $\|x\|^2$.

2. ให้ $u_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $u_2 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$ และ $x = (1, 2, 2)$. จงหาสัมประสิทธิ์ $\langle x, u_1\rangle, \langle x, u_2\rangle$ และตรวจอสมการเบสเซล. ระยะจาก x ถึง $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ เท่าไร?

3. จงทำแกรม–ชมิดท์กับ $v_1 = (2, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ แล้วเขียน e_1, e_2, e_3 พร้อมตรวจว่าตั้งฉากกันเป็นคู่.

4. บน $[0, 1]$ ให้ $e_1 = 1$ และ $f(t) = t$. จงคำนวณ $\langle f, e_1\rangle$ และตรวจอสมการเบสเซล. จากนั้นเพิ่ม $e_2 = \sqrt{3}(2t - 1)$ และตรวจว่าอสมการกลายเป็นสมการ.

5. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน: (ก) ระบบเชิงตั้งฉากปรกติทุกระบบเป็นเซตอิสระเชิงเส้น; (ข) ถ้า $\langle x, e_n\rangle = 0$ ทุก n แล้ว $x = 0$; (ค) อสมการเบสเซลเป็นสมการเสมอเมื่อระบบมีเวกเตอร์มากกว่าหนึ่งตัว.

6. ใช้ฟังก์ชัน `r3_expansion` และ `gram_schmidt_example` ใน `code/funkana/ch04.py`. จงตรวจว่าผลลัพธ์ของแกรม–ชมิดท์ตั้งฉากกันจริงและมีนอร์มหนึ่ง แล้วรายงานค่าที่มากที่สุดของ $|\langle e_i, e_j\rangle|$ สำหรับ $i \neq j$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สัมประสิทธิ์คือ $\langle x, e_1\rangle = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$, $\langle x, e_2\rangle = 3/\sqrt{2} \approx 2.1213$ และ $\langle x, e_3\rangle = 3$. กำลังสองคือ $0.5, 4.5, 9$ รวม 14 ซึ่งเท่ากับ $\|x\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$.

2. $\langle x, u_1\rangle = 3/\sqrt{2} \approx 2.1213$ และ $\langle x, u_2\rangle = -1/\sqrt{2} \approx -0.7071$. กำลังสองรวม $4.5 + 0.5 = 5 \le \|x\|^2 = 9$. ระยะกำลังสองคือ $9 - 5 = 4$ จึงระยะเท่ากับ 2. (ระยะถึงปริภูมิย่อยสองมิติคือส่วนในทิศ e_3 ซึ่งมีขนาด 2.)

3. $\|v_1\| = 3$ จึง $e_1 = (2, 1, 2)/3$. ต่อไป $\langle v_2, e_1\rangle = (-2 + 0 + 2)/3 = 0$; บังเอิญ v_2 ตั้งฉากกับ e_1 อยู่แล้ว และ $\|v_2\| = \sqrt{2}$ จึง $e_2 = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$. สำหรับ v_3,

   $$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{3}(2, 1, 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right).$$

   ดังนั้น $\|w_3\|^2 = 1/36 + 4/9 + 1/36 = 1/2$ และ $e_3 = (-1, 4, -1)/\sqrt{18}$. ตรวจได้ว่า $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$ และแต่ละตัวยาวหนึ่ง.

4. $\langle f, e_1\rangle = \int_0^1 t\,dt = 1/2$; กำลังสอง $1/4 \le \|f\|^2 = 1/3$. กับ e_2: $\langle f, e_2\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 t(2t-1)\,dt = \sqrt{3}(2/3 - 1/2) = \sqrt{3}/6$. กำลังสอง $1/12$; รวม $1/4 + 1/12 = 1/3 = \|f\|^2$. ความเท่ากันเกิดเพราะ 1 กับ $2t - 1$ ขึงฟังก์ชันเชิงเส้นทั้งหมดบน $[0, 1]$ ซึ่งรวม t.

5. (ก) จริง: ถ้า $\sum c_k e_k = 0$ แล้วหาผลคูณภายในกับ e_j ได้ $c_j = 0$. (ข) เท็จ: ใน $\mathbb{R}^2$ กับ $e_1 = (1, 0)$ และ $x = (0, 1)$ สัมประสิทธิ์เป็นศูนย์แต่ $x \neq 0$. (ค) เท็จ: ตัวอย่างในข้อ (ข) มีเวกเตอร์หนึ่งตัว; ถ้าต้องการมากกว่าหนึ่งตัว ใช้ e_1, e_2 ใน $\mathbb{R}^3$ กับ $x = e_3$ ก็ยังได้อสมการ $0 \le 1$ ไม่เป็นสมการ.

6. ค่าที่โปรแกรมรายงานมีขนาดไม่เกิน 10^{-14} (ระดับเลขทศนิยมของเครื่อง); ตามทฤษฎีเป็นศูนย์. ดังนั้นการตรวจเชิงตัวเลขยืนยันว่าตั้งฉากกัน.

4.2 ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ อนุกรมฟูเรียร์ และเอกลักษณ์ปาร์เซวาล

ภาพรวมก่อนอ่าน

หัวข้อ 4.1 บอกว่า “เงา” ของ x บนระบบเชิงตั้งฉากปรกติยาวได้ไม่เกิน x. คำถามต่อไปคือ: เมื่อไรเงาทั้งหมดรวมกันยาวเท่ากับ x พอดี? คำตอบคือเมื่อระบบ “ครบ” ไม่มีทิศตั้งฉากเหลือ. ในกรณีนั้น x เขียนเป็นอนุกรมของสัมประสิทธิ์ได้และพลังงานของ x เท่ากับผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์. นี่คือเอกลักษณ์ปาร์เซวาล ซึ่งเป็นกฎการอนุรักษ์พลังงานของฐานเชิงตั้งฉากปรกติ.

ก่อนพิสูจน์ความบริบูรณ์ เราต้องรู้ก่อนว่าอนุกรมของสัมประสิทธิ์สองชุดคูณกันได้. บทตั้งต่อไปนี้คือเครื่องมือเดียวที่ต้องใช้: ผลคูณของสัมประสิทธิ์สองชุดรวมกันได้อย่างสมบูรณ์ เพราะแต่ละชุดอยู่ใน ℓ^2 ตามอสมการเบสเซล.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 4.2.1: ผลคูณของสัมประสิทธิ์รวมกันได้

ให้ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติในปริภูมิฮิลเบิร์ต H. แล้วสำหรับ $x, y \in H$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle x, e_n\rangle\big|\,\big|\langle e_n, y\rangle\big| < \infty.$$

ยิ่งกว่านั้น ผลบวกมีค่าไม่เกิน $\|x\|\,\|y\|$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** มองสองลำดับของสัมประสิทธิ์เป็นเวกเตอร์ใน ℓ^2 แล้วใช้โคชี–ชวาร์ซ (ทบทวนจากบท“จากหน้าจอสู่ปริภูมิ”). อสมการเบสเซลบอกว่าแต่ละลำดับมีนอร์ม ℓ^2 ไม่เกินนอร์มของเวกเตอร์เดิม.

1. **เปลี่ยนรูปพจน์.** เพราะ $\langle e_n, y\rangle = \overline{\langle y, e_n\rangle}$, ขนาดจึงเท่ากับ $|\langle y, e_n\rangle|$.
2. **ขั้นที่สอง: เปรียบเทียบผลบวกของผลคูณ.** ใช้อสมการโคชี–ชวาร์ซกับพิกัดสองชุด; สำหรับผลบวกจำกัด N,
$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|\,|\langle y, e_n\rangle| \le \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle y, e_n\rangle|^2\right)^{1/2}.$$
3. **ใช้เบสเซลสองครั้ง.** แต่ละวงเล็บมีค่าไม่เกิน $\|x\|$ และ $\|y\|$ ตามอสมการเบสเซลสำหรับระบบอนันต์. ดังนั้นผลบวกย่อยทุกตัวมีขอบเขตบนด้วย $\|x\|\,\|y\|$.
4. **ลู่เข้า.** ผลบวกย่อยเป็นลำดับไม่ลดลงของจำนวนจริงที่ไม่ติดลบและมีขอบเขตบน จึงลู่เข้า และลิมิตไม่เกินขอบเขตนั้น.

สรุป: สองลำดับสัมประสิทธิ์อยู่ใน ℓ^2; โคชี–ชวาร์ซจึงควบคุมผลคูณของพวกมันด้วยผลคูณของนอร์ม. □

สำหรับเซตดัชนี S ที่อาจนับไม่ได้ เราให้ความหมายของ $\sum_{e\in S}$ โดยแจงนับเฉพาะสมาชิกที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์. เรากล่าวว่าอนุกรมลู่เข้าแบบ*ไม่มีเงื่อนไข* (unconditional convergence) เมื่อลิมิตไม่ขึ้นกับการเลือกการแจงนับ. ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะพิสูจน์ว่าลิมิตนั้นมีจริงและไม่ขึ้นกับการแจงนับ.

ทฤษฎีบท 4.2.2: การฉายลงบนปริภูมิที่ระบบขึง

เลือก $S \subset H$ ที่เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ และสำหรับ $x \in H$ กำหนด Px เป็นผลบวกของสัมประสิทธิ์คูณเวกเตอร์ใน S ตามนิยามที่ไม่ขึ้นกับการแจงนับด้านบน. แล้ว

(a) สำหรับทุก $x \in H$ อนุกรม $\sum_{e\in S}\langle x, e\rangle e$ ลู่เข้าแบบไม่มีเงื่อนไข;

(b) P เป็นการฉายเชิงตั้งฉากลงบน $\overline{\operatorname{lin}} S$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนอนุกรมตามการแจงนับของสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์. ผลบวกย่อยเป็นลำดับ Cauchy เพราะหางของอนุกรมกำลังสองเล็ก. ลิมิต y อยู่ในปริภูมิปิดที่ระบบขึง และ $x - y$ ตั้งฉากกับทุก $e \in S$; นั่นคือสมบัติของเศษเหลือของการฉาย.

1. **เหลือเพียงจำนวนนับได้.** เซต $S_x = \{e : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ นับได้อย่างมากตามบทแทรกสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์. เลือกการแจงนับ $e_1, e_2, \ldots$ ของเซตนี้ (ถ้าเซตจำกัด อนุกรมก็เป็นผลบวกจำกัด).

อยู่ในช่วง Preprint · 2026-10-24

2. **อนุกรม Cauchy.** สำหรับ $N < M$,

$$\left\| \sum_{n=N}^{M} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

เพราะเวกเตอร์ตั้งฉากปรกติ. หางนี้เป็นผลต่างของผลบวกย่อยของอนุกรมที่ลู่เข้าตามอสมการเบสเซล จึงมีค่าเล็กได้ตามต้องการเมื่อ N, M ใหญ่. ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ลำดับ Cauchy จึงลู่เข้า; เรียกผลบวกว่า y.

3. **ขั้นที่สาม: หาค่าของลิมิตผ่านพิกัด.** ลิมิตของผลคูณภายในคำนวณได้จากสมบัติต่อเนื่อง:

$$\langle y, e_j \rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle.$$

ดังนั้น $\langle x - y, e_j \rangle = 0$ สำหรับทุก j. สำหรับ $e \in S$ ที่ไม่อยู่ในการแจงนับ เรามี $\langle x, e \rangle = 0$ ตามนิยามของ S_x และ $\langle y, e \rangle = 0$ โดยความต่อเนื่องของผลคูณภายใน เพราะทุกผลบวกย่อยตั้งฉากกับ e. จึง $\langle x - y, e \rangle = 0$ เช่นกัน.

4. **ตั้งฉากกับปริภูมิปิด.** ให้ $M = \overline{\operatorname{lin}} S$. จากขั้นที่แล้ว $\langle x - y, e \rangle = 0$ ทุก $e \in S$. ให้ $w = \lim w_n$ โดย $w_n \in \operatorname{lin} S$. ความต่อเนื่องของผลคูณภายในให้

$$\langle x - y, w \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x - y, w_n \rangle = 0,$$

เพราะ w_n เป็นผลรวมเชิงเส้นจำกัดของสมาชิกใน S. ดังนั้น $x - y \perp M$.

5. **เป็นการฉาย.** เราได้ $y \in M$, $x - y \perp M$ และ $x = y + (x - y)$. นี่คือการแยกตั้งฉากของ x ตาม M; จากทฤษฎีบทการฉายเชิงตั้งฉากและการฉายมีเพียงหนึ่งเดียว y จึงเป็นการฉายของ x ลงบน M.

6. **ไม่มีเงื่อนไข.** ถ้าเลือกการแจงนับอื่น ก็ได้ลิมิต y' ที่มีสมบัติเดียวกัน. สำหรับทุก $e \in S$,

$$\langle y, e \rangle = \langle x, e \rangle = \langle y', e \rangle,$$

ดังนั้น $y - y' \perp S$. เพราะ $y, y' \in M$ จึง $y - y' \in M$. ให้ $w = \lim w_n$ โดย $w_n \in \operatorname{lin} S$; แต่ละ w_n ตั้งฉากกับ $y - y'$ และความต่อเนื่องของผลคูณภายในให้ $\langle y - y', w \rangle = \lim_n \langle y - y', w_n \rangle = 0$. ดังนั้น $y - y' \perp M$. เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับปริภูมิที่บรรจุมันต้องเป็นศูนย์: $\|y - y'\|^2 = \langle y - y', y - y' \rangle = 0$. ดังนั้น $y = y'$.

สรุป: ผลบวกย่อย Cauchy ให้ลิมิต y; เศษเหลือ $x - y$ ตั้งฉากกับระบบ จึงเป็นการฉาย และลิมิตไม่ขึ้นกับการเรียงลำดับ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

การพิสูจน์ขั้น “ไม่มีเงื่อนไข” ใช้ข้อเท็จจริงง่าย ๆ ที่มักถูกละไว้: เวกเตอร์ในปริภูมิปิดที่ตั้งฉากกับระบบซึ่งขึงมันต้องเป็นศูนย์. ถ้า $w = \lim w_n$ โดย w_n เป็นผลรวมเชิงเส้นจำกัดของ $e \in S$ และ $w \perp S$ แล้ว $w \perp w_n$ ทุก n; เพราะผลคูณภายในผ่านลิมิตได้, $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \lim \langle w, w_n \rangle = 0$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 4.2.3: ความสมมูลของนิยามฐานเชิงตั้งฉากปรกติ

ให้ $S \subset H$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) S เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (กล่าวคือเป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติที่ใหญ่ที่สุด);

(ii) ถ้า $x \in H$ และ $x \perp S$ แล้ว $x = 0$;

(iii) $\overline{\operatorname{lin}} S = H$;

(iv) $x = \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle e$ สำหรับทุก $x \in H$;

(v) $\langle x, y\rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle\langle e, y\rangle$ สำหรับทุก $x, y \in H$;

(vi) $\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e\rangle|^2$ สำหรับทุก $x \in H$.

ยิ่งกว่านั้น ระบบเชิงตั้งฉากปรกติทุกระบบถูกบรรจุอยู่ในฐานเชิงตั้งฉากปรกติบางฐาน.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เราเดินตามวง (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi)⇒(i). จุดที่ต้องใช้เครื่องมือหนักคือ (iii)⇒(iv) ซึ่งพึ่งทฤษฎีบทการฉายข้างบน และ (iv)⇒(v) ซึ่งพึ่งบทตั้งผลคูณของสัมประสิทธิ์. การสร้างฐานที่บรรจุ S ใช้บทตั้งของซอร์น (หลักที่ให้สมาชิกสูงสุดเมื่อทุกโซ่มีขอบเขตบน): ถ้าเซตที่มีการเรียงลำดับบางส่วนมีขอบเขตบนให้ทุกโซ่ ก็ต้องมีสมาชิกสูงสุด.

1. **(i)⇒(ii).** สมมติ $x \perp S$ และ $x \neq 0$. แล้ว $S \cup \{x/\|x\|\}$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติที่ใหญ่กว่า S อย่างแท้จริง ขัดกับความสูงสุดของ S.

2. **(ii)⇒(iii).** ให้ $M = \overline{\operatorname{lin}} S$. ถ้า $M \neq H$ ทฤษฎีบทการฉายเชิงตั้งฉากบนปริภูมิย่อยปิดให้เวกเตอร์ $x \neq 0$ ที่ $x \perp M$. โดยเฉพาะ $x \perp S$ ขัดกับ (ii).

3. **(iii)⇒(iv).** ตามทฤษฎีบทการฉายลงบนปริภูมิที่ระบบขึง การส่ง $Px = \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle e$ เป็นการฉายลงบน $\overline{\operatorname{lin}} S = H$. การฉายลงบนปริภูมิทั้งหมดคือการส่งเอกลักษณ์ จึง $Px = x$.

4. **(iv)⇒(v).** เขียน $x = \sum_e \langle x, e\rangle e$ และ $y = \sum_f \langle y, f\rangle f$. เซต $S_x \cup S_y$ นับได้ตามบทแทรกสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์; เขียนเป็นลำดับ. โดยบทตั้งผลคูณของสัมประสิทธิ์ อนุกรมของผลคูณ $\langle x, e\rangle\overline{\langle y, e\rangle}$ บนเซตนั้นลู่เข้าสัมบูรณ์. ให้ x_N, y_N เป็นผลบวกย่อยของอนุกรม; ความต่อเนื่องของผลคูณภายในให้ $\langle x_N, y_N\rangle \to \langle x, y\rangle$, และการจัดเรียงพจน์ใหม่ได้จึงให้

$$\langle x, y\rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle\overline{\langle y, e\rangle} = \sum_{e \in S} \langle x, e\rangle\langle e, y\rangle.$$

5. **(v)⇒(vi).** ตั้ง $y = x$; ได้ $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_e |\langle x, e\rangle|^2$.

6. **(vi)⇒(i).** สมมติว่า S ยังไม่เป็นฐาน. เพราะ S ไม่ใช่ระบบที่ใหญ่ที่สุด จึงมีระบบเชิงตั้งฉากปรกติ $T \supsetneq S$; เลือก $x \in T \setminus S$ แล้ว $x \perp S$ และ $\|x\| = 1$. สูตร (vi) จึงให้ $1 = \|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e\rangle|^2 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้.

7. **ขั้นที่เจ็ด: สร้างฐานที่บรรจุ S.** พิจารณาตระกูล $\mathcal{Z}$ ของระบบเชิงตั้งฉากปรกติ T ทั้งหมดที่มี $S \subset T$ โดยเรียงด้วยการเป็นเซตย่อย. ตระกูลนี้มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวคือ S. ถ้า $\mathcal{C}$ เป็นโซ่ใน $\mathcal{Z}$ ให้ $T_0 = \bigcup_{T \in \mathcal{C}} T$. เมื่อ $e, f \in T_0$ ต่างกัน จะมี $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$ ที่บรรจุทั้งสอง และเนื่องจาก $\mathcal{C}$ เป็นโซ่ ระบบหนึ่งจึงบรรจุอีกระบบ; เพราะแต่ละ T_i ตั้งฉากปรกติ จึงได้ $\langle e, f\rangle = 0$ และ $\|e\| = \|f\| = 1$. ดังนั้น T_0 เป็นขอบเขตบนของโซ่. จากบทตั้งของซอร์น เราเลือกสมาชิกสูงสุด S'. ถ้ามีระบบเชิงตั้งฉากปรกติ T ที่ใหญ่กว่า S' อย่างแท้จริง ก็จะขัดกับความสูงสุด. ดังนั้น S' เป็นฐานที่บรรจุ S.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

สรุป: ความสูงสุดให้การตั้งฉากที่เหลือเป็นศูนย์; ความหนาแน่นให้อนุกรมลู่กลับมาที่ x; การกระจายผลคูณภายในให้ปาร์เซวาล; ปาร์เซวาลกลับไปบังคับความสูงสุด. □

ข้อควรระวัง

ข้อ (vi) ดูเหมือนบอกว่า “ผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์เท่ากับพลังงานเสมอ” แต่ต้องอ่านเงื่อนไขให้ครบ: S ต้องเป็นฐาน. ถ้า S ไม่บริบูรณ์ จะได้เพียงอสมการเบสเซล. ตัวอย่างง่ายที่สุดคือ $S = \{e_1\}$ ใน $\mathbb{R}^2$ กับ $x = e_2$: ผลรวมเป็น 0 แต่ $\|x\|^2 = 1$.

ทฤษฎีบท 4.2.4: บทแทรก: ฐานนับได้ในปริภูมิแยกกันได้

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตมิติอนันต์. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) H แยกกันได้;

(ii) ฐานเชิงตั้งฉากปรกติทุกฐานของ H นับได้;

(iii) H มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติที่นับได้.

พิสูจน์. **แนวคิด.** จากฐานนับได้ ใช้ผลรวมเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ตรรกยะเพื่อให้ได้เซตหนาแน่นนับได้. กลับกัน จากเซตหนาแน่นนับได้ ทำแกรม–ชมิดท์กับสมาชิกที่เป็นอิสระเพื่อสร้างฐานนับได้. ส่วนการนับฐานทุกฐานใช้การจับคู่แต่ละเวกเตอร์ฐานกับสมาชิกของเซตหนาแน่นที่อยู่ใกล้.

1. **(iii)⇒(i).** เริ่มจากฐานนับได้ $S = \{e_1, e_2, \dots\}$. พิจารณาผลรวมเชิงเส้นจำกัด $\sum_{k=1}^{n} q_k e_k$ โดย q_k เป็นจำนวนตรรกยะ (หรือตรรกยะเชิงซ้อน). ผลรวมเหล่านี้มีจำนวนนับได้และเข้าใกล้ทุกจุดของ $\operatorname{lin} S$; เมื่อ $\overline{\operatorname{lin}} S = H$ จึงแตะทุกจุดของ H ได้ใกล้ตามต้องการ. ในแต่ละผลรวมเชิงเส้นจริงที่มีพจน์จำกัด เราแทนสัมประสิทธิ์ด้วยจำนวนตรรกยะทีละตัว; ผลต่างในนอร์มจึงเล็กได้ตามต้องการ. ดังนั้น H แยกกันได้.

2. **(i)⇒(iii).** ให้ $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ เป็นเซตหนาแน่นนับได้. ตรวจสมาชิกทีละตัวตามลำดับ และตัด d_k ออกถ้า d_k อยู่ในผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดของสมาชิกที่เก็บไว้ก่อนหน้า; เก็บ d_k ไว้ถ้าไม่ได้อยู่ในผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดนั้น. เซตที่เก็บไว้ยังมีผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดเท่ากับ D เพราะการเพิ่มสมาชิกที่อยู่ในผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดของตัวก่อนหน้าไม่เปลี่ยนผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิด. เซตนี้ยังเป็นอิสระเชิงเส้น เพราะสมาชิกแต่ละตัวที่เก็บไว้ไม่อยู่ในผลการแผ่เชิงเส้นของตัวก่อนหน้า. ทำแกรม–ชมิดท์กับเซตที่เหลือ (ทฤษฎีบทกระบวนการแกรม–ชมิดท์) ได้ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ S ที่มีผลการแผ่เชิงเส้นที่ปิดเท่ากับ H. ตามทฤษฎีบทความสมมูล S เป็นฐาน และนับได้เพราะสร้างจากลำดับนับได้.

3. **(ii)⇒(iii).** ถ้าฐานเชิงตั้งฉากปรกติทุกฐานนับได้ เราเพียงต้องรู้ว่ามีฐานอย่างน้อยหนึ่งฐาน. ทฤษฎีบทความสมมูลรับประกันว่ามี: เริ่มจากระบบว่างแล้วสร้างฐานที่บรรจุมันด้วยบทตั้งของซอร์น. ฐานนั้นนับได้ตามสมมติ (ii); นั่นคือ (iii).

4. **(i)⇒(ii).** ในทางกลับกัน สมมติว่า S เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติหนึ่งระบบ. สำหรับแต่ละ $e \in S$ เลือก $d_n \in D$ ที่ $\|e - d_n\| < 1/2$. ถ้า $e \neq f$ ถูกจับคู่กับ d_n ตัวเดียวกัน แล้ว
$$\|e - f\| \le \|e - d_n\| + \|d_n - f\| < 1,$$
แต่ $\|e - f\|^2 = \|e\|^2 + \|f\|^2 = 2$ เพราะ $e \perp f$ และทั้งสองยาวหนึ่ง. นั่นคือ $\|e - f\| = \sqrt{2} > 1$, ขัดแย้ง. การจับคู่จึงหนึ่งต่อหนึ่งจาก S ไปยังเซตนับได้ D; S จึงนับได้อย่างมาก. ฐานเป็นระบบที่ไม่มีเวกเตอร์ศูนย์และถ้า H มิติอนันต์ก็เป็นเซตอนันต์; จึงนับได้.

สรุป: ฐานนับได้ให้เซตหนาแน่นนับได้; เซตหนาแน่นนับได้ให้ฐานนับได้ผ่านแกรม–ชมิดท์; และการจับคู่กับเซตหนาแน่นบังคับให้ทุกฐานนับได้. □

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 4.2.5: ปริภูมิฮิลเบิร์ตคือ ℓ^2 ในรูปพิกัด

ให้ $\ell^2(S)$ เป็นเซตของตระกูล $(c_e)_{e\in S}$ ที่ $\sum_{e\in S}|c_e|^2<\infty$. ถ้า S เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของปริภูมิฮิลเบิร์ต H แล้ว

$$H \cong \ell^2(S)$$

ในความหมายว่ามีการส่งเชิงเส้นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงที่รักษาผลคูณภายใน (จึงรักษานอร์มด้วย).

พิสูจน์. **แนวคิด.** ส่ง x ไปเป็นลำดับสัมประสิทธิ์ $(\langle x,e\rangle)_{e\in S}$. ปาร์เซวาลบอกว่านี่เป็นการรักษานอร์ม; การประกอบอนุกรมกลับบอกว่าทุกลำดับใน $\ell^2(S)$ เกิดจากเวกเตอร์ตัวหนึ่ง.

1. **นิยามและอยู่ใน ℓ^2.** ให้ $Ux=(\langle x,e\rangle)_{e\in S}$. เซตของสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์นับได้ตามบทแทรกสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์ และผลรวมกำลังสองไม่เกิน $\|x\|^2$ ตามอสมการเบสเซล; ดังนั้น $Ux\in\ell^2(S)$.

2. **รักษาผลคูณภายใน.** สำหรับ $x,y\in H$ เอกลักษณ์ (v) ของทฤษฎีบทความสมมูลให้

$$\langle Ux,Uy\rangle_{\ell^2(S)}=\sum_{e\in S}\langle x,e\rangle\overline{\langle y,e\rangle}=\langle x,y\rangle.$$

   โดยเฉพาะ $\|Ux\|=\|x\|$. ถ้า $Ux=0$ แล้ว $\|x\|=\|Ux\|=0$; เคอร์เนลของ U จึงมีเพียงเวกเตอร์ศูนย์ และ U เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง.

3. **ทั่วถึง.** ให้ $c=(c_e)_{e\in S}\in\ell^2(S)$. เซตที่ $c_e\neq 0$ นับได้; เขียนเป็นลำดับ $e_1,e_2,\dots$. ผลบวกย่อย $s_N=\sum_{n=1}^{N}c_{e_n}e_n$ เป็น Cauchy เพราะ

$$\|s_M-s_N\|^2=\sum_{n=N+1}^{M}|c_{e_n}|^2\to 0.$$

   ให้ $x=\lim s_N$. เมื่อหาผลคูณภายในกับ e_j แล้วผ่านลิมิต เราได้ $\langle x,e_j\rangle=c_{e_j}$ สำหรับทุก j; สำหรับ e ที่เหลือ ค่าที่ได้เป็นศูนย์. ดังนั้น $Ux=c$.

4. **สรุป.** U เป็นการส่งเชิงเส้นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงที่รักษาผลคูณภายใน จึงเป็นสมสัณฐานสมมิติ.

สรุป: แผนที่พิกัดรักษาผลคูณภายในตามปาร์เซวาล และทุกตระกูลพิกัดที่ผลรวมกำลังสองจำกัดประกอบกลับเป็นเวกเตอร์ได้. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ผลนี้บอกว่าปริภูมิฮิลเบิร์ตที่มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ S "หน้าตาเหมือน" $\ell^2(S)$; ถ้า H แยกกันได้ S นับได้ และ $\ell^2(S)$ เป็น ℓ^2. ความแตกต่างระหว่างปริภูมิจึงไม่ได้อยู่ที่รูปร่างภายใน แต่อยู่ที่ว่าฐานใดเป็นธรรมชาติสำหรับปัญหาหนึ่ง. สำหรับเสียง ฐานที่เป็นธรรมชาติคือคลื่นความถี่; สำหรับภาพ ฐานที่เป็นธรรมชาติอาจเป็นเวฟเล็ต. บทนี้ใช้เฉพาะฐานฟูเรียร์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ข้อควรระวัง

$\ell^2(S)$ กับ $L^2(S)$ เป็นคนละปริภูมิ. ในบทนี้ ℓ^2 หมายถึงลำดับของสัมประสิทธิ์ (เวกเตอร์หรือฟังก์ชันบนเซตดัชนี) ส่วน L^2 หมายถึงฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้กำลังสอง. การสมสัณฐาน $H \cong \ell^2(S)$ เป็นการบอกว่า “พิกัด” อยู่ใน ℓ^2 ไม่ได้บอกว่าตัว H เองเป็นฟังก์ชันบนเซตนั้น.

ทฤษฎีบท 4.2.6: ทฤษฎีบทการประมาณของไวเออร์ชตราส

ให้ $g \in C_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{K})$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หายไปที่อนันต์. สำหรับทุก $R>0$ และทุก $\varepsilon>0$ มีพหุนาม p ที่

$$\sup_{x\in\overline{B_R(0)}} |g(x)-p(x)| < \varepsilon.$$

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

บทพิสูจน์ของไวเออร์ชตราสเป็นบทพิสูจน์คลาสสิกที่ยาวและไม่ใช่หัวใจของบทนี้. เราใช้ผลนี้เป็นเครื่องมือ และอ้างหน้า 308 ของ Alt (2012) สำหรับผู้อ่านที่ต้องการพิสูจน์เต็ม. ในการใช้งานข้างล่าง เราใช้กรณีของวงกลมหนึ่งหน่วยใน $\mathbb{R}^2$: ขยายฟังก์ชันบนวงกลมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีตัวรองรับใน**บอลปิด** $\overline{B_2(0)}$ (เซตของจุดที่มีระยะจากจุดศูนย์กลางไม่เกิน 2 รวมขอบ) แล้วประมาณบนบอลนั้น.

ทฤษฎีบท 4.2.7: ฐานฟูเรียร์ของ $L^2(-\pi,\pi)$

(a) สำหรับ $k\in\mathbb{Z}$ ให้ $e_k(t)=e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$. แล้ว $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{C})$.

(b) ฟังก์ชัน

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}},\qquad \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\quad (k\ge 1),$$

เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(-\pi,\pi;\mathbb{R})$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขั้นแรกหาปริพันธ์ของ exponential เพื่อตรวจความยาวหนึ่งและการตั้งฉาก. ขั้นต่อไปแสดงว่าพหุนามตรีโกณมิติเข้าใกล้ฟังก์ชันต่อเนื่องบนวงกลมได้ โดยอาศัยทฤษฎีบทการประมาณของไวเออร์ชตราส.

1. **ขั้นที่หนึ่ง: ตรวจความยาวและความตั้งฉาก.** สำหรับ $k,l\in\mathbb{Z}$,

$$\langle e_k,e_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt = \begin{cases} 1, & k=l,\\ 0, & k\neq l,\end{cases}$$

เพราะปริพันธ์ของ e^{imt} เป็นศูนย์เมื่อ $m\neq 0$. กรณีจริงตรวจด้วยสูตร $\cos^2$, $\sin^2$ และ $\cos\sin$ เช่นเดียวกัน.

2. **ขั้นที่สอง: ประมาณฟังก์ชันบนวงกลมด้วยพหุนาม.** สมมติว่า f ต่อเนื่องและเป็นคาบ 2π. เมื่อจุดอยู่บนวงกลมหน่วยให้ค่าของ g ที่จุด $(\cos t,\sin t)$ เป็น $f(t)$; ความต่อเนื่องของ g บนวงกลมตามมาจาก $f(-\pi)=f(\pi)$. ขยาย g เป็น $\widetilde{g}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{K}$ โดยเขียน $x=re^{i\theta}$ และกำหนด

$$\widetilde{g}(x)=\begin{cases} r f(\theta), & 0\le r\le 1,\\ (2-r)f(\theta), & 1\le r\le 2,\\ 0, & r\ge 2.\end{cases}$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-05-24

ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่อง: ที่ $r = 1$ สองสูตรแรกตรงกัน; ที่ $r = 2$ สูตรที่สองเป็นศูนย์; และที่มุม $\theta = \pm\pi$ ค่าตรงกันเพราะ $f(-\pi) = f(\pi)$. ตามทฤษฎีบทไวเออร์ชตราสกับ $\widetilde{g}$ บน $\overline{B_2(0)}$ มีพหุนาม $p(x, y)$ ที่ $|p(\cos t, \sin t) - f(t)| < \varepsilon$ ทุก t. บนวงกลม $p(\cos t, \sin t)$ เป็นพหุนามใน $\cos t$ และ $\sin t$; ใช้สูตรมุมบวกและเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ เขียนมันเป็นผลรวมจำกัดของ e^{ikt}. ดังนั้นพหุนามตรีโกณมิติอยู่ใกล้ f ในนอร์ม sup ทุก ๆ ε.

3. **จาก C ไป L^2.** ฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีตัวรองรับกระชับในช่วงเปิด $(-\pi, \pi)$ หนาแน่นใน $L^2(-\pi, \pi)$ (บท“ปริภูมิของฟังก์ชัน”). เมื่อขยายฟังก์ชันเหล่านี้เป็นคาบด้วยค่า 0 ที่ปลาย จะได้ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นคาบ. จากขั้นที่แล้วพหุนามตรีโกณมิติอยู่ใกล้ฟังก์ชันเหล่านี้ในนอร์ม sup จึงอยู่ใกล้ในนอร์ม L^2 ด้วย เพราะ $\|h\|_{L^2} \le \sqrt{2\pi}\,\|h\|_\infty$ บนช่วง $(-\pi, \pi)$. ดังนั้นผลการแผ่เชิงเส้นของ $\{e_k\}$ หนาแน่นใน L^2 และตามทฤษฎีบทความสมมูล ระบบนี้เป็นฐาน.

4. **กรณีจริง.** ผลรวมเชิงเส้นของ e^{ikt} กับการจับคู่ k กับ $-k$ ให้ $1, \cos(kt), \sin(kt)$ พอดี; การหารด้วยนอร์มให้ค่าคงตัวในข้อ (b). ความหนาแน่นจึงถ่ายทอดมาจากกรณีเชิงซ้อน.

สรุป: ปริพันธ์ของ exponential ให้ความตั้งฉากปรกติ; ไวเออร์ชตราสให้ความหนาแน่นของพหุนามตรีโกณมิติ; ความหนาแน่นให้ความบริบูรณ์ของระบบ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ในข้อ (b) เราใช้ $\cos(kt)/\sqrt{\pi}$ สำหรับ $k \ge 1$ และค่าคงที่ $1/\sqrt{2\pi}$. ถ้าใช้ $1, \cos(kt), \sin(kt)$ โดยไม่หารนอร์ม สูตรสัมประสิทธิ์จะมีตัวส่วนต่างกันและเอกลักษณ์ปาร์เซวาลจะมีน้ำหนักต่างกัน. เราเลือกฐานที่ทำให้ทุกเวกเตอร์ยาวหนึ่ง เพื่อให้สูตรเดียวใช้ได้ทั้งหมด.

4.2.1 การอ่านฟังก์ชันเป็นพิกัดความถี่

ตอนนี้เราเปลี่ยนชื่อ “สัมประสิทธิ์” เป็นคำที่ใช้ในงานจริง. สำหรับ $f \in L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ และ $k \in \mathbb{Z}$ เรียก

$$\widehat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

ว่า**สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์** (Fourier coefficient) ของ f ที่ความถี่ k. อนุกรม

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e_k$$

เรียกว่า**อนุกรมฟูเรียร์** (Fourier series) ของ f. เครื่องหมาย $\sim$ หมายความว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมของสัมประสิทธิ์; ตามทฤษฎีบทฐานฟูเรียร์ มันลู่เข้า f ในนอร์ม L^2 จริง ๆ.

ในกรณีจริง เขียน

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

สำหรับ $k \ge 1$. แล้ว

$$f(t) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}} + b_k \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} \right)$$

ในนอร์ม L^2, และเอกลักษณ์ปาร์เซวาลคือ

$$\|f\|_{L^2}^2 = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลองเอง: อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(t) = t$

จงหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนของ $f(t) = t$ บน $(-\pi, \pi)$ และตรวจเอกลักษณ์ปาร์เซวาลกับผลรวมที่รู้ค่า.

สำหรับ $k = 0$ ปริพันธ์ของ t เป็นศูนย์. สำหรับ $k \neq 0$ ใช้การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt}\, dt = \frac{i(-1)^k \sqrt{2\pi}}{k}.$$

ขนาดกำลังสองคือ

$$|\widehat{f}(k)|^2 = \frac{2\pi}{k^2}.$$

ดังนั้น

$$\sum_{k \neq 0} |\widehat{f}(k)|^2 = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 4\pi \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^3}{3} = \|f\|_{L^2}^2,$$

เพราะ $\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = 2\pi^3/3$. เอกลักษณ์ปาร์เซวาลจึงกลายเป็นสูตรผลรวม Basel ที่รู้จักกันดี. ตัวเลข: $|\widehat{f}(\pm 1)|^2 = 2\pi \approx 6.2832$, $|\widehat{f}(\pm 2)|^2 = \pi/2 \approx 1.5708$ และ $|\widehat{f}(\pm 3)|^2 = 2\pi/9 \approx 0.6981$. ผลรวมของ $|\widehat{f}(k)|^2$ เมื่อ $1 \le |k| \le 3$ คือ $2 \cdot 2\pi(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}) = 4\pi(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9}) \approx 17.1042$; เหลืออีกประมาณ 3.5666 จากทั้งหมด 20.6709. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ลองเอง: อนุกรมฟูเรียร์ของคลื่นสี่เหลี่ยม

ให้ $f(t) = 1$ บน $(0, \pi)$ และ $f(t) = -1$ บน $(-\pi, 0)$. จงหาสัมประสิทธิ์ b_k และตรวจปาร์เซวาล.

ฟังก์ชันเป็นคี่ ดังนั้น $a_0 = a_k = 0$. สำหรับ $k \ge 1$,

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\pi} \sin(kt)\, dt = \frac{4}{k\sqrt{\pi}} \quad (k \text{ คี่}),$$

และ $b_k = 0$ เมื่อ k เป็นคู่. พลังงานทั้งหมดคือ

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

ผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์คือ

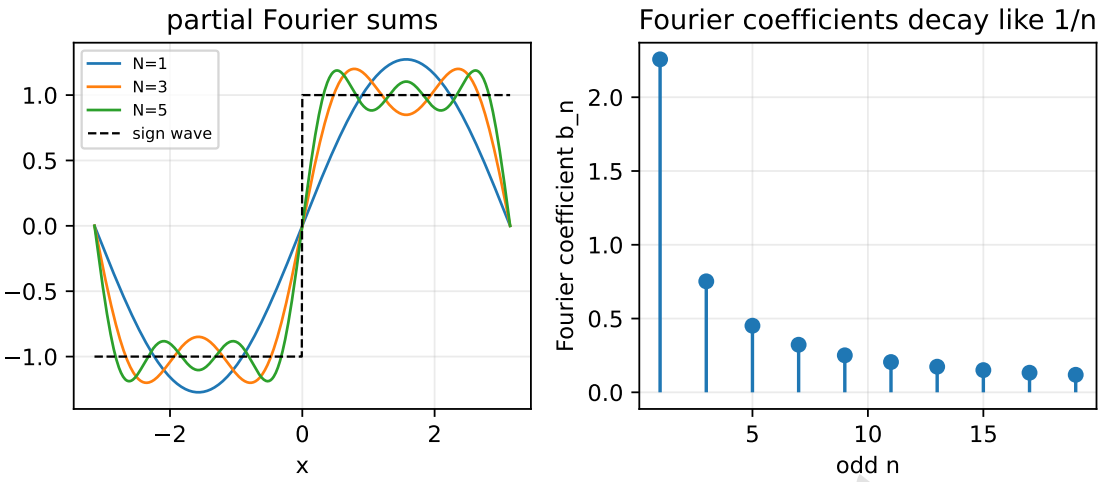
$$\sum_{k \text{ คี่}} \frac{16}{k^2 \pi} = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2\pi,$$

ตรงกับพลังงานทั้งหมด. ถ้าเก็บเฉพาะ $k = 1, 3$ พลังงานที่เก็บได้คือ

$$\frac{16}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9}\right) \approx 5.6588,$$

เหลือพลังงานที่หายไป $2\pi - 5.6588 \approx 0.6243$. ระยะ**ค่าคลาดเคลื่อน** (error) ในที่นี้คือระยะทางระหว่างฟังก์ชันเดิมกับผลบวกย่อยที่เก็บไว้; ที่ $k = 3$ มีค่าประมาณ $\sqrt{0.6243} \approx 0.7902$. ถ้าเพิ่ม $k = 5$ เข้าไป ระยะของค่าคลาดเคลื่อนลดลงเป็นประมาณ 0.6486 เท่านั้น. การลู่เข้าช้าเช่นนี้เป็นเหตุผลว่าทำไมการตัดอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณที่มีการกระโดดจึงต้องระวัง. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 4.2: ผลบวกย่อยของอนุกรมฟูเรียร์สำหรับคลื่นสี่เหลี่ยม (ซ้าย) และขนาดของสัมประสิทธิ์คี่ (ขวา). สัมประสิทธิ์ลดลงประมาณ $1/k$; การเพิ่มพจน์จึงลดค่าคลาดเคลื่อนช้า ๆ (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

ข้อควรระวัง

"อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้า f" ในที่นี้หมายถึงการลู่เข้าในนอร์ม L^2 เป็นหลัก. การลู่เข้าแบบจุดหรือแบบเอกรูปเป็นคำถามคนละข้อ และต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมที่ตัวฟังก์ชันด้วย: การขยายแบบคาบ 2π ของ f ต้องต่อเนื่องหรือต่อเนื่องเป็นชิ้น และหาอนุพันธ์ได้เป็นชิ้น (C^1 เป็นชิ้น). ถ้าการขยายนั้นต่อเนื่องและ C^1 เป็นชิ้น จะได้การลู่เข้าเอกรูป; ถ้ามีจุดกระโดดจะได้เพียงการลู่เข้าแบบจุดไปยังค่าเฉลี่ยของลิมิตซ้ายและขวา. ความต่อเนื่องอย่างเดียวไม่รับประกันการลู่เข้าแบบจุดทุกจุด (ดูเกร็ดเพิ่มเติมด้านล่าง). บท"ทฤษฎีบทหลักสามข้อ" จะกลับมาที่คำถามนี้และอธิบายปรากฏการณ์กิบส์เมื่อฟังก์ชันมีการกระโดด.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ถ้า $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่เป็นคาบ 2π และหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง ($f \in C^1$) อนุกรมฟูเรียร์ของ f ลู่เข้าเอกรูปไปยัง f (Werner, ทฤษฎีบท IV.2.9, หน้า 147). เราไม่พิสูจน์ผลนี้ในบทนี้เพราะต้องใช้เคอร์เนลดีรีเคลและจะทำในบทนั้น. สำหรับการบีบอัดเสียง เราใช้เพียงการลู่เข้าใน L^2 ซึ่งเพียงพอต่อการวัดพลังงานที่หายไป.

ทฤษฎีบท 4.2.8: บทแทรก: $L^2[0,1]$ สมสัณฐานกับ ℓ^2

$$L^2[0,1] \cong \ell^2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับ $L^2[0,1]$ จะเห็นว่ามันบริบูรณ์ มีมิติไม่จำกัด และมีเซตหนาแน่นนับได้. เมื่อได้สมบัติสามข้อนี้ บทแทรกก่อนหน้าจะให้ฐานนับได้และสมสัณฐานกับ ℓ^2.

1. **ฮิลเบิร์ต.** $L^2[0,1]$ บริบูรณ์ตามทฤษฎีบทฟิชเชอร์–รีสซ์ในบท"ปริภูมิของฟังก์ชัน".
2. **มิติอนันต์.** ฟังก์ชัน $1, t, t^2, \ldots$ อิสระเชิงเส้น: พหุนามที่ไม่เป็นศูนย์มีศูนย์ได้เพียงจำนวนจำกัด จึงไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์เกือบทุกแห่ง. นี่แสดงว่าปริภูมิไม่ได้มีมิติจำกัด.
3. **แยกกันได้.** ฟังก์ชันต่อเนื่องหนาแน่นใน $L^2[0,1]$ (บท"ปริภูมิของฟังก์ชัน" ข้อ 2.2.5), และทฤษฎีบทการประมาณของไวเออร์ชตราสกับช่วงปิดให้พหุนามที่ใกล้ฟังก์ชันต่อเนื่องได้ตามต้องการ. เราปรับค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามทีละตัวให้

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

เป็นจำนวนตรรกยะได้ เพราะมีจำนวนพจน์จำกัด; ผลต่างในนอร์ม sup จึงเล็กตามต้องการ. เซตของพหุนามทั้งหมดที่มีค่าสัมประสิทธิ์เช่นนี้มีจำนวนนับได้. จากการประมาณในขั้นก่อน เราเลือกพหุนามเหล่านี้ให้ใกล้ฟังก์ชันต่อเนื่องได้ตามต้องการ จึงได้เซตนับได้ที่หนาแน่นใน $L^2[0,1]$. ตามบทแทรกฐานนับได้ $L^2[0,1]$ มีฐานนับได้ และตามทฤษฎีบทสมสัณฐาน $L^2[0,1] \cong \ell^2$.

สรุป: เมื่อรวมสมบัติสามข้อของ $L^2[0,1]$ เข้ากับบทแทรกก่อนหน้า จะได้สมสัณฐาน $L^2[0,1] \cong \ell^2$. $\square$

สรุปใจความ

- ระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์คือระบบที่เขียนทุกเวกเตอร์เป็นอนุกรมของสัมประสิทธิ์ได้; นิยามหลายแบบสมมูลกัน.
- การฉายลงบนปริภูมิที่ระบบขึงคือผลบวกของสัมประสิทธิ์คูณเวกเตอร์; เศษเหลือตั้งฉากกับระบบ.
- เอกลักษณ์ปาร์เซวาล $\|x\|^2 = \sum |\langle x, e\rangle|^2$ คือการอนุรักษ์พลังงานเมื่อฐานบริบูรณ์.
- ปริภูมิฮิลเบิร์ตแยกกันได้มิติอนันต์สมสัณฐานกับ ℓ^2; ฐานนับได้ให้พิกัดที่นับได้.
- ฐานฟูเรียร์ $e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(-\pi,\pi)$; สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์คือพิกัดของฟังก์ชันในฐานนี้.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $S = \{e_1, e_2\}$ เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{R}^3$ และ $x = e_3$. จงตรวจข้อความในทฤษฎีบทความสมมูลว่าข้อใดจริงข้อใดเท็จสำหรับ S นี้.

2. จงหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนของ $f(t) = 1$ บน $(-\pi,\pi)$ แล้วตรวจปาร์เซวาล.

3. จงหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เชิงซ้อนของ $f(t) = \cos t$ และ $g(t) = \sin t$ แล้วตรวจว่ามีเพียงสัมประสิทธิ์ที่ $k = \pm 1$ ที่ไม่เป็นศูนย์.

4. สำหรับคลื่นสี่เหลี่ยมในหัวข้อ 4.2 จงคำนวณพลังงานที่เก็บได้เมื่อเก็บ $k = 1, 3, 5, 7$ และระยะของค่าคลาดเคลื่อนที่เหลือ.

5. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผล: (ก) ถ้า S เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ แล้ว $x \perp S$ บังคับ $x = 0$; (ข) ถ้าอนุกรมฟูเรียร์ของ f ลู่เข้า f ใน L^2 แล้วมันลู่เข้าเอกรูปเสมอ; (ค) ฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2[0,1]$ ต้องนับได้.

6. ใช้ฟังก์ชัน `square_wave_truncation` ใน `code/funkana/ch04.py`. จงรายงานพลังงานที่เก็บได้และระยะของค่าคลาดเคลื่อนสำหรับ $k = 1, 3, 5, 7$ และอธิบายว่าทำไมการเพิ่มพจน์จึงลดค่าคลาดเคลื่อนช้า.

7. ให้ $H = \ell^2$ และ e_n เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน. จงตรวจว่า (e_n) เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ และเขียน $x = (1, 1/2, 1/4, \dots)$ เป็นอนุกรมพร้อมตรวจปาร์เซวาล.

ฉบับร่าง, Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. S ไม่ใช่ฐาน เพราะมี $e_3 \perp S$ ที่ไม่เป็นศูนย์. ข้อ (i) เท็จ; (ii) เท็จ (เลือก $x = e_3$); (iii) เท็จ เพราะ $\overline{\operatorname{lin}} S$ เป็นระนาบสองมิติ ไม่ใช่ $\mathbb{R}^3$; (iv) เท็จสำหรับ $x = e_3$ เพราะผลบวกเป็น $0 \neq e_3$; (v) เท็จสำหรับ $x = e_3, y = e_3$ เพราะซ้ายเป็น 1 ขวาเป็น 0; (vi) เท็จเพราะ $0 \neq 1$.

2. $f = 1 = \sqrt{2\pi}\, e_0$. สัมประสิทธิ์ $\widehat{f}(0) = \sqrt{2\pi}$ และตัวอื่นเป็นศูนย์. ปาร์เซวาล: $|\sqrt{2\pi}|^2 = 2\pi = \|1\|_{L^2}^2$.

3. $\cos t = (e^{it}+e^{-it})/2 = (\sqrt{2\pi}/2)(e_1+e_{-1})$. ดังนั้น $\widehat{f}(\pm 1) = \sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\pi/2}$ และตัวอื่นเป็นศูนย์; กำลังสองรวมคือ $\pi/2 + \pi/2 = \pi = \|\cos\|_{L^2}^2$. สำหรับ $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/(2i) = (\sqrt{2\pi}/(2i))(e_1 - e_{-1})$; สัมประสิทธิ์คือ $\sqrt{2\pi}/(2i)$ ที่ $k = 1$ และ $-\sqrt{2\pi}/(2i)$ ที่ $k = -1$. กำลังสองรวมคือ $\pi/2 + \pi/2 = \pi = \|\sin\|_{L^2}^2$.

4. $k = 1, 3, 5, 7$: พลังงาน $16/\pi(1 + 1/9 + 1/25 + 1/49)$. คำนวณได้ $5.8626 + 16/(49\pi) = 5.8626 + 0.1039 = 5.9665$; เหลือ 0.3167; ระยะ $\sqrt{0.3167} \approx 0.5627$.

5. (ก) จริง ตามข้อ (ii) ของทฤษฎีบทความสมมูล. (ข) เท็จ: ใช้คลื่นสี่เหลี่ยมซึ่งไม่ต่อเนื่อง. ผลบวกย่อยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง; ถ้ามันลู่เข้าเอกรูป ลิมิตต้องต่อเนื่องด้วย. แต่ลิมิตใน L^2 คือคลื่นสี่เหลี่ยมซึ่งไม่ต่อเนื่อง จึงลู่เข้าเอกรูปไม่ได้. (ค) จริง สำหรับ $L^2[0,1]$ เพราะแยกกันได้และมิติอนันต์ ตามบทแทรกฐานนับได้.

6. ตาราง: $k = 1$ พลังงาน 5.0930, ระยะ 1.0910; $k = 1, 3$ พลังงาน 5.65884, ระยะ 0.7902; $k = 1, 3, 5$ พลังงาน 5.86256, ระยะ 0.6486; $k = 1, 3, 5, 7$ พลังงาน 5.9665, ระยะ 0.5627. การลดลงช้าเพราะสัมประสิทธิ์ขนาด $1/k$ และพลังงานลดลงเพียง $1/k^2$; หางที่เหลือจึงลดลงช้า.

7. (e_n) ตั้งฉากกันและยาวหนึ่ง. $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)} e_n$; ปาร์เซวาล: $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-(n-1)} = 1/(1 - 1/4) = 4/3 = \|x\|^2$. ระบบนี้เป็นฐาน: ถ้า $x \perp e_n$ ทุก n แล้ว $\langle x, e_n \rangle = x_n = 0$ ทุก n จึง $x = 0$; ตามทฤษฎีบทความสมมูล (e_n) จึงเป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ.

4.3 DFT บนสัญญาณตัวอย่างและการบีบอัดเสียง

ภาพรวมก่อนอ่าน

เสียงบนคอมพิวเตอร์ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่เป็นลำดับของจำนวนจำกัด $x_0, \dots, x_{N-1}$ ที่วัดทุกช่วงเวลาห่างกันเท่า ๆ. เราอยากเปลี่ยนลำดับนี้เป็น “พิกัดความถี่” เพื่อดูว่าเสียงประกอบด้วยคลื่นความถี่ใดบ้าง. การเปลี่ยนพิกัดนี้คือ DFT. มันเป็นเพียงการเปลี่ยนจากฐานมาตรฐานไปยังฐานของเวกเตอร์ exponential ที่ตั้งฉากปรกติ ดังนั้นอสมการเบสเซลและปาร์เซวาลจากหัวข้อก่อนหน้าจึงใช้ได้ทันที. **การตัดทอน** (truncation) คือการเก็บเพียงบางพิกัดและตั้งพิกัดที่เหลือเป็นศูนย์. การบีบอัดเสียงด้วยการเก็บสัมประสิทธิ์ใหญ่สุด k ตัวคือการตัดทอนแบบหนึ่ง: เราเลือกว่าพิกัดใดจะเก็บไว้และพิกัดใดจะทิ้ง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 4.3.1: ผลการแปลงฟูเรียร์วิยุต

ให้ $N \geq 1$ และ $\omega_N = e^{2\pi i/N}$ เป็น**รากที่ N ของหนึ่ง** (root of unity); นั่นคือจำนวนเชิงซ้อนที่ยกกำลัง N แล้วได้ 1. สำหรับ $x = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ นิยาม $\mathcal{F}_N x = \widehat{x}$ โดย

$$\widehat{x}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} \omega_N^{-j\ell} x_\ell, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

เราเรียก $\widehat{x}$ ว่า**สัมประสิทธิ์ DFT** (DFT coefficient) ของ x และเรียกการส่ง $\mathcal{F}_N$ ว่า**ผลการแปลงฟูเรียร์วิยุต** (discrete Fourier transform, DFT). ตัวคูณ $1/\sqrt{N}$ ทำให้เวกเตอร์ฐานในหัวข้อนี้ยาวหนึ่ง; ด้วยเหตุนี้ $\mathcal{F}_N$ จึงเรียกอีกชื่อว่า**ผลการแปลงฟูเรียร์แบบยูนิแทรี** (unitary DFT). ดัชนี j, ℓ ตีความแบบมอดุโล N; เช่น $x_N = x_0$ และ $\widehat{x}_N = \widehat{x}_0$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

สูตรนี้ดูเหมือนผลบวกยาว ๆ แต่ความหมายง่าย: $\widehat{x}_0$ คือ $\sqrt{N}$ เท่าของค่าเฉลี่ยของสัญญาณ เพราะ $\omega_N^0 = 1$. ค่า $\widehat{x}_j$ วัดว่าสัญญาณ “แกว่ง” ที่ความถี่ j มากแค่ไหน. ตัวคูณ $1/\sqrt{N}$ ปรับมาตราส่วนให้เวกเตอร์ฐานยาวหนึ่ง. ถ้าไม่ใส่ตัวคูณนี้ ตัวเลขจะใหญ่ขึ้น $\sqrt{N}$ เท่า; ถ้าใช้ $1/N$ ตามแบบของ Iserles ตัวเลขจะเล็กลงอีก $\sqrt{N}$ เท่า. เราใช้แบบยูนิแทรีเป็นนิยามหลัก และจะระบุชื่อเมื่อกล่าวถึงแบบอื่น.

ลองเอง: DFT ขนาดสี่

ให้ $x = (1, 0, -1, 0)$ และ $N = 4$. จงคำนวณ $\widehat{x} = \mathcal{F}_4 x$ แล้วตรวจว่าการแปลงย้อนกลับได้ x เดิม.

ในที่นี้ $\omega_4 = i$ และ $\omega_4^{-j\ell} = (-i)^{j\ell}$. คำนวณทีละพิกัด:

$$\widehat{x}_0 = \frac{1 + 0 - 1 + 0}{2} = 0, \qquad \widehat{x}_1 = \frac{1 + (-1)(-1)}{2} = 1,$$

$$\widehat{x}_2 = \frac{1 + (-1)(1)}{2} = 0, \qquad \widehat{x}_3 = \frac{1 + (-1)(-1)}{2} = 1.$$

ดังนั้น $\widehat{x} = (0, 1, 0, 1)$. การแปลงย้อนกลับแบบยูนิแทรีคือ

$$x_\ell = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{j=0}^{3} \omega_4^{j\ell} \widehat{x}_j = \frac{1}{2}\left(i^\ell + i^{3\ell}\right) = \cos\!\left(\frac{\pi \ell}{2}\right),$$

ซึ่งให้ $(1, 0, -1, 0)$ ตามต้องการ. การเขียนแบบ Iserles คือ $y = \widehat{x}/\sqrt{4} = (0, 1/2, 0, 1/2)$. ตัวเลขทั้งสองชุดมีแบบทดสอบยืนยัน.

ในกล่องข้างบนเราเห็นการคำนวณทีละก้าว. การใช้สูตรทั่วไปจะปลอดภัยกว่าการเดาทีละพจน์ เพราะเครื่องหมายของ i เปลี่ยนตามดัชนี. บทตั้งถัดไปให้สูตรย้อนกลับที่พิสูจน์ได้ด้วยผลบวกเรขาคณิตเพียงสูตรเดียว.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 4.3.1: สูตรผลบวกของกำลังรากที่ N ของหนึ่ง

ให้ $N \geq 1$ เป็นจำนวนเต็ม, $\omega = \omega_N$ และ $s \in \mathbb{Z}$. ผลบวก

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{sj}$$

มีค่าเท่ากับ N เมื่อ N หาร s ลงตัว, และเท่ากับ 0 เมื่อ N ไม่หาร s.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า $\omega^s = 1$ ทุกพจน์เป็น 1. ถ้าไม่ใช่ ให้ใช้สูตรผลบวกอนุกรมเรขาคณิต $1 + q + \cdots + q^{N-1} = (1 - q^N)/(1 - q)$.

1. **กรณี $N \mid s$.** เขียน $s = Nm$. แล้ว $\omega^{sj} = (\omega^N)^{mj} = 1$ ทุก j; ผลบวกจึงเป็น N.
2. **กรณี $N \nmid s$.** ให้ $q = \omega^s$. แล้ว $q \neq 1$ เพราะ $\omega^s = 1$ ก็ต่อเมื่อ $s/N \in \mathbb{Z}$. นอกจากนี้ $q^N = \omega^{sN} = 1$. ดังนั้น

$$\sum_{j=0}^{N-1} q^j = \frac{1 - q^N}{1 - q} = 0.$$

สรุป: ผลบวกเป็น N เมื่อทุกพจน์เป็น 1; ถ้าไม่ทุกพจน์เป็น 1 ตัวเศษ $1 - q^N$ เป็นศูนย์ จึงหักล้างกันหมด. □

บทตั้ง 4.3.2: DFT ย้อนกลับได้

ให้ $\widehat{x} = \mathcal{F}_N x$. แล้ว

$$x_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j\ell} \widehat{x}_j, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, N-1.$$

โดยเฉพาะ $\mathcal{F}_N$ เป็นการส่งเชิงเส้นที่ผกผันได้จาก $\mathbb{C}^N$ ไปยัง $\mathbb{C}^N$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แทนสูตรของ $\widehat{x}_j$ ลงในผลบวกย้อนกลับ แล้วสลับลำดับผลบวก. ผลบวกภายในเป็นผลบวกเรขาคณิต ซึ่งเป็นศูนย์เว้นแต่ดัชนีตรงกัน.

1. **แทนสูตร.** สำหรับ ℓ ใด ๆ,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j\ell} \widehat{x}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-jm} x_m \right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(\ell - m)}.$$

2. **ผลบวกภายใน.** ตามบทตั้งผลบวกเรขาคณิต ผลบวกภายในเป็น N เมื่อ $N \mid (\ell - m)$ และเป็น 0 เมื่อไม่หาร. เพราะ $0 \leq \ell, m \leq N - 1$, ความแตกต่าง $\ell - m$ อยู่ในช่วง $-(N-1)$ ถึง $N - 1$; การหารด้วย N จึงเกิดขึ้นเฉพาะเมื่อ $\ell = m$.
3. **สรุป.** เหลือเพียงพจน์ $m = \ell$:

$$\frac{1}{N} x_\ell \cdot N = x_\ell.$$

ดังนั้นสูตรย้อนกลับใช้ได้ และ $\mathcal{F}_N$ มีตัวผกผันเชิงเส้น.

สรุป: การสลับผลบวกทำให้เหลือผลบวกเรขาคณิตที่คัดเฉพาะดัชนีตรงกัน; ตัวคูณ $1/\sqrt{N}$ สองตัวรวมเป็น $1/N$ แล้วหักล้างกับ N. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

Iserles เขียนการแปลงไปด้วยตัวคูณ $1/N$:

$$y_j = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega_N^{-j\ell} x_\ell, \qquad x_\ell = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{j\ell} y_j.$$

นั่นคือ $y = \widehat{x}/\sqrt{N}$. ปาร์เซวาลของสองแบบคือ $\sum_j |\widehat{x}_j|^2 = \sum_\ell |x_\ell|^2$ และ $\sum_j |y_j|^2 = N^{-1}\sum_\ell |x_\ell|^2$. แบบแรกคือรูปของฐานเชิงตั้งฉากปรกติ; แบบที่สองเป็นผลจากการปรับมาตราส่วนของ Iserles.

บทตั้ง 4.3.3: เวกเตอร์ DFT เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (ผู้เรียบเรียง)

ให้ $f_j \in \mathbb{C}^N$ นิยามโดย

$$f_j(\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega_N^{j\ell}, \qquad j,\ell = 0,\dots,N-1.$$

แล้ว $\{f_0,\dots,f_{N-1}\}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{C}^N$ เมื่อใช้ผลคูณภายในมาตรฐาน. ยิ่งกว่านั้น สัมประสิทธิ์ DFT คือพิกัดในฐานนี้:

$$\widehat{x}_j := \langle x, f_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega_N^{-j\ell} x_\ell$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ผลคูณภายในของ f_j กับ f_k คือผลบวกเรขาคณิตของ $\omega^{(j-k)\ell}$; มันเป็นศูนย์เมื่อ $j \neq k$ และเป็นหนึ่งเมื่อ $j = k$. มีเวกเตอร์ตั้งฉากปรกติ N ตัวในปริภูมิมิติ N จึงเป็นฐาน.

1. **ตั้งฉากปรกติ.** สำหรับ j,k,

$$\langle f_j, f_k\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega^{j\ell}\overline{\omega^{k\ell}} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega^{(j-k)\ell}.$$

   ถ้า $j = k$ ผลบวกคือ N และได้ 1. ถ้า $j \neq k$ แล้ว $N \nmid (j-k)$ เพราะ $|j-k| < N$; ผลบวกเป็นศูนย์ตามบทตั้งผลบวกเรขาคณิต.

2. **เป็นฐาน.** เราได้เวกเตอร์ตั้งฉากปรกติ N ตัวในปริภูมิมิติ N. เวกเตอร์เหล่านี้เป็นอิสระเชิงเส้น (ถ้าผลรวมเป็นศูนย์ การหาผลคูณภายในกับ f_j ให้สัมประสิทธิ์เป็นศูนย์) จึงเป็นฐาน.

3. **สูตรสัมประสิทธิ์.** จากนิยามของผลคูณภายใน

$$\langle x, f_j\rangle = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell \overline{f_j(\ell)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell \omega^{-j\ell}$$

สรุป: ผลบวกเรขาคณิตให้ความตั้งฉากปรกติ; จำนวน N ตัวในมิติ N ให้ความเป็นฐาน; สูตรสัมประสิทธิ์คือการฉายลงบนฐานนั้น. □

นิยามหลักในบทจึงเป็น DFT แบบยูนิแทรี: $\widehat{x}$ คือเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ DFT และ $\mathcal{F}_N$ รักษาผลคูณภายในและนอร์ม. ความสัมพันธ์กับแบบของ Iserles คือ $\widehat{x} = \sqrt{N}\,y$, หรือ $y = \widehat{x}/\sqrt{N}$. เอกลักษณ์ปาร์เซวาลมีสองรูป:

$$\sum_{j=0}^{N-1} |\widehat{x}_j|^2 = \sum_{\ell=0}^{N-1} |x_\ell|^2, \qquad \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2 = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} |x_\ell|^2.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

รูปแรกคือปาร์เซวาลของฐานเชิงตั้งฉากปรกติ; รูปที่สองคือรูปของแบบ Iserles ซึ่งมีตัวคูณ $1/N$. ทั้งสองรูปพูดเรื่องเดียวกัน: เปลี่ยนพิกัดแล้วพลังงานไม่หาย.

ข้อควรระวัง

อย่าจำสลับว่า DFT แบบใดมีตัวคูณเท่าไร. นิยามหลักในบทใช้ $1/\sqrt{N}$ ทั้งการแปลงไปและการแปลงย้อนกลับ. แบบของ Iserles ใช้ $1/N$ ที่การแปลงไป และไม่ใช้ตัวคูณในการแปลงย้อนกลับ. ถ้าใช้ปาร์เซวาลผิดรูป จะได้พลังงานต่างกัน N เท่า. ในโค้ดของบทเราใช้แบบยูนิแทรีและระบุชื่อฟังก์ชันให้ชัด.

ทฤษฎีบท 4.3.4: การตัดทอนที่ดีที่สุด (ผู้เรียบเรียง)

ให้ $x \in \mathbb{C}^N$ และ $\widehat{x}$ เป็น DFT แบบยูนิแทรี. สำหรับเซตดัชนี $S \subset \{0, \dots, N-1\}$ ให้

$$x_S = \sum_{j \in S} \widehat{x}_j f_j.$$

แล้ว

$$\|x - x_S\|^2 = \sum_{j \notin S} |\widehat{x}_j|^2.$$

ถ้า $|S| = k$ และ S_k เป็นเซตของดัชนี k ตัวที่มี $|\widehat{x}_j|$ ใหญ่ที่สุด (เลือกวิธีใดก็ได้เมื่อค่าเท่ากัน) แล้ว

$$\|x - x_{S_k}\|^2 = \min_{\substack{S \subset \{0,\dots,N-1\} \\ |S|=k}} \|x - x_S\|^2 = \sum_{j \notin S_k} |\widehat{x}_j|^2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน $x - x_S$ ในฐาน f_j. สัมประสิทธิ์ของมันคือ $\widehat{x}_j$ เมื่อ $j \notin S$ และเป็นศูนย์เมื่อ $j \in S$. ปาร์เซวาลจึงบอกพลังงานของเศษเหลือทันที. การเลือก S ให้เหลือพลังงานน้อยที่สุดคือการทำให้ผลบวกที่เก็บไว้มากที่สุด; คำตอบคือเลือกค่าที่ใหญ่ที่สุด k ตัว.

1. **สัมประสิทธิ์ของเศษเหลือ.** เพราะ $x = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{x}_j f_j$ และ $x_S = \sum_{j \in S} \widehat{x}_j f_j$,
$$x - x_S = \sum_{j \notin S} \widehat{x}_j f_j.$$

2. **ปาร์เซวาล.** ใช้เอกลักษณ์ปาร์เซวาลกับเวกเตอร์ $x - x_S$:
$$\|x - x_S\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |\langle x - x_S, f_j \rangle|^2 = \sum_{j \notin S} |\widehat{x}_j|^2.$$

3. **เลือกเซตที่ดีที่สุด.** สำหรับ $|S| = k$,
$$\|x - x_S\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j \in S} |\widehat{x}_j|^2.$$

   การทำให้ด้านขวาน้อยที่สุดเท่ากับการทำให้ผลบวกที่เก็บไว้มากที่สุด. ผลบวกของ k จำนวนจากจำนวนที่ไม่ติดลบจะมากที่สุดเมื่อเลือกจำนวนที่ใหญ่ที่สุด k ตัว. (ถ้ามีจำนวนในเซตที่เล็กกว่าจำนวนนอกเซต การสลับสองตัวนี้เพิ่มผลบวก จึงไม่ใช่ค่าสูงสุด; เซตจำกัดทำให้ค่าสูงสุดมีอยู่เสมอ.) ดังนั้น S_k ให้ค่าต่ำสุด และค่าต่ำสุดคือผลบวกของกำลังสองของตัวที่เหลือ.

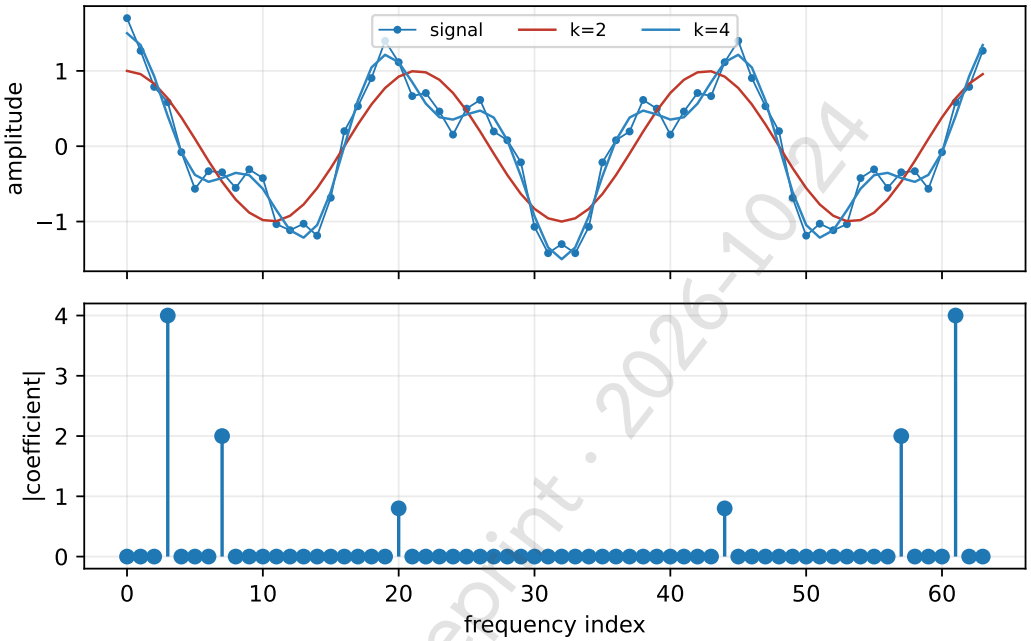
สรุป: ปาร์เซวาลเปลี่ยน “พลังงานที่หาย” เป็น “ผลบวกของสัมประสิทธิ์ที่ทิ้ง”; การเลือก k ตัวใหญ่สุดจึงเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับฐานนี้. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ทฤษฎีบทนี้บอกว่าการเก็บ k ตัวใหญ่สุดเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด *เมื่อฐานถูกกำหนดไว้แล้ว* และเมื่อเราวัดค่าคลาดเคลื่อนด้วยนอร์ม ℓ^2 ของสัมประสิทธิ์. ถ้าเราเปลี่ยนฐาน หรือเปลี่ยนนอร์มที่ใช้วัดเสียง การเลือกที่ดีที่สุดอาจเปลี่ยนไป. การเลือกฐานและมาตรวัดให้ตรงกับสิ่งที่หูสนใจเป็นประเด็นที่บทนี้ไม่ได้ตรวจสอบ; เราวัดเพียงนอร์ม ℓ^2 ของสัมประสิทธิ์.

4.3.1 ตัวอย่างการบีบอัด: เสียงโทนสามความถี่



ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-24

รูปที่ 4.3: สัญญาณโทนสามความถี่ $N = 64$ (บน) และขนาดของสัมประสิทธิ์ DFT (ล่าง). การเก็บ $k = 4$ ตัวใหญ่สุดยังคงรูปคลื่นไว้ได้ใกล้เคียง เพราะพลังงานเกือบทั้งหมดอยู่ในสองความถี่หลัก (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

ให้**โทน** (tone) ในที่นี้หมายถึงเสียงที่มีความถี่หลักชัดเจนเพียงไม่กี่ความถี่. เราสร้างสัญญาณโทนสามความถี่

$$x_n = \cos\!\left(\frac{2\pi \cdot 3n}{64}\right) + \frac{1}{2}\cos\!\left(\frac{2\pi \cdot 7n}{64}\right) + \frac{1}{5}\cos\!\left(\frac{2\pi \cdot 20n}{64}\right), \qquad n = 0, \dots, 63.$$

นี่คือเสียงสมมติที่มีสามความถี่. พลังงานทั้งหมดคือ

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{63} |x_n|^2 = 41.28.$$

ใน DFT แบบยูนิแทรี ความถี่แต่ละตัวให้สัมประสิทธิ์สองตัวที่ขนาด $4, 2, 0.8$ ตามลำดับ (เพราะ $\sqrt{N}/2$ คูณแอมพลิจูด). ถ้าเก็บ $k = 2$ ตัวใหญ่สุด เราเก็บความถี่ 3 ไว้ทั้งคู่; พลังงานที่เก็บได้คือ 32, เศษเหลือกำลังสองคือ 9.28. RMSE (root mean square error) คือรากที่สองของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยต่อหนึ่งตัวอย่าง; ที่นี่ $\mathrm{RMSE} = \sqrt{9.28/64} \approx 0.3808$. **ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์** (relative error) คือขนาดของค่าคลาดเคลื่อนหารด้วยขนาดของสัญญาณเดิม; ที่นี่เท่ากับ 0.4741. ถ้าเก็บ $k = 4$ เราเก็บสองความถี่แรก; เศษเหลือกำลังสองลดเป็น 1.28, RMSE ≈ 0.1414 และค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ 0.1761. ถ้าเก็บ $k = 6$ จะเก็บครบทั้งสามความถี่และมีค่าคลาดเคลื่อนเพียงระดับเลขทศนิยมของเครื่อง. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ลองเอง: คำนวณการเก็บสองตัว

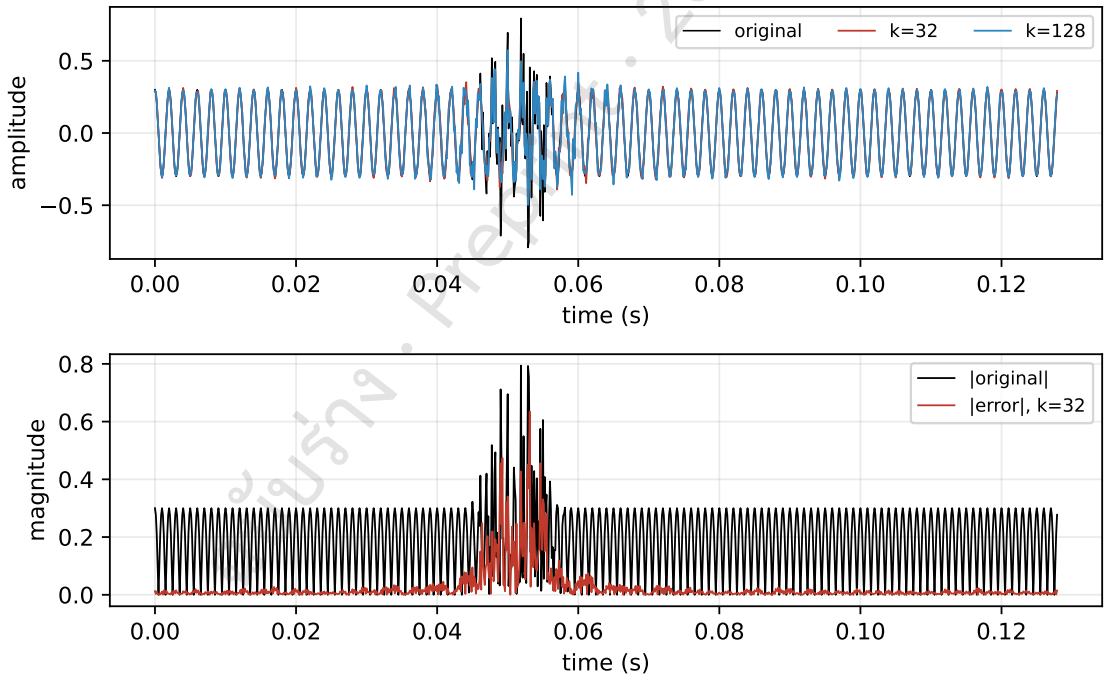
จากสัญญาณโทนข้างบน จงตรวจว่าถ้าเก็บ $k = 2$ พลังงานที่เก็บได้คือ 32 และพลังงานที่หายคือ 9.28. จงหาว่าเหตุใดการเก็บ $k = 2$ จึงไม่เก็บความถี่ 7 และ 20.

ขนาดสัมประสิทธิ์ของความถี่ $3, 7, 20$ คือ $4, 2, 0.8$ ตามลำดับ. การเรียงจากมากไปน้อยจึงเก็บคู่ของความถี่ 3 ก่อน. กำลังสองรวมของสองสัมประสิทธิ์นั้นคือ $4^2 + 4^2 = 32$. พลังงานทั้งหมดคือ 41.28; เศษเหลือคือ $41.28 - 32 = 9.28$, ตรงกับตัวเลขที่โค้ดรายงาน. ถ้าเก็บ $k = 4$ จะได้กำลังสองรวม $32 + 2^2 + 2^2 = 40$ และเศษเหลือ 1.28. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ข้อควรระวัง

ตัวเลข 32 ที่เห็นในผลรวมกำลังสองไม่ได้เป็นขนาดของสัมประสิทธิ์; พลังงานคือกำลังสองของขนาด. ในตัวอย่างนี้ผลรวมกำลังสองของคู่ความถี่ 3 เป็น 32 เพราะมีสองสัมประสิทธิ์แต่ละตัวมีขนาด $\sqrt{16} = 4$. ตัวเลขที่พิมพ์ในหนังสือมาจากโค้ด ไม่ได้มาจากการเดาจากขนาด.

4.3.2 ฉาบที่เบลอ: พลังงานที่กระจายและฐานที่ถูกตัด

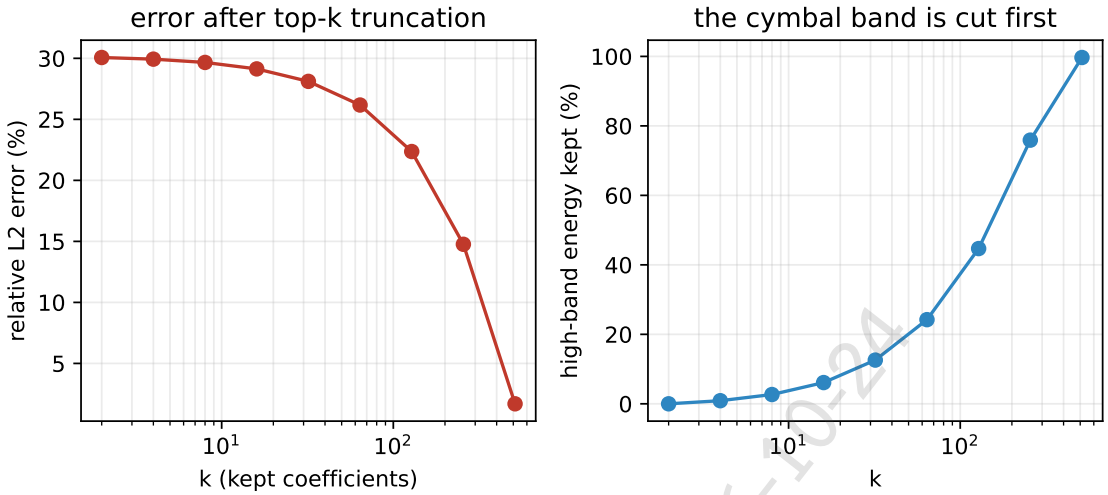


รูปที่ 4.4: เสียงฉาบสมมติ $N = 1024$ ที่อัตราการสุ่มตัวอย่าง 8 kHz. เส้นดำคือสัญญาณเดิม; เส้นแดงคือการเก็บ 32 สัมประสิทธิ์ใหญ่สุด; เส้นน้ำเงินคือการเก็บ 128 ตัว. แผนล่างแสดงขนาดของค่าคลาดเคลื่อน ซึ่งกระจายทั่วช่วงเสียงฉาบ (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

สัญญาณฉาบที่เราสร้างมีสองส่วน: เสียงโทนต่ำ 500 Hz ขนาด 0.3 และเสียง “ฉาบ” ช่วงสั้น ๆ ที่มีพลังงานกระจายระหว่าง 1.5 ถึง 3.5 kHz. สัญญาณถูกสร้างตามสูตรใน `code/funkana/ch04.py` (ฟังก์ชัน `cymbal_signal`): ผลรวมของโคไซน์ 40 ความถี่เท่ากันในช่วง 1.5--3.5 kHz มีเฟสสุ่มจากเมล็ด 4, คูณด้วยหน้าต่าง Hann บนตัวอย่าง 350--479, แล้วปรับมาตราส่วนด้วยค่าสูงสุดของผลรวม.

ร่าง · Preprint · 2026-10-24

ย่านความถี่สูง (high-frequency band) ในที่นี้คือช่วงความถี่มากกว่า 1 kHz. เราใช้ $N = 1024$ ตัวอย่างที่อัตราการสุ่มตัวอย่าง 8 kHz; ช่วงเวลาทั้งหมดคือ $1024/8000 = 0.128$ วินาที. พลังงานในช่วงความถี่สูงคิดเป็น 9.04% ของพลังงานทั้งหมด. ตัวเลขนี้วัดจาก DFT แบบยูนิแทรี.



รูปที่ 4.5: ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ซ้าย) และสัดส่วนพลังงานช่วงสูงที่เก็บไว้ (ขวา) เมื่อเก็บ k สัมประสิทธิ์ใหญ่สุด. การเพิ่ม k ลดค่าคลาดเคลื่อนช้า ๆ เพราะพลังงานฉาบกระจายอยู่ในสัมประสิทธิ์จำนวนมาก (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

ตารางต่อไปนี้สรุปตัวเลขที่เราจะใช้ตอบคำถามเปิดบท. ทุกตัวมีแบบทดสอบยืนยัน.

k	ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์	พลังงานช่วงสูงที่เก็บ	ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุด
32	28.11%	12.59%	0.6346
128	22.36%	44.68%	0.4623
256	14.76%	75.90%	0.1956

เมื่อเก็บเพียง 32 จาก 1024 สัมประสิทธิ์ เราเหลือพลังงานช่วงสูงเพียง 12.59%. เสียงโทนต่ำยังอยู่ เพราะสัมประสิทธิ์สองตัวของมันใหญ่ที่สุดและถูกเก็บก่อน. แต่ฉาบสูญเสียความคมเพราะองค์ประกอบความถี่สูงจำนวนมากถูกทิ้ง. เมื่อเพิ่มเป็น 256 ตัว พลังงานช่วงสูงกลับมา 75.90% และค่าคลาดเคลื่อนลดลงเป็น 14.76%. ในสถานการณ์สมมติของเรา ตัวเลขนี้แสดงว่าปัญหาไม่ได้อยู่ที่ลำโพงหรือเครื่องเล่น แต่อยู่ที่*การตัดฐาน*: เราเก็บพิกัดไม่พอสำหรับส่วนที่กระจายพลังงาน.

ข้อควรระวัง

อย่าสรุปว่าพลังงาน 9.04% ของช่วงสูง “ฟังไม่สำคัญ”. หูอาจไม่ได้ชั่งน้ำหนักพลังงานเท่ากันทุกความถี่ และการรับรู้เสียงยังขึ้นกับเวลาและบริบท. ตัวเลขพลังงานบอกว่าเราทิ้งไปเท่าไร แต่ไม่ได้บอกว่าหูจะรับรู้อย่างไร; ข้อสรุปเรื่องการรับรู้เสียงต้องมีงานวิจัยหรือมาตรฐานรองรับ ซึ่งอยู่นอกขอบเขตของบทนี้.

ร่างต้น · Preprint · 2026-10-24

4.3.3 ตอบคำถามเปิดบท

กลับไปที่เพลงในรถ. ในสัญญาณสมมติของเรา พลังงานกระจุกอยู่ในความถี่หลักไม่กี่ความถี่; บทนี้ไม่ได้ตรวจกับเพลงจริง. ตัวอย่างนี้แสดงการตัดทอนแบบ top-k และวัดค่าคลาดเคลื่อนของเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ในนอร์ม ℓ^2 เท่านั้น ไม่ได้คำนวณอัตราบิตหรือจำลอง codec จริง. ในตัวอย่างโทนสามความถี่ การเก็บ 4 จาก 64 สัมประสิทธิ์เก็บพลังงานได้ $40/41.28 \approx 96.9\%$ และค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เพียง 17.61%. สำหรับสัญญาณที่มีโครงสร้างคล้าย กัน การทิ้งสัมประสิทธิ์เล็ก ๆ จึงไม่ทำลายเนื้อเสียงหลัก.

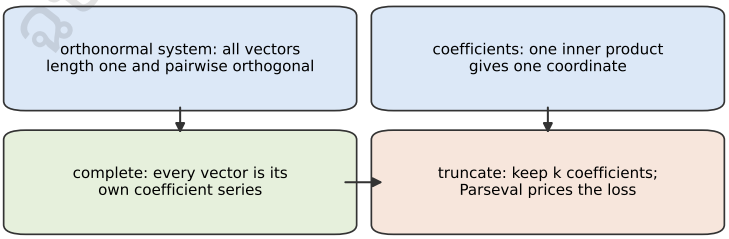
ทำไมฉาบในตัวอย่างจึงเบลอ? ในสัญญาณสมมติของเรา พลังงานฉาบกระจายในช่วง 1.5--3.5 kHz จึงอยู่ในสัมประสิทธิ์จำนวนมาก. การเก็บเฉพาะ k ตัวใหญ่สุดจึงเก็บโทนต่ำไว้ก่อนและตัดความถี่สูงส่วนใหญ่ทิ้ง. ที่ $k = 32$ เราเหลือพลังงานช่วงสูงเพียง 12.59%; ที่ $k = 256$ ยังเหลือ 75.90%. ความแตกต่างนี้คือความแตกต่างระหว่าง “ฉาบที่ยังมีขอบ” กับ “ฉาบที่ถูกปาดหาง” ในสัญญาณชุดนี้.

ในสถานการณ์สมมตินี้ สาเหตุจึงไม่ใช่ลำโพงหรือแอป แต่คือ*การตัดทอนฐาน*: เราเลือกการแทนที่มีเพียง k ทิศ และวัดการสูญเสียด้วยปาร์เซวาล. การเลือกฐานอื่นที่เหมาะกว่าเป็นหัวข้อที่บทนี้ไม่ได้ศึกษา. นี่คือบทเรียนที่บทนี้ต้องการ: การบีบอัดคือการเลือกฐานและการตัดทอน และขนาดของค่าคลาดเคลื่อนขึ้นกับการเลือกนั้น.

สรุปใจความ

- DFT เปลี่ยนลำดับ N ตัวอย่างเป็นพิกัดความถี่ N ตัว; แบบยูนิแทรีใช้ตัวคูณ $1/\sqrt{N}$ และรักษาพลังงาน.
- เวกเตอร์ $f_j(\ell) = N^{-1/2} e^{2\pi i j \ell / N}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{C}^N$; สัมประสิทธิ์ DFT คือพิกัดในฐานนี้.
- การเก็บ k สัมประสิทธิ์ใหญ่สุดเป็นตัวเลือกที่ดีที่สุดในนอร์ม ℓ^2 เมื่อฐานถูกกำหนด; ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองคือผลรวมกำลังสองของสัมประสิทธิ์ที่ทิ้ง.
- เสียงโทนที่มีความถี่ไม่กี่ตัวทนต่อการตัดทอน; เสียงฉาบที่มีพลังงานกระจายต้องใช้ k มากกว่าจึงจะรักษาช่วงความถี่สูงไว้.
- คำถามเปิดบทตอบด้วยปาร์เซวาลในสถานการณ์สมมติ: โทนยังฟังได้เพราะพลังงานกระจุก; ฉาบเบลอเพราะพลังงานกระจายและถูกตัดที่ฐาน ไม่ใช่เพราะลำโพง.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-01



รูปที่ 4.6: แผนผังสรุปบทนี้: จากระบบเชิงตั้งฉากปรกติและสัมประสิทธิ์ ไปสู่ความบริบูรณ์ ปาร์เซวาล และการตัดทอนในฐาน DFT (สร้างจาก `code/funkana/ch04.py`).

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงคำนวณ DFT ขนาด $N = 4$ ของ $x = (1, 2, 3, 4)$ ด้วยสูตรของ Iserles (มีตัวคูณ $1/4$; นิยามหลักในบทเป็นแบบยูนิแทรี) และเขียน y ทั้งสี่ตัวพร้อมตรวจการแปลงย้อนกลับ.

2. จงตรวจว่าเวกเตอร์ $f_j(\ell) = N^{-1/2}\omega_N^{j\ell}$ ตั้งฉากปรกติสำหรับ $N = 3$ โดยคำนวณผลคูณภายในของคู่ต่าง ๆ.

3. ให้ $x = (3, 1, 0, -1)$ และ $N = 4$. จงหาสัมประสิทธิ์ DFT แบบยูนิแทรี แล้วเลือก $k = 1, 2, 3$ ตัวใหญ่สุดและคำนวณค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองและค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์.

4. ใช้ตารางของฉาบในหัวข้อ 4.3.2. จงอธิบายว่าทำไมค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ลดลงเพียงเล็กน้อยเมื่อ k เพิ่มจาก 32 เป็น 128 แต่พลังงานช่วงสูงเพิ่มขึ้นเกือบสี่เท่า.

5. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผล: (ก) DFT แบบยูนิแทรีรักษานอร์ม; (ข) การเก็บ k ตัวใหญ่สุดให้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำสุดเสมอไม่ว่าจะใช้ฐานใด; (ค) DFT ตามนิยามของ Iserles มี $\|y\| = \|x\|$.

6. ใช้ฟังก์ชัน `tone_summary` และ `cymbal_summary` ใน `code/funkana/ch04.py`. จงรายงานค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของโทนที่ $k = 2, 4, 6$ และของฉาบที่ $k = 32, 128, 256$ แล้วอธิบายความแตกต่าง.

7. ให้ $x \in \mathbb{R}^N$. จงแสดงว่า $\widehat{x}_{N-j} = \overline{\widehat{x}_j}$ สำหรับ $j = 1, \dots, N-1$ แล้วอธิบายว่าทำไมข้อมูลของสัญญาณจริงจึงมีเพียงประมาณครึ่งหนึ่งของสัมประสิทธิ์ที่ต้องเก็บ.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. $y_0 = (1+2+3+4)/4 = 2.5$; $y_1 = (1 + 2(-i) + 3(-1) + 4i)/4 = (-2 + 2i)/4 = -0.5 + 0.5i$; $y_2 = (1 - 2 + 3 - 4)/4 = -0.5$; $y_3 = (1 + 2i - 3 - 4i)/4 = -0.5 - 0.5i$. การแปลงย้อนกลับ $x_\ell = \sum_j i^{j\ell} y_j$ ให้ $(1, 2, 3, 4)$.

2. $\langle f_0, f_1 \rangle = \frac{1}{3}(1 + \omega^{-1} + \omega^{-2})$ โดย $\omega = e^{2\pi i/3}$ และ $1 + \omega + \omega^2 = 0$ จึงเป็นศูนย์; คู่อื่นทำนองเดียวกัน. $\|f_j\|^2 = \frac{1}{3}(1+1+1) = 1$.

3. $y = (0.75, 0.75 - 0.5i, 0.75, 0.75 + 0.5i)$ และ $\widehat{x} = 2y = (1.5, 1.5 - i, 1.5, 1.5 + i)$. ขนาดคือ $1.5, 1.8028, 1.5, 1.8028$. $k = 1$: เก็บ $1.8028^2 = 3.25$, เหลือ $11 - 3.25 = 7.75$, ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\sqrt{7.75/11} \approx 0.8394$. $k = 2$: เก็บ 6.5, เหลือ 4.5, สัมพัทธ์ $\sqrt{4.5/11} \approx 0.6396$. $k = 3$: เก็บ 8.75, เหลือ 2.25, สัมพัทธ์ $\sqrt{2.25/11} \approx 0.4523$.

4. พลังงานช่วงสูงคิดเป็น 9.04% ของทั้งหมด. เมื่อ k เพิ่มจาก 32 เป็น 128 เราเก็บสัมประสิทธิ์เพิ่มขึ้น แต่สัมประสิทธิ์เหล่านั้นมีขนาดเล็กและกระจาย; ค่าคลาดเคลื่อนรวมจึงลดลงจาก 28.11% เป็น 22.36% เท่านั้น. พลังงานช่วงสูงเพิ่มจาก 12.59% เป็น 44.68% เพราะสัมประสิทธิ์ที่เพิ่มมาเกือบทั้งหมดอยู่ในช่วงสูง. นี่แสดงว่าพลังงานรวมกับพลังงานช่วงสูงไม่ใช่ตัวเลขเดียวกัน.

5. (ก) จริง ตามปาร์เซวาลของฐาน DFT แบบยูนิแทรี. (ข) เท็จ: ทฤษฎีบทตัดทอนใช้สมบัติตั้งฉากปรกติของฐาน; ถ้าฐานไม่ตั้งฉาก การเลือก k ตัวใหญ่สุดไม่จำเป็นต้องให้เศษเหลือเล็กที่สุด. ตัวอย่าง: ใน $\mathbb{R}^2$ ใช้ฐาน $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (1, 1)$ และ $x = 1.2 b_1 + b_2 = (2.2, 1)$. สัมประสิทธิ์ 1.2 ใหญ่กว่า 1 แต่การเก็บ b_1 ให้ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสอง $\|b_2\|^2 = 2$ ขณะที่การเก็บ b_2 ให้ $\|1.2 b_1\|^2 = 1.44$; การเลือกตัวใหญ่สุดจึงแย่กว่า. (ค) เท็จ: $\|y\|^2 = \|x\|^2 / N$ ตามรูปที่สอง ของปาร์เซวาล.

ร่างต้น · Preprint · 2026-04-24

6. โทน: $k = 2$ ค่าคลาดเคลื่อน 0.4741, $k = 4$ 0.1761, $k = 6$ ประมาณศูนย์. ฉาบ: $k = 32$ 0.2811, $k = 128$ 0.2236, $k = 256$ 0.1476. โทนลดลงเร็วเพราะมีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์เพียงหกตัว; ฉาบลดลงช้าเพราะพลังงานกระจายในสัมประสิทธิ์จำนวนมาก.

7. จากสูตร $\widehat{x}_{N-j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\ell \omega^{-(N-j)\ell} x_\ell = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\ell \omega^{j\ell} x_\ell$. เพราะ $x_\ell \in \mathbb{R}$, $\overline{\widehat{x}_j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\ell \omega^{j\ell} x_\ell$. ดังนั้น $\widehat{x}_{N-j} = \overline{\widehat{x}_j}$; เก็บเพียง $j = 0, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor$ ก็พอสำหรับสร้างส่วนที่เหลือ.

สรุปทั้งบท

- ระบบเชิงตั้งฉากปรกติให้พิกัดทีละแกน; อสมการเบสเซลบอกว่าพิกัดที่เก็บไว้ใช้พลังงานได้ไม่เกินทั้งหมด.
- ฐานเชิงตั้งฉากปรกติคือระบบที่บริบูรณ์; แล้วทุกเวกเตอร์เขียนเป็นอนุกรมสัมประสิทธิ์ และปาร์เซวาลกลายเป็นสมการ.
- ฐานฟูเรียร์ของ $L^2(-\pi, \pi)$ คือ $e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$; อนุกรมฟูเรียร์คือการเขียนฟังก์ชันในฐานนี้.
- DFT เขียนเวกเตอร์ในฐานฟูเรียร์บน $\mathbb{C}^N$; การเก็บ k สัมประสิทธิ์ใหญ่สุดเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดในนอร์ม ℓ^2 และค่าคลาดเคลื่อนคือพลังงานส่วนที่ทิ้ง.
- ในสถานการณ์สมมติ เพลงที่บีบอัดยังฟังได้เพราะพลังงานกระจุก; ฉาบเบลอเพราะพลังงานกระจายและถูกตัดที่ฐาน ไม่ใช่เพราะลำโพง.

ร่างพิจารณ์ · Preprint · 2026-10-24

อ่านต่อ

บทถัดไปจะเปลี่ยนจาก “ฟังก์ชันและสัญญาณ” ไปสู่ “ตัวดำเนินการ”: การคูณ สังวัตนาการ และการแปลงที่ทำกับสัญญาณทั้งสัญญาณ. เราจะเห็นว่าตัวดำเนินการมีนอร์ม มีคู่เชิง และมีตัวผกผันเมื่อเงื่อนไขเหมาะสม. ฐานเชิงตั้งฉากปรกติจากบทนี้จะเป็นเครื่องมือสำคัญในการเขียนตัวดำเนินการในรูปเมทริกซ์และในการนิยามคู่เชิงกับตัวดำเนินการผูกพันในบท“ตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค”.

ถ้าต้องการอ่านที่มาของเรื่องในบทนี้: ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ อสมการเบสเซล และเงื่อนไขสมมูลของฐานเชิงตั้งฉากปรกติอยู่ใน Werner 2007 หัวข้อ V.4 (ทฤษฎีบท V.4.9 ให้เงื่อนไขสมมูลหกข้อ) และใน Alt 2012 ทฤษฎีบท 7.7 (ห้าข้อ). ฐานฟูเรียร์ของ $L^2(-\pi, \pi)$ ทั้งแบบเชิงซ้อนและแบบจริงอยู่ใน Alt 2012 ตัวอย่าง 7.9. นิยาม DFT ที่มีตัวคูณ $1/N$ ซึ่งเราปรับเป็นแบบยูนิแทรีอยู่ใน Iserles 2009 นิยาม 10.3. และการลู่เข้าสม่ำเสมอของอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันคาบที่หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องอยู่ใน Werner 2007 ทฤษฎีบท IV.2.9 ซึ่งบท“ทฤษฎีบทหลักสามข้อ” จะกลับมาพิจารณาอีกครั้ง.

ภาค II

ตัวดำเนินการและฟังก์ชันนัล

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 5

ตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค

สถานการณ์สมมติ: ภาพที่มือสั่นและแสงที่ลากเป็นทาง

สมมติว่าเราถ่ายภาพในห้องที่มีแสงน้อย. มือสั่นเพียงเล็กน้อย แต่จุดไฟหนึ่งจุดกลับกลายเป็นเส้นยาวหรือวงรีบนภาพ. ยิ่ง shutter เปิดนานเท่าไร แสงก็ยิ่งลากเป็นทางยาวเท่านั้น. เราอาจคิดว่ากล้อง “เสีย” หรือเลนส์ “เบลอ” แต่ปรากฏการณ์นี้มีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เรียบง่ายกว่าที่คิด.

ลองเพิ่มแสงเป็นสองเท่า: ค่าพิกเซลทุกจุดก็เป็นสองเท่า. ลองมีจุดแสงสองจุด: ภาพที่ได้คือผลบวกของภาพจากแต่ละจุด. สมบัติสองข้อนี้คือ*ความเป็นเชิงเส้น*. ดังนั้นเราอาจเขียนภาพต้นฉบับเป็นเวกเตอร์ x, ภาพที่ได้เป็น y, และการเบลอเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น B ที่ $y = Bx$.

คำถามของบทนี้มีสามข้อ. ข้อแรก: B ขยายขนาดของภาพได้มากที่สุดเท่าไร. ข้อที่สอง: เราย้อน B กลับได้หรือไม่ และถ้าได้ ตัวผกผันขยายความคลาดเคลื่อนมากแค่ไหน. ข้อที่สาม: เมื่อใช้**การทำให้คมชัด** (sharpening) กับภาพที่เบลอ ทำไม**สัญญาณรบกวน** (noise) จึงชัดขึ้น. คำตอบข้อที่สามอยู่ในสูตรเดียว:

$$\widehat{x} = B^{-1}(Bx + n) = x + B^{-1}n.$$

เทอม $B^{-1}n$ คือสัญญาณรบกวนที่ถูกขยายโดยตัวผกผัน. สัญญาณรบกวนคือความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มเข้ามาในภาพ; ในบทนี้มันเป็นแบบรูปที่รู้ค่าแน่นอน ไม่ใช่ข้อมูลสุ่มจากกล้อง. ถ้า $\|B^{-1}\|$ ใหญ่ ปัญหาก็ไม่ได้อยู่ที่ฟิลเตอร์ที่เราเลือก แต่อยู่ที่ตัวผกผันของตัวดำเนินการเบลอนั้นเอง.

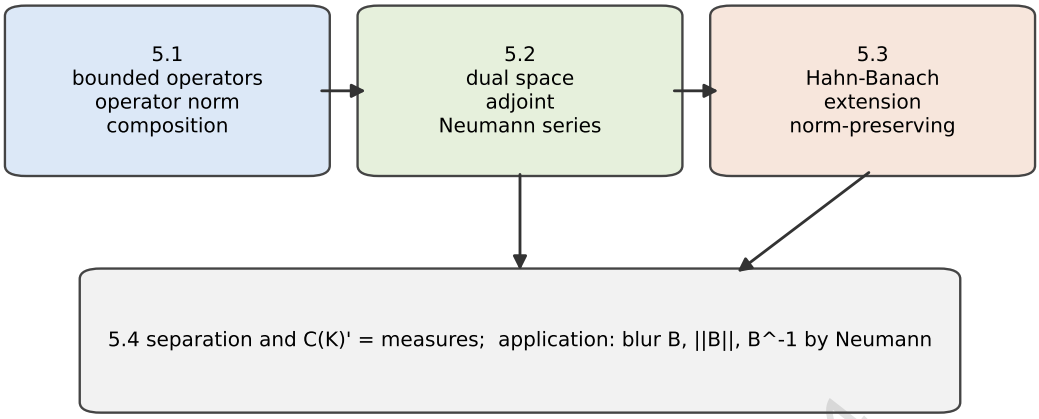
สถานการณ์ทั้งหมดเป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่ากล้องหรือแอปใดทำอะไร. ตัวเลขในบทนี้มาจากแบบจำลองกริดที่เราสร้างขึ้น และมีแบบทดสอบยืนยันทุกค่า.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ภาพรวมบท

บทนี้ตอบคำถามเดียวในสองภาษา. ภาษาของ*ขนาด*ถามว่า “ตัวดำเนินการหนึ่งตัวขยายเวกเตอร์ได้มากแค่ไหน” และให้คำตอบเป็นนอร์มของตัวดำเนินการ. ภาษาของ*การวัด*ถามว่า “เราวัดเวกเตอร์ได้อย่างไร” และให้คำตอบเป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง ซึ่งรวมกันเป็นปริภูมิคู่เชิง. เมื่อมีสองภาษานี้ เราจะย้ายการวัดผ่านตัวดำเนินการได้ (ตัวดำเนินการผูกพัน), ขยายการวัดโดยไม่เพิ่มขนาดได้ (ฮาห์น–บานาค), และแยกเซตนูนออกจากกันได้.

ภาพที่ต้องจำคือ: ตัวดำเนินการคือเครื่องที่เปลี่ยนเวกเตอร์; นอร์มของมันคือปุ่มปรับความแรงสูงสุด; คู่เชิงคือชุดของไม้บรรทัดที่เอาไปวัดเวกเตอร์; และตัวผกผันคือเครื่องที่เดินย้อนกลับ. การเบลอเป็นการเฉลี่ยเพื่อนบ้าน ดังนั้นมันจึงเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น. การทำให้คมชัดคือการใช้ตัวผกผันที่แน่นอนของการเบลอ ซึ่งอาจขยายสัญญาณรบกวนมหาศาล.



รูปที่ 5.1: แผนผังการพึ่งพาของบทนี้: จากนอร์มของตัวดำเนินการ ไปสู่คู่เชิง ตัวดำเนินการผูกพัน ฮาห์น–บานาค และการแยกเซตนูน (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

5.1 ตัวดำเนินการมีขอบเขตและนอร์มของตัวดำเนินการ

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพเครื่องขยายเสียงที่ปุ่มปรับได้ค่าหนึ่ง. เราอยากรู้ว่า “สัญญาณที่ดังที่สุดที่เครื่องนี้ทำได้” ใหญ่กว่าสัญญาณเข้าแค่ไหน. สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้น เราไม่ต้องตรวจทุกเวกเตอร์ทีละตัว: ถ้าเรารู้ค่าสูงสุดบนบอลหนึ่งหน่วย เราก็รู้ค่าสูงสุดบนเวกเตอร์ทุกตัว เพราะความเป็นเชิงเส้นย่อหรือขยายเวกเตอร์ให้ยาวหนึ่งได้. จำนวนนั้นคือ*นอร์มของตัวดำเนินการ*. มันทำให้เราพูดถึง “ตัวดำเนินการใกล้กัน” และ “ตัวดำเนินการประกอบกัน” ได้อย่างมีความหมาย.

นิยาม 5.1.1: ตัวดำเนินการเชิงเส้นและตัวดำเนินการมีขอบเขต

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์มบนสนาม $\mathbb{K}$ (ซึ่งเป็น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$). การส่ง $T : X \to Y$ เรียกว่า**ตัวดำเนินการเชิงเส้น** (linear operator) ถ้า

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

เรากล่าวว่า T เป็น**ตัวดำเนินการมีขอบเขต** (bounded operator) ถ้ามีค่าคงตัว $C \geq 0$ ซึ่ง

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

เขียน $\mathcal{L}(X, Y)$ สำหรับเซตของตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขตจาก X ไป Y, และ $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“มีขอบเขต” ในที่นี้ไม่ได้หมายความว่าภาพของ T ทั้งปริภูมิมีขนาดจำกัด. ความหมายคือ T ขยายเวกเตอร์ได้ไม่เกิน C เท่า. ตัวดำเนินการศูนย์มีนอร์ม 0. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์บนปริภูมิใด ๆ มีนอร์ม 1 เพราะ $\|Ix\| = \|x\|$. บน $\mathbb{R}$ ตัวดำเนินการ $T(x) = 3x$ มีนอร์ม 3.

ตัวอย่างที่ไม่ใช่: ให้ X เป็นปริภูมิของพหุนามบน $[0,1]$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม และให้ D เป็นอนุพันธ์. พหุนาม $p_n(t) = t^n$ มี $\|p_n\|_\infty = 1$ แต่ $\|Dp_n\|_\infty = n$. ไม่มีค่าคงตัว C ใดคุม n ทั้งหมดได้ เพราะฉะนั้น D ไม่เป็นตัวดำเนินการมีขอบเขตบนปริภูมินี้.

ข้อควรระวัง

"ตัวดำเนินการมีขอบเขต" ไม่ได้แปลว่าภาพของมันเป็นเซตมีขอบเขต. ตัวดำเนินการเชิงเส้นบนปริภูมิอนันต์มิติอาจส่งเวกเตอร์ที่ยาวขึ้นเรื่อย ๆ ไปยังค่าที่ใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ (เช่น D ข้างบน). สิ่งที่ถูกคุมคือ*บอลหนึ่งหน่วย* ไม่ใช่ปริภูมิทั้งปริภูมิ. อีกจุดหนึ่ง: ค่าของนอร์มขึ้นกับนอร์มที่ใช้ทั้งต้นทางและปลายทาง. เมทริกซ์เดียวกันจึงมีนอร์มต่างกันเมื่อใช้ ℓ^1, ℓ^2 หรือ ℓ^∞.

ทฤษฎีบท 5.1.1: ความสมมูลของภาวะต่อเนื่องและภาวะมีขอบเขต

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(1) T ต่อเนื่อง.

(2) T ต่อเนื่องที่จุดหนึ่ง $x_0 \in X$ (และเพราะฉะนั้นที่ทุกจุด).

(3) $\sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < \infty$.

(4) มีค่าคงตัว $C \ge 0$ ซึ่ง $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$ สำหรับทุก $x \in X$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ความต่อเนื่องที่จุดเดียวให้บอลเล็ก ๆ ที่ถูกส่งเข้าบอลรัศมีหนึ่ง. ความเป็นเชิงเส้นยอมให้เราเลื่อนบอลนั้นมาที่ศูนย์และขยายเป็นบอลหนึ่งหน่วย. จากนั้นการย่อเวกเตอร์ใด ๆ ให้ยาวหนึ่งจะให้ค่ากั้นทั่วไป. ทางกลับกัน ค่าขั้นทั่วไปให้ภาวะลิปชิตซ์ ซึ่งแรงกว่าภาวะต่อเนื่อง.

1. **(1) $\Rightarrow$ (2).** ให้ (1) เป็นจริง. จุด x_0 เป็นจุดหนึ่งใน X; ภาวะต่อเนื่องบนทั้งปริภูมิจึงให้ภาวะต่อเนื่องที่จุดนี้ด้วย.

2. **(2) $\Rightarrow$ (3).** เมื่อตั้ง $\varepsilon = 1$ สมบัติต่อเนื่องตรงจุด x_0 ให้ $\delta > 0$ ซึ่ง
$$\|x - x_0\|_X < \delta \implies \|Tx - Tx_0\|_Y < 1.$$
ให้ $\|x\|_X \le 1$. แล้ว $\|(x_0 + \tfrac{\delta}{2}x) - x_0\|_X \le \tfrac{\delta}{2} < \delta$, เพราะฉะนั้น
$$\|T(x_0 + \tfrac{\delta}{2}x) - Tx_0\|_Y < 1.$$
ความเป็นเชิงเส้นให้ $T(x_0 + \tfrac{\delta}{2}x) - Tx_0 = \tfrac{\delta}{2}Tx$. ดังนั้น $\tfrac{\delta}{2}\|Tx\|_Y < 1$, นั่นคือ $\|Tx\|_Y < 2/\delta$. เพราะฉะนั้นซูพรีมัมบนบอลหนึ่งหน่วยมีค่าไม่เกิน $2/\delta < \infty$.

3. **(3) $\Rightarrow$ (4).** ให้ $C := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y$. ถ้า $x = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. ถ้า $x \neq 0$ เวกเตอร์ $x/\|x\|_X$ มีนอร์มหนึ่ง จึง
$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y \le C.$$
คูณด้วย $\|x\|_X$ และใช้ความเป็นเชิงเส้น ได้ $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. (4) $\Rightarrow$ (1). สำหรับ $x, y \in X$,

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \le C\|x-y\|_X.$$

ดังนั้น T เป็นการส่งลิปชิตซ์ และจึงต่อเนื่องทุกจุด.

สรุป: ภาวะต่อเนื่องของตัวดำเนินการเชิงเส้นเทียบเท่ากับการมีค่าคงตัว C คุมการขยายของทุกเวกเตอร์. ค่าที่เล็กที่สุดของ C คือสิ่งที่เราจะเรียกนอร์มของตัวดำเนินการ. □

นิยาม 5.1.2: นอร์มของตัวดำเนินการ

ให้ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. **นอร์มของตัวดำเนินการ** (operator norm) คือ

$$\|T\| := \inf\{C \ge 0 : \|Tx\|_Y \le C\|x\|_X \ \forall x \in X\}.$$

มีสูตรเทียบเท่า

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

และสำหรับทุก $x \in X$,

$$\|Tx\|_Y \le \|T\|\,\|x\|_X.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

นอร์มของตัวดำเนินการคือ “อัตราส่วนที่แย่ที่สุด” ระหว่างความยาวของภาพกับความยาวของต้นฉบับ. ถ้า T ยืดทุกเวกเตอร์ไม่เกินสองเท่า นอร์มจะไม่เกินสอง. ถ้ามีเวกเตอร์หนึ่งที่ยืดได้เกือบสองเท่า นอร์มจะใกล้สอง. ซูพรีมัมอาจไม่ถูกบรรลุ: ให้ $\mathcal{D}e_k = \frac{k}{k+1}e_k$ บน ℓ^2 (ใช้ $\mathcal{D}$ ต่างจากอนุพันธ์ D ข้างต้น) และ $s_n = e_n$. แล้ว $\|\mathcal{D}\| = 1$ แต่ $\|\mathcal{D}s_n\|/\|s_n\| = n/(n+1) < 1$ ทุก n. ถ้า $\|x\| = 1$ และ $\|\mathcal{D}x\| = 1$ แล้ว $\sum_k (\frac{k}{k+1})^2 |x_k|^2 = \|\mathcal{D}x\|^2 = 1 = \|x\|^2 = \sum_k |x_k|^2$; แต่ $\frac{k}{k+1} < 1$ ทุก k จึงบังคับ $x_k = 0$ ทุก k, ขัดกับ $\|x\| = 1$. ดังนั้นค่าสูงสุดไม่ถูกบรรลุ แต่ซูพรีมัมเป็นหนึ่ง.

ลองเอง: เมทริกซ์เดียว สามนอร์ม

ให้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

จงหานอร์มของ A เมื่อมองเป็นตัวดำเนินการบน ℓ^1, ℓ^∞ และ ℓ^2.

สำหรับ ℓ^1 นอร์มของเมทริกซ์คือผลบวกค่าสัมบูรณ์ที่มากที่สุดของ*คอลัมน์*:

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |0|,\ |2| + |3|\} = \max\{1, 5\} = 5.$$

สำหรับ ℓ^∞ ใช้นอร์มผลบวกของ*แถว*:

$$\|A\|_\infty = \max\{|1| + |2|,\ |0| + |3|\} = \max\{3, 3\} = 3.$$

สำหรับ ℓ^2 เราใช้ค่าลักษณะเฉพาะของ $A^{\mathsf{T}}A$. คำนวณ

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}A) = 14, \qquad \det(A^{\mathsf{T}}A) = 9.$$

ฉบับร่าง · preprint · 2026-11-24

ค่าลักษณะเฉพาะคือ $7 \pm 2\sqrt{10}$, ดังนั้น

$$\|A\|_2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \approx 3.6503.$$

อสมการทั่วไป $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$ ให้ค่ากั้น $\sqrt{15} \approx 3.8730$ ซึ่งไม่คมนักในตัวอย่างนี้. ตัวเลขทั้งหมดมีแบบทดสอบยืนยัน.

ทฤษฎีบท 5.1.2: นอร์มของเมทริกซ์ในสามนอร์มมาตรฐาน

ให้ $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ และมอง A เป็นตัวดำเนินการ $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. แล้ว

(a) $\|A\|_{\ell^1\to\ell^1} = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ (ผลบวกคอลัมน์ที่มากที่สุด);

(b) $\|A\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (ผลบวกแถวที่มากที่สุด);

(c) $\|A\|_{\ell^2\to\ell^2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$, โดย $A^* := \overline{A^{\mathsf{T}}}$ คือทรานสโพสสังยุค และ $\lambda_{\max}$ คือค่าลักษณะเฉพาะที่มากที่สุดของ A^*A.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (a) และ (b) มาจากการย้ายผลบวก: ค่าสูงสุดเกิดเมื่อเวกเตอร์เข้าไปกองที่คอลัมน์หรือแถวเดียว. ข้อ (c) ใช้ความจริงว่าเมทริกซ์กึ่งบวกนิยาม A^*A มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ.

1. **(a)** สำหรับ $x \in \mathbb{K}^n$,
$$\|Ax\|_1 = \sum_{i} \Big|\sum_{j} a_{ij}x_j\Big| \le \sum_{j} |x_j| \sum_{i} |a_{ij}| \le \Big(\max_{j} \sum_{i} |a_{ij}|\Big)\|x\|_1.$$
ให้ j_0 เป็นคอลัมน์ที่ให้ผลบวกมากที่สุด และเลือก $x = e_{j_0}$; ได้ $\|Ae_{j_0}\|_1 = \sum_i |a_{ij_0}|$. ดังนั้นความเท่ากันเกิด.

2. **(b)** สำหรับ x,
$$|(Ax)_i| = \Big|\sum_{j} a_{ij}x_j\Big| \le \sum_{j} |a_{ij}||x_j| \le \Big(\sum_{j} |a_{ij}|\Big)\|x\|_\infty.$$
ให้ i_0 เป็นแถวที่ให้ผลบวกมากที่สุด และเลือก $x_j = \overline{a_{i_0 j}}/|a_{i_0 j}|$ เมื่อ $a_{i_0 j} \neq 0$; แล้ว $(Ax)_{i_0} = \sum_j |a_{i_0 j}|$ และ $\|x\|_\infty = 1$.

3. **(c)** เราใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมมิติจำกัด: A^*A เป็นเมทริกซ์กึ่งบวกนิยามและสมมาตรเชิงสังยุค จึงมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $v_1, \dots, v_n$ ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ พร้อมค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0$. เขียน $x = \sum_k c_k v_k$. แล้ว
$$\|Ax\|_2^2 = \langle A^*Ax, x\rangle = \sum_{k} \lambda_k |c_k|^2 \le \lambda_1 \sum_{k} |c_k|^2 = \lambda_1 \|x\|_2^2.$$
เลือก $x = v_1$ ได้ $\|Av_1\|_2^2 = \lambda_1$, ดังนั้นนอร์มคือ $\sqrt{\lambda_1}$.

สรุป: นอร์มของเมทริกซ์ไม่ใช่คุณสมบัติของเมทริกซ์อย่างเดียว; มันขึ้นกับนอร์มที่ใช้ทั้งต้นทางและปลายทาง. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 5.1.3: ปริภูมิของตัวดำเนินการมีขอบเขต

ให้ X, Y, Z เป็นปริภูมินอร์ม.

(a) $\|T\|$ เป็นนอร์มบน $\mathcal{L}(X, Y)$.

(b) ถ้า Y เป็นปริภูมิบานาค แล้ว $\mathcal{L}(X, Y)$ เป็นปริภูมิบานาค (ไม่ต้องให้ X บริบูรณ์).

(c) ถ้า $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ แล้ว $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ และ

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (a) ตรวจสัจพจน์ของนอร์มทีละข้อ. ข้อ (b) ใช้ความบริบูรณ์ของ Y ทีละจุด แล้วพิสูจน์ว่าลิมิตเป็นตัวดำเนินการมีขอบเขตและเป็นลิมิตในนอร์ม. ข้อ (c) ใช้อสมการ $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\|$ แล้วดึง $\|T\|$.

1. **(a)** เริ่มจากตรวจความเป็นเนื้อเดียวกันก่อน. สำหรับ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$ สูตร $\|(\alpha T)x\|_Y = |\alpha|\|Tx\|_Y$ ใช้ได้กับทุก x; หาซูพรีมัมบน $\|x\|_X \leq 1$ ได้ $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$. นอร์มจึงไม่ติดลบและเป็นเนื้อเดียวกัน. เพื่อพิสูจน์อสมการสามเหลี่ยม สมมติ $\|x\|_X \leq 1$. แล้ว

   $$\|(S+T)x\|_Y \leq \|Sx\|_Y + \|Tx\|_Y \leq \|S\| + \|T\|.$$

   เมื่อหาซูพรีมัมบนบอลหนึ่งหน่วย จะได้ $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$. ถ้า $\|T\| = 0$ แล้ว $\|Tx\|_Y \leq 0$ ทุก x จึง $T = 0$.

2. **(b)** ให้ (T_n) เป็นลำดับ Cauchy ใน $\mathcal{L}(X, Y)$. สำหรับแต่ละ $x \in X$, $\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|\|x\|_X$ ดังนั้น $(T_n x)$ เป็นลำดับ Cauchy ใน Y. เนื่องจากทุก Cauchy ใน Y ลู่เข้า เราจึงตั้ง $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$. ความเป็นเชิงเส้นของ T ตามมาจากลิมิตของผลบวกและสเกลาร์. ให้ $\varepsilon > 0$. เลือก N ซึ่ง $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ สำหรับ $n, m \geq N$. ให้ $\|x\|_X \leq 1$ และ $n, m \geq N$. แล้ว

   $$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|_X \leq \varepsilon.$$

   ให้ $m \to \infty$ ในอสมการนี้ จะได้ $\|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และทุก $\|x\|_X \leq 1$. เพราะฉะนั้น $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N$. โดยเฉพาะกับ $n = N$,

   $$\|Tx\|_Y \leq \|T_N x\|_Y + \|Tx - T_N x\|_Y \leq (\|T_N\| + \varepsilon)\|x\|_X,$$

   จึง T มีขอบเขต. เมื่อวัดด้วยนอร์มของ $\mathcal{L}(X, Y)$ ลำดับนี้จึงลู่เข้าหา T.

3. **(c)** สำหรับ $x \in X$,

   $$\|STx\|_Z \leq \|S\| \, \|Tx\|_Y \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|_X.$$

   เพราะฉะนั้น ST มีขอบเขตและ $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

สรุป: $\mathcal{L}(X, Y)$ สืบทอดโครงสร้างนอร์มจาก Y; ความบริบูรณ์ของ Y ส่งต่อไปยังปริภูมิของตัวดำเนินการ; และการประกอบคูณค่าขึ้นได้. □

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ในมิติจำกัด ทุกตัวดำเนินการเชิงเส้นมีขอบเขต. เหตุผลคือทุกนอร์มบนปริภูมิมิติจำกัดสมมูลกัน และเราเลือกนอร์มผลบวกของสัมประสิทธิ์ในฐานหนึ่งได้. ต้นฉบับกล่าวข้อนี้ใน (Alt 2012, p. 149). ในมิติอนันต์ข้อความนี้ไม่จริง ดังตัวอย่างอนุพันธ์ใน easybox ข้างต้น.

บทตั้ง 5.1.4: การขยายจากปริภูมิย่อยหนาแน่น

ให้ D เป็นปริภูมิย่อยหนาแน่นของปริภูมินอร์ม X, ให้ Y เป็นปริภูมิบานาค และให้ $T \in \mathcal{L}(D, Y)$. แล้วมีตัวดำเนินการต่อเนื่อง $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง $\widetilde{T}|_D = T$. ยิ่งไปกว่านั้น $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับ $x \in X$ เลือกลำดับใน D ที่ลู่เข้าหา x. ภาพของลำดับนั้นเป็น Cauchy เพราะ T มีขอบเขต; เพราะ Y บริบูรณ์ ลิมิตจึงมีอยู่. ต้องตรวจว่าลิมิตไม่ขึ้นกับลำดับที่เลือก.

1. **นิยาม.** ให้ $x \in X$. เลือก $(d_n) \subset D$ ซึ่ง $d_n \to x$. แล้ว
$$\|Td_n - Td_m\|_Y \le \|T\|\,\|d_n - d_m\|_X \to 0,$$
ดังนั้น (Td_n) เป็น Cauchy ใน Y. นิยาม $\widetilde{T}x := \lim_n Td_n$.
2. **ไม่ขึ้นกับลำดับ.** ถ้า $d'_n \to x$ ด้วย แล้ว $\|Td_n - Td'_n\|_Y \le \|T\|\|d_n - d'_n\|_X \to 0$, ดังนั้นลิมิตเดียวกัน.
3. **ความเป็นเชิงเส้นและขอบเขต.** ความเป็นเชิงเส้นตามจากลิมิต. สำหรับ $x \in X$,
$$\|\widetilde{T}x\|_Y = \lim_n \|Td_n\|_Y \le \|T\| \lim_n \|d_n\|_X = \|T\|\|x\|_X.$$
จึง $\|\widetilde{T}\| \le \|T\|$. บน D เรามี $\widetilde{T} = T$ จึง $\|\widetilde{T}\| \ge \|T\|$. ดังนั้นนอร์มเท่ากัน.
4. **เอกลักษณ์.** ถ้า $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ และ $S|_D = T$ แล้วสำหรับ $d_n \to x$,
$$Sx = \lim_n Sd_n = \lim_n Td_n = \widetilde{T}x.$$

สรุป: ตัวดำเนินการที่มีขอบเขตบนเซตหนาแน่นขยายได้เพียงทางเดียวและไม่เพิ่มนอร์ม. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ตัวอย่างจากสัญญาณ และการเปรียบเทียบปริภูมิ

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ตัวดำเนินการสามตัวที่เจอบ่อย

- **ตัวดำเนินการคูณ.** บน $C[0,1]$ ให้ $(M_g f)(t) = g(t)f(t)$ โดย $g \in C[0,1]$ คงที่. แล้ว $\|M_g\| = \|g\|_\infty$: ด้านหนึ่ง $|g(t)f(t)| \le \|g\|_\infty \|f\|_\infty$; อีกด้านหนึ่งเลือกจุด t_0 ที่ $|g(t_0)| = \|g\|_\infty$ แล้วใช้ฟังก์ชันที่เกือบเป็น 1 รอบ t_0.
- **ตัวดำเนินการเลื่อน.** บน ℓ^2 ให้ $S(s_1, s_2, \ldots) = (0, s_1, s_2, \ldots)$. แล้ว $\|S\| = 1$ เพราะ $\|Ss\|_2 = \|s\|_2$; S ไม่ใช่การส่งทั่วถึง.
- **ฟังก์ชันนัลปริพันธ์.** บน $C[0,1]$ ให้ $Tf = \int_0^1 f(t)\,dt$. แล้ว $\|T\| = 1$: อสมการ $|Tf| \le \|f\|_\infty$ ให้ $\|T\| \le 1$, และ $f \equiv 1$ ให้ค่า 1.

ต้นฉบับกล่าวตัวอย่างตัวดำเนินการคูณและฟังก์ชันนัลปริพันธ์ (Alt 2012, p. 152).

นิยาม 5.1.3: การส่งผลหารและสมสัณฐาน

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น.

(a) T เป็น**การส่งผลหาร** (quotient map) ถ้า T ส่งบอลเปิดหนึ่งหน่วยของ X ไปทั่วบอลเปิดหนึ่งหน่วยของ Y:

$$T\big(\{x \in X : \|x\|_X < 1\}\big) = \{y \in Y : \|y\|_Y < 1\}.$$

(b) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ เป็น**สมสัณฐาน** (isomorphism) ถ้า T เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง และ $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. ถ้า $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ ทุก x เราเรียก T ว่า**การส่งสมมิติ** (isometry).

ปริภูมินอร์มสองปริภูมิเป็น**สมสัณฐานกัน** ถ้ามีสมสัณฐานระหว่างกัน. สมสัณฐานจึงเป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงซึ่งมีค่าคงตัว $m, M > 0$ ที่

$$m\|x\|_X \le \|Tx\|_Y \le M\|x\|_X \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

ค่าคงตัวเลือกได้เป็น $m = 1/\|T^{-1}\|$ และ $M = \|T\|$ เพราะ T, T^{-1} มีขอบเขต.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“สมสัณฐานกัน” ไม่ได้หมายความว่าระยะทางเท่ากันทุกจุด. มันหมายความว่าปริภูมิทั้งสองมีโครงสร้างเชิงเส้นและโครงสร้างลิมิตแบบเดียวกัน: ลำดับลู่เข้าในปริภูมิหนึ่งไปเป็นลำดับลู่เข้าในอีกปริภูมิหนึ่ง และกลับกัน. การส่งสมมิติเป็นกรณีพิเศษที่แรงกว่า เพราะมันรักษาระยะทางจริง ๆ.

ทฤษฎีบท 5.1.5: แผนที่ธรรมชาติเป็นการส่งผลหาร

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ U เป็นปริภูมิย่อยปิดของ X. นิยาม $q : X \to X/U$ โดย $q(x) = [x]$. แล้ว q เป็นการส่งผลหาร. โดยเฉพาะ $\|q\| = 1$ เมื่อ $X \neq U$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้พจนานุกรมระหว่างบอลเปิดใน X/U กับระยะทางถึง U: การมีตัวแทนที่อยู่ใกล้ x พอดี คือการที่คลาส $[x]$ มีนอร์มเล็ก.

1. **นิยามของผลหาร.** บน X/U ใช้
$$\|[x]\| := \inf_{u \in U} \|x - u\|_X.$$
เนื่องจาก U ปิด ค่านี้เป็นนอร์มบน X/U.

2. **ส่งบอลออก.** ถ้า $\|x\|_X < 1$ แล้ว $\|[x]\| \le \|x\|_X < 1$ เพราะเลือก $u = 0$ ได้. เพราะฉะนั้น q ส่งบอลหน่วยเปิดของ X เข้าไปอยู่ในบอลหน่วยเปิดของ X/U.

3. **ส่งบอลเข้า.** ให้ $\|[x]\| < 1$. จากนิยามของอินฟิมัม มี $u \in U$ ซึ่ง $\|x - u\|_X < 1$. แต่ $q(x - u) = [x]$. ดังนั้นทุกจุดในบอลเปิดของ X/U มาจากบอลเปิดของ X.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

4. **นอร์ม.** จากสองข้อก่อน $\|q\| \le 1$ และ q ส่งบอลเปิดหนึ่งหน่วยของ X ไปทั่วบอลเปิดหนึ่งหน่วยของ X/U. เมื่อ $X \neq U$ ปริภูมิผลหารไม่เป็นศูนย์ จึง

$$\|q\| = \sup_{\|x\|_X<1} \|q(x)\| = \sup_{\|y\|<1} \|y\| = 1.$$

สรุป: แผนที่ธรรมชาติ $x \mapsto [x]$ ไม่เพียงแต่ต่อเนื่อง แต่ส่งบอลเปิดหนึ่งหน่วยไปทั่วบอลเปิดหนึ่งหน่วย; จึงเป็นการส่งผลหาร. □

ทฤษฎีบท 5.1.6: ปริภูมิ c และ c_0 เป็นสมสัณฐานกัน

ให้ c เป็นปริภูมิของลำดับลู่เข้าพร้อมนอร์มซูพรีมัม และ c_0 เป็นปริภูมิของลำดับที่ลู่เข้าหา 0 พร้อมนอร์มเดียวกัน. แล้ว c และ c_0 เป็นสมสัณฐานกัน.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แยกส่วนคงที่ของลำดับออกมา: เก็บลิมิตไว้ที่พิกัดแรก แล้วเลื่อนส่วนที่เหลือลงหนึ่งตำแหน่ง. ตัวผกผันก็ทำกลับกัน.

1. **นิยาม T.** สำหรับ $x = (s_n) \in c$ ให้ $L = \lim_n s_n$ และ

$$Tx = (L,\ s_1 - L,\ s_2 - L,\ s_3 - L, \ldots).$$

พิกัดหลังลู่เข้าหา $L - L = 0$ ดังนั้น $Tx \in c_0$. การส่ง T เป็นเชิงเส้น.

2. **ขอบเขต.** $|L| \le \|x\|_\infty$ และ $|s_n - L| \le 2\|x\|_\infty$. ดังนั้น $\|Tx\|_\infty \le 2\|x\|_\infty$.

3. **ตัวผกผัน.** สำหรับ $y = (t_1, t_2, \ldots) \in c_0$ ให้

$$Sy = (t_2 + t_1,\ t_3 + t_1,\ t_4 + t_1, \ldots).$$

ลำดับนี้ลู่เข้าหา t_1 จึงอยู่ใน c, และ $\|Sy\|_\infty \le 2\|y\|_\infty$. ตรวจตรง ๆ ได้ $TSy = y$ และ $STx = x$.

4. **ไม่ใช่การส่งสมมิติ.** ให้ $x_n = 1$ สำหรับ $n = 1$ หรือ $n \ge 5$ และ $x_n = -1$ สำหรับ $n = 2, 3, 4$. แล้ว x มีลิมิต 1 และ $\|x\|_\infty = 1$. คำนวณ

$$Tx = (1,\ 0,\ -2,\ -2,\ -2,\ 0,\ 0, \ldots),$$

ซึ่งมีนอร์ม 2. ดังนั้น T ขยายนอร์มของเวกเตอร์นี้เป็นสองเท่า; มันยังเป็นสมสัณฐานเพราะมีตัวผกผันต่อเนื่อง.

สรุป: c และ c_0 ต่างกันเพียงการเลื่อนลิมิตออกมาที่พิกัดแรก; โครงสร้างเชิงเส้นและลิมิตจึงเหมือนกันในเชิงสมสัณฐาน. □

สรุปใจความ

- ตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่องเท่ากับตัวดำเนินการที่มีค่าคงตัว C คุมการขยายของทุกเวกเตอร์.
- นอร์มของตัวดำเนินการคือซูพรีมัมของอัตราส่วน $\|Tx\|/\|x\|$; มันอาจไม่ถูกบรรลุ แต่ให้ค่าขั้นที่คมที่สุด.
- $\mathcal{L}(X, Y)$ เป็นปริภูมินอร์ม และเป็นบานาคเมื่อ Y เป็นบานาค.
- การประกอบได้อสมการ $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$; อสมการอาจเป็นอสมการเคร่ง.
- ตัวดำเนินการบนเซตหนาแน่นขยายได้เพียงทางเดียวโดยไม่เพิ่มนอร์ม; แผนที่ธรรมชาติไปยังผลหารเป็นการส่งผล

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

หาร และสมสัณฐานเก็บโครงสร้างลิมิตไว้แต่ไม่จำเป็นต้องเก็บระยะทาง.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. จงหา $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ และ $\|A\|_2$.

2. ให้ $T : \ell^2 \to \ell^2$ นิยามโดย $T(s_1, s_2, \ldots) = (s_2, s_3, \ldots)$. จงแสดงว่า $\|T\| = 1$ และหาว่ามีนอร์มบรรลุหรือไม่.

3. ให้ D เป็นอนุพันธ์บนปริภูมิพหุนามบน $[0,1]$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม. จงใช้ $p_n(t) = t^n$ แสดงว่า D ไม่มีขอบเขต.

4. ให้ $A = \operatorname{diag}(1, 0)$ และ $B = \operatorname{diag}(0, 1)$ บน $\mathbb{R}^2$. จงตรวจว่า $\|AB\| < \|A\|\|B\|$ และอธิบายว่าทำไมอสมการการประกอบจึงไม่เป็นสมการ.

5. ให้ T นิยามบนพหุนามใน $C[0,1]$ โดย $Tp = p(0)$. จงหานอร์มของ T และอธิบายว่าเหตุใดจึงขยายไปยัง $C[0,1]$ ได้.

6. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน: (ก) ตัวดำเนินการเชิงเส้นทุกตัวบนปริภูมินอร์มมีขอบเขต; (ข) ถ้า $\|T\| = 0$ แล้ว $T = 0$; (ค) ถ้า T มีขอบเขต แล้วภาพของบอลหนึ่งหน่วยเป็นเซตกระชับ; (ง) $\|ST\| = \|S\|\|T\|$ เสมอ.

7. ใช้ฟังก์ชัน `matrix_norms` และ `exercise_matrix_norms` ใน `code/funkana/ch05.py`. จงตรวจค่าทั้งสามของเมทริกซ์ในข้อ 1 และตรวจอสมการ $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. คอลัมน์ของ A มีผลบวกค่าสัมบูรณ์ 3 และ 3; ดังนั้น $\|A\|_1 = 3$. แถวมีผลบวก 3 และ 3; ดังนั้น $\|A\|_\infty = 3$. ตรวจ
$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$
ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะทั้งสองเป็น 5 และ $\|A\|_2 = \sqrt{5} \approx 2.2361$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

2. ให้ $s \in \ell^2$. แล้ว $\|Ts\|_2^2 = \sum_{n \ge 2} |s_n|^2 \le \|s\|_2^2$, ดังนั้น $\|T\| \le 1$. ใช้ $s = e_2$ ได้ $\|Ts\|_2 = \|e_1\|_2 = 1$, ดังนั้น $\|T\| = 1$ และนอร์มบรรลุที่ e_2.

3. ให้ $p_n(t) = t^n$. แล้ว $\|p_n\|_\infty = 1$ แต่ $p_n'(t) = n t^{n-1}$ จึง $\|D p_n\|_\infty = n$. ถ้า D มีขอบเขตด้วยค่าคงตัว C จะได้ $n \le C$ ทุก n ซึ่งเป็นไปไม่ได้. ดังนั้น D ไม่มีขอบเขต.

4. A และ B มีนอร์ม ℓ^2 เท่ากับ 1 แต่ $AB = 0$ จึง $\|AB\| = 0 < 1 = \|A\|\|B\|$. อสมการการประกอบเป็น “ไม่เกิน” เพราะมันให้ค่าขั้นในกรณีที่แย่ที่สุด; การประกอบอาจทำให้ทิศที่ B ขยายถูก A หดกลับจนหมด.

5. สำหรับพหุนาม p, $|Tp| = |p(0)| \le \|p\|_\infty$, ดังนั้น $\|T\| \le 1$. ใช้ $p = 1$ ได้ $Tp = 1$ และ $\|p\|_\infty = 1$, ดังนั้น $\|T\| = 1$. เราไม่ต้องใช้ความหนาแน่นเลย: นิยาม $\widetilde{T} f = f(0)$ บน $C[0,1]$ โดยตรง. แล้ว $\widetilde{T}$ ต่อเนื่อง มีนอร์ม 1 และตรงกับ T บนพหุนาม.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

6. (ก) เท็จ: อนุพันธ์ในข้อ 3 เป็นตัวอย่างค้าน. (ข) จริง: $\|Tx\| \le 0$ ทุก x จึง $Tx = 0$. (ค) เท็จ: ตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน ℓ^2 มีขอบเขต แต่ภาพของบอลหนึ่งหน่วยไม่กระชับ. (ง) เท็จ: ตัวอย่างในข้อ 4.

7. คอลัมน์ของ A มีผลบวกค่าสัมบูรณ์ $|2| + |1| = 3$ และ $|-1| + |2| = 3$; ดังนั้น $\|A\|_1 = 3$. แถวมีผลบวก $2 + 1 = 3$ และ $1 + 2 = 3$; ดังนั้น $\|A\|_\infty = 3$. ต่อไป

$$A^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I,$$

ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสองจึงเป็น 5 และ $\|A\|_2 = \sqrt{5} \approx 2.2361$. ค่าขั้นคือ $\sqrt{3 \cdot 3} = 3$ ซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ $\sqrt{5}$ ตามที่ต้องการ. แบบทดสอบยืนยันค่าทั้งสามนี้.

อ่านต่อ

§5.1 ให้ภาษาของขนาด: นอร์มของตัวดำเนินการบอกว่าการส่งหนึ่งขยายเวกเตอร์ได้มากที่สุดเท่าไร และทำให้เราพูดถึงตัวดำเนินการใกล้กันได้. §5.2 จะเพิ่มภาษาของการวัด: ปริภูมิคู่รวมฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่องทั้งหมด, ตัวดำเนินการผูกพันย้ายไม้บรรทัดผ่านตัวดำเนินการ, และอนุกรมนอยมันน์ย้อนสมการเมื่อตัวดำเนินการอยู่ใกล้เอกลักษณ์. คำถามที่ยังเปิดอยู่คือ บนปริภูมิย่อยหนึ่ง มีไม้บรรทัดมากพอจะวัดทุกเวกเตอร์หรือไม่; §5.3 ตอบด้วยทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค.

5.2 คู่เชิง ตัวดำเนินการผูกพัน และอนุกรมนอยมันน์

ภาพรวมก่อนอ่าน

ใน §5.1 เราวัดเวกเตอร์ด้วยนอร์มของมัน. แต่ในหลายปัญหา เราไม่ได้ต้องการแค่ “ยาวเท่าไร” เราต้องการวัด “องค์ประกอบตามทิศหนึ่งเป็นเท่าไร” ด้วย. เครื่องมือที่ทำหน้าที่นี้คือ*ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง*: มันกินเวกเตอร์หนึ่งตัวแล้วคืนตัวเลขหนึ่งตัว. ฟังก์ชันนัลทั้งหมดรวมกันเป็นปริภูมิใหม่ เรียกว่าปริภูมิคู่. เมื่อมีปริภูมิคู่ เราสามารถย้ายการวัดผ่านตัวดำเนินการได้: ถ้า T ส่ง X ไป Y และเรามีไม้บรรทัดบน Y หนึ่งอัน เราเอามันมาวัด X ผ่าน T ได้. การย้ายนี้คือ*ตัวดำเนินการผูกพัน*.

ส่วนที่สองของหัวข้อนี้คือการย้อนสมการ $y = Bx$. ถ้า B อยู่ใกล้ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ เราสามารถเขียน $B = I - T$ โดย T มีนอร์มเล็ก แล้วกลับสมการด้วยอนุกรมเรขาคณิตของตัวดำเนินการ:

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots.$$

อนุกรมนี้คือ*อนุกรมนอยมันน์*. มันไม่ใช่สูตรลัดเพื่อความสวยงาม: ขนาดของ T บอกเราว่าต้องใช้กี่พจน์จึงจะได้ความแม่นที่ต้องการ และบอกเราด้วยว่าตัวผกผันจะขยายความคลาดเคลื่อนมากแค่ไหน.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-21

5.2.1 ปริภูมิคู่เชิง

นิยาม 5.2.1: ปริภูมิคู่และนอร์มคู่

ให้ X เป็นปริภูมินอร์มบน $\mathbb{K}$. **ปริภูมิคู่** (dual space) ของ X คือ

$$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K}),$$

พร้อมนอร์ม

$$\|x'\|_{X'} := \sup_{\|x\|_X \le 1} |x'(x)|.$$

สมาชิกของ X' เรียกว่า**ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง** (continuous linear functional). เราเขียน $\langle x, x' \rangle := x'(x)$ เมื่อต้องการเน้นการจับคู่.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ฟังก์ชันนัลคือ “ไม้บรรทัดหนึ่งอัน”. มันวัดเวกเตอร์ได้หนึ่งตัวเลข และเพราะเป็นเชิงเส้น การวัดจึงเคารพการบวกและการคูณสเกลาร์. นอร์ม $\|x'\|$ คืออัตราส่วนที่แย่ที่สุดระหว่างขนาดของผลลัพธ์กับขนาดของเวกเตอร์:

$$|x'(x)| \le \|x'\|_{X'} \|x\|_X \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

ตัวอย่างที่คุ้นเคย: บน $\mathbb{R}^n$ ฟังก์ชันนัล $x'(x) = a \cdot x$ สำหรับเวกเตอร์คงที่ a หนึ่งตัว. บน $C[0,1]$ ฟังก์ชันนัลการประเมิน $f \mapsto f(1/2)$ ก็เป็นไม้บรรทัดที่วัดค่าที่จุดหนึ่ง.

ทฤษฎีบท 5.2.1: ปริภูมิคู่เป็นปริภูมิบานาคเสมอ

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม. แล้ว X' พร้อมนอร์มคู่เป็นปริภูมิบานาค.

พิสูจน์. **แนวคิด.** $\mathbb{K}$ บริบูรณ์ และ $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. ใช้ทฤษฎีบทว่า $\mathcal{L}(X, Y)$ บริบูรณ์เมื่อ Y บริบูรณ์ จาก §5.1 ได้ทันที.

1. **ใช้ผลจาก §5.1.** ในทฤษฎีบท 5.1.3 ข้อ (b) เราได้ว่า $\mathcal{L}(X, Y)$ เป็นบานาคเมื่อ Y เป็นบานาค โดยไม่ต้องให้ X บริบูรณ์.
2. **แทน $Y = \mathbb{K}$.** สนาม $\mathbb{K}$ เป็นปริภูมิบานาคหนึ่งมิติ. ดังนั้น $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ เป็นบานาค.

สรุป: แม้ X จะไม่บริบูรณ์ ปริภูมิคู่ X' ก็บริบูรณ์เสมอ. □

ลองเอง: ไม้บรรทัดสามแบบบน $\mathbb{R}^2$

ให้ $s = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$. คำนวณ $\|s\|_2$, $\|s\|_1$ และ $\|s\|_\infty$.

เราได้ $\|s\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\|s\|_1 = 3 + 4 = 7$ และ $\|s\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$. ตัวเลขทั้งสามนี้มีแบบทดสอบยืนยัน. สังเกตว่าเวกเตอร์เดียวกันมี “ขนาด” ต่างกันตามไม้บรรทัดที่เลือก. ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันนัลเดียวกันอาจมีนอร์มคู่ต่างกันเมื่อปริภูมิต้นทางใช้คนละนอร์ม.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

5.2.2 ตัวดำเนินการผูกพัน

นิยาม 5.2.2: ตัวดำเนินการผูกพัน

สำหรับปริภูมินอร์ม X, Y และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ เรานิยาม**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint operator) $T' : Y' \to X'$ ด้วยสูตร

$$(T'y')(x) := y'(Tx) \qquad \text{สำหรับ } y' \in Y',\ x \in X.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ถ้า T คือ “ส่งเวกเตอร์จาก X ไป Y” แล้ว T' คือ “ส่งไม้บรรทัดจาก Y กลับมา X”. ไม้บรรทัดใหม่บน X ทำงานโดยส่ง x ผ่าน T ก่อน แล้วใช้ไม้บรรทัดเดิมบน Y วัด. ถ้าระบุ $(\mathbb{K}^m)'$ กับ $\mathbb{K}^m$ ผ่านสัมประสิทธิ์ T' คือทรานสโพส A^{T}. ถ้าแทนฟังก์ชันนัลด้วยผลคูณภายในผ่านทฤษฎีบทของรีสซ์ในหัวข้อนี้ ตัวดำเนินการผูกพันฮิลเบิร์ต T^* คือทรานสโพสสังยุค $\overline{A^{\mathsf{T}}}$.

ทฤษฎีบท 5.2.2: คุณสมบัติเชิงเส้นของตัวดำเนินการผูกพัน

ให้ X, Y, Z เป็นปริภูมินอร์ม.

(a) การส่ง $T \mapsto T'$ จาก $\mathcal{L}(X, Y)$ ไป $\mathcal{L}(Y', X')$ เป็นเชิงเส้น.

(b) $\|T'\|_{Y' \to X'} \le \|T\|_{X \to Y}$.

(c) ถ้า $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ แล้ว $(ST)' = T'S'$.

(d) $I'_X = I_{X'}$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทุกข้อตามมาจากนิยาม $(T'y')(x) = y'(Tx)$ และอสมการพื้นฐานของนอร์ม. ข้อ (b) ไม่ต้องใช้ฮาห์น–บานาค; ความเท่ากันจะตามมาทีหลัง.

1. **(a)** สำหรับ $y' \in Y'$ และ $x \in X$,
$$((\alpha T_1 + T_2)'y')(x) = y'((\alpha T_1 + T_2)x) = \alpha y'(T_1 x) + y'(T_2 x),$$
ซึ่งเท่ากับ $(\alpha T_1' y' + T_2' y')(x)$. ดังนั้น $(\alpha T_1 + T_2)' = \alpha T_1' + T_2'$.

2. **(b)** สำหรับ $\|y'\|_{Y'} \le 1$ และ $\|x\|_X \le 1$,
$$|(T'y')(x)| = |y'(Tx)| \le \|y'\|_{Y'} \|Tx\|_Y \le \|T\| \|x\|_X \le \|T\|.$$
หาซูพรีมัมบน x แล้วบน y' ได้ $\|T'\| \le \|T\|$.

3. **(c)** สำหรับ $z' \in Z'$ และ $x \in X$,
$$((ST)'z')(x) = z'(STx) = (S'z')(Tx) = ((T'S')z')(x).$$
ดังนั้น $(ST)'z' = T'S'z'$ ทุก z', จึง $(ST)' = T'S'$.

4. **(d)** $(I'y')(x) = y'(Ix) = y'(x)$ ทุก x, ดังนั้น $I'y' = y'$.

สรุป: การผูกพันกลับลำดับการประกอบ: $(ST)' = T'S'$; และมันไม่เพิ่มนอร์ม. □

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 5.2.3: ตัวดำเนินการผูกพันบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

ให้ H_1, H_2 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. แล้วมีตัวดำเนินการ $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^*y\rangle_{H_1} \qquad \text{สำหรับทุก } x \in H_1,\ y \in H_2.$$

นอกจากนี้ $\|T^*\| = \|T\|$ และ $(T^*)^* = T$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับ y คงที่ การส่ง $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ เป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน H_1. ใช้ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ (จากบท“เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต”) เพื่อเขียนมันเป็นการหาผลคูณภายในกับเวกเตอร์หนึ่งตัว; เวกเตอร์นั้นคือ T^*y.

1. **มีอยู่.** ให้ $y \in H_2$. การส่ง $\ell_y(x) = \langle Tx, y\rangle$ เป็นเชิงเส้นและ

   $$|\ell_y(x)| \le \|Tx\|_{H_2}\|y\|_{H_2} \le \|T\|\|y\|_{H_2}\|x\|_{H_1}.$$

   ดังนั้น ℓ_y ต่อเนื่อง. ตามทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ มี $z \in H_1$ เพียงตัวเดียวซึ่ง $\ell_y(x) = \langle x, z\rangle$ ทุก x. นิยาม $T^*y := z$.

2. **เชิงเส้นและขอบเขต.** ผลคูณภายในในหนังสือเล่มนี้เป็นเชิงเส้นในตัวแปรแรกและเป็น**สังยุคเชิงเส้น**ในตัวแปรที่สอง:

   $$\langle x, \alpha z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, z\rangle.$$

   ดังนั้นสำหรับ $y_1, y_2 \in H_2$ และ $\alpha \in \mathbb{K}$,

   $$\langle x, T^*(\alpha y_1 + y_2)\rangle = \langle Tx, \alpha y_1 + y_2\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + T^*y_2\rangle.$$

   เพราะเซตของ x แยกจุดได้ (บท“เรขาคณิตของฮิลเบิร์ต”) จึง $T^*(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T^*y_1 + T^*y_2$; นั่นยืนยันว่า T^* เคารพการบวกและการคูณสเกลาร์. นอกจากนี้

   $$\|T^*y\|_{H_1}^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle T(T^*y), y\rangle \le \|T\|\|T^*y\|\|y\|,$$

   จึง $\|T^*y\| \le \|T\|\|y\|$ และ $\|T^*\| \le \|T\|$.

3. **เอกลักษณ์และ $(T^*)^* = T$.** ถ้า S_1, S_2 ต่างเป็นตัวผูกพันของ T แล้ว $\langle x, (S_1 - S_2)y\rangle = 0$ ทุก x, y. ทดสอบสมการนี้ด้วย $x = (S_1 - S_2)y$: จะได้ $\|(S_1 - S_2)y\|^2 = 0$ และด้วยเหตุนี้ $S_1 = S_2$. สำหรับ T^* เราใช้เอกลักษณ์กับ T^* แทน T: $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$. เมื่อใช้สมมาตรเชิงสังยุค จะได้ $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$; แปลว่า T เป็นตัวผูกพันของ T^*. เพราะตัวผูกพันมีเพียงตัวเดียว จึง $(T^*)^* = T$.

4. **นอร์มเท่ากัน.** จากขั้นที่แล้วใช้กับ T^* ได้ $\|T\| = \|(T^*)^*\| \le \|T^*\|$. รวมกับ $\|T^*\| \le \|T\|$ ได้ความเท่ากัน.

สรุป: บนปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการผูกพันเขียนได้ด้วยผลคูณภายใน และมีนอร์มเท่ากับตัวเดิม. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

สำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ที่มองเป็นตัวดำเนินการ $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ตัวดำเนินการผูกพันคือ $A^* = \overline{A^{\mathsf{T}}}$. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จริง $A^* = A^{\mathsf{T}}$. ตัวดำเนินการที่ $T^* = T$ เรียกว่า**ตัวดำเนินการผูกพันในตัว** (self-adjoint operator). ตัวอย่างเช่น ตัวดำเนินการเบลอแบบสมมาตรใน §5.2.4 เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว.

สงวนลิขสิทธิ์ Preprint · 2026-10-24

5.2.3 อนุกรมนอยมันน์

ทฤษฎีบท 5.2.4: อนุกรมนอยมันน์และตัวผกผัน

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $T \in \mathcal{L}(X)$. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ ลู่เข้าใน $\mathcal{L}(X)$ แล้ว $I - T$ เป็นการส่งผกผันได้ และ

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

โดยเฉพาะ ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคและ $\|T\| < 1$ แล้วอนุกรมลู่เข้า และ

$$\|(I-T)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนผลรวมจำกัดแล้วใช้เอกลักษณ์ telescoping $(I-T)(I+T+\cdots+T^N) = I - T^{N+1}$. ถ้า $T^{N+1} \to 0$ การหาลิมิตให้ตัวผกผัน. ในกรณี $\|T\| < 1$ อนุกรมเรขาคณิตของนอร์มเป็นตัวคุม.

1. **ผลรวมจำกัด.** ให้ $S_N = \sum_{n=0}^{N} T^n$. แล้ว
$$(I-T)S_N = I - T^{N+1} = S_N(I-T).$$

2. **ลู่เข้าและผกผัน.** สมมติ S_N ลู่เข้าหา S เมื่อวัดด้วยนอร์มตัวดำเนินการ. เพราะ $T^n \to 0$ (ถ้าอนุกรมมีลิมิต พจน์ทั่วไปต้องมีลิมิตเป็นศูนย์) จึง $T^{N+1} \to 0$. หาลิมิตในเอกลักษณ์ข้างต้นได้ $(I-T)S = I = S(I-T)$. ดังนั้น $S = (I-T)^{-1}$.

3. **กรณี $\|T\| < 1$.** ถ้า X บริบูรณ์ แล้ว $\mathcal{L}(X)$ บริบูรณ์ (ทฤษฎีบท 5.1.3) และ
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty.$$
จากอสมการการประกอบในทฤษฎีบท 5.1.3(c) และการอุปนัย ได้ $\|T^n\| \le \|T\|^n$ ทุก n. ดังนั้นอนุกรม $\sum T^n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ในปริภูมิบานาค $\mathcal{L}(X)$.

4. **ค่าขั้นของตัวผกผัน.** จาก $\|T^n\| \le \|T\|^n$,
$$\|S_N\| \le \sum_{n=0}^{N} \|T\|^n \le \frac{1}{1-\|T\|}.$$
เพราะ $S_N \to S$ ใน $\mathcal{L}(X)$ และนอร์มเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึง $\|S\| \le 1/(1-\|T\|)$.

สรุป: ถ้า T เล็ก อนุกรมนอยมันน์คือตัวผกผันของ $I-T$; ยิ่ง $\|T\|$ ใกล้ 1 ตัวผกผันยิ่งใหญ่และอนุกรมยิ่งลู่เข้าช้า. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 5.2.5: ขนาดของเศษที่ถูกตัดทิ้งในอนุกรมนอยมันน์

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค, $T \in \mathcal{L}(X)$ และ $\|T\| < 1$. ให้

$$S_M := \sum_{m=0}^{M-1} T^m.$$

แล้ว

$$\|(I-T)^{-1} - S_M\| \leq \frac{\|T\|^M}{1-\|T\|}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เศษคือหางของอนุกรมเรขาคณิต: ดึง T^M ออกมาแล้วใช้ค่าขั้นของหางทั้งก้อน.

1. **แยกเศษ.** จากอนุกรมนอยมันน์

$$(I-T)^{-1} - S_M = \sum_{m=M}^{\infty} T^m = T^M \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

2. **หาค่าขั้น.** สำหรับผลรวมจำกัด $N \geq M$, ใช้อสมการการประกอบและอสมการสามเหลี่ยม:

$$\left\| \sum_{m=M}^{N} T^m \right\| \leq \sum_{m=M}^{N} \|T\|^m \leq \|T\|^M \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^M}{1-\|T\|}.$$

   ให้ $N \to \infty$; ความต่อเนื่องของนอร์มให้อสมการเดียวกันกับอนุกรมอนันต์.

สรุป: ข้อผิดพลาดจากการตัดอนุกรมลดลงแบบเรขาคณิตด้วยอัตรา $\|T\|$; ถ้า $\|T\|$ ใกล้ 1 ต้องใช้พจน์มากขึ้นมาก. □

บทแทรก 5.2.6: การรบกวนตัวดำเนินการที่ผกผันได้

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $A \in \mathcal{L}(X)$ มีตัวผกผันมีขอบเขต. ถ้า $B \in \mathcal{L}(X)$ และ

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

แล้ว B ผกผันได้และ

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B-A\|}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน $B = A(I + A^{-1}(B-A))$ แล้วใช้บทแทรกนอยมันน์กับการรบกวนเล็ก $T = -A^{-1}(B-A)$.

1. **แยกตัวประกอบ.** $B = A(I + A^{-1}(B-A))$.

2. **รบกวนเล็ก.** ให้ $T = -A^{-1}(B-A)$. แล้ว

$$\|T\| \leq \|A^{-1}\|\,\|B-A\| < 1.$$

   ดังนั้น $I - T$ ผกผันได้ตามทฤษฎีบท 5.2.4.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

3. **ผกผันของ B.** $I + A^{-1}(B - A) = I - T$, จึง

$$B^{-1} = (I - T)^{-1}A^{-1}.$$

ดังนั้น

$$\|B^{-1}\| \le \|(I - T)^{-1}\|\,\|A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|T\|} \le \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|B - A\|}.$$

สรุป: ตัวดำเนินการที่อยู่ใกล้ตัวดำเนินการผกผันได้ ยังผกผันได้; ระยะที่ปลอดภัยคือส่วนกลับของนอร์มของตัวผกผันเดิม. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): อนุกรมของเลขชี้กำลังและลอการิทึม

อนุกรมนอยมันน์เป็นต้นแบบของอนุกรมอื่น ๆ (Alt 2012, p. 154; PDF p. 166): สำหรับ $T \in \mathcal{L}(X)$ บนปริภูมิบานาค นิยาม

$$e^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}, \qquad \log(I - T) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n} \quad (\|T\| < 1).$$

อนุกรมทั้งสองลู่เข้าเพราะนอร์มของพจน์ถูกคุมด้วยอนุกรมเลขชี้กำลังหรืออนุกรมเรขาคณิต. เราไม่ต้องใช้ในบทนี้ แต่จะกลับมาเจอในบท“จุดตรึง” เมื่อศึกษาการวนซ้ำ.

5.2.4 การประยุกต์: การเบลอด้วยสังวัตนาการ และตัวผกผันที่ขยายสัญญาณรบกวน

ภาพรวมก่อนอ่าน

การเบลอที่เกิดจากมือสั่นเป็นการเฉลี่ยค่าพิกเซลกับเพื่อนบ้าน. บนกริดรอบ ๆ เราเขียนมันเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น B ได้. ชุดค่าถ่วงน้ำหนักที่ใช้ผสมค่าของแต่ละพิกเซลกับเพื่อนบ้านเรียกว่า**เคอร์เนลสังวัตนาการ** (convolution kernel). คำถามสำคัญไม่ใช่ “หน้าตาของเคอร์เนลนี้เป็นอย่างไร” อย่างเดียว แต่คือ “B ขยายสัญญาณได้มากที่สุดเท่าไร” และ “B^{-1} ขยายสัญญาณรบกวนได้มากที่สุดเท่าไร”. คำตอบแรกคือนอร์มของตัวดำเนินการ; คำตอบที่สองคือนอร์มของตัวผกผัน. ทั้งสองค่าคำนวณได้จากค่าลักษณะเฉพาะของ B บนโหมดฟูเรียร์.

ให้ $n \ge 2$ และพิจารณากริดวงกลม n จุด. เวกเตอร์ภาพหนึ่งแถวคือ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ โดยดัชนีคิดแบบวนรอบ: $x_0 = x_n$ และ $x_{n+1} = x_1$. ตัวดำเนินการเบลอสามจุดนิยามโดย

$$(B_a x)_i := a x_{i-1} + (1 - 2a) x_i + a x_{i+1}, \qquad 0 \le a \le \tfrac{1}{4}. \tag{5.1}$$

สูตรนี้คือสังวัตนาการ (convolution) แบบวนรอบ: ค่าใหม่แต่ละตำแหน่งคือผลบวกถ่วงน้ำหนักของค่าตัวเองกับเพื่อนบ้านสองข้าง. ค่าถ่วงน้ำหนักทั้งสามไม่เป็นลบและรวมกันได้ 1; ดังนั้นภาพคงที่ (ทุกพิกเซลเท่ากัน) ยังคงเป็นภาพเดิม. ในสองมิติ เราใช้เคอร์เนลเดียวกันในแนวตั้งและแนวนอน:

$$B_a^{(2)} := B_a \otimes B_a. \tag{5.2}$$

สมการ (5.2) หมายความว่าเราทำการเบลอแถวก่อน แล้วจึงเบลอคอลัมน์; ลำดับการทำไม่สำคัญเพราะตัวดำเนินการสองตัวสลับที่กัน.

ฉบับร่าง preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 5.2.7: โหมดฟูเรียร์และนอร์มของการเบลอ (n คู่)

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนคู่, $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ และ B_a เป็นตัวดำเนินการใน (5.1). สำหรับ $j = 0, 1, \ldots, n-1$ ให้

$$v_k^{(j)} = e^{2\pi i j k/n}, \qquad \lambda_j = 1 - 2a + 2a\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right).$$

แล้ว $B_a v^{(j)} = \lambda_j v^{(j)}$ และ

$$\|B_a\|_2 = 1, \qquad \|I - B_a\|_2 = 4a.$$

ในสองมิติ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda_j \lambda_k$ และ

$$\|B_a^{(2)}\|_2 = 1, \qquad \|I - B_a^{(2)}\|_2 = 1 - (1-4a)^2 = 8a - 16a^2.$$

ถ้า $0 < a < \frac{1}{4}$ แล้ว B_a และ $B_a^{(2)}$ ผกผันได้ และ

$$\|B_a^{-1}\|_2 = \frac{1}{1-4a}, \qquad \|(B_a^{(2)})^{-1}\|_2 = \frac{1}{(1-4a)^2}.$$

ในทางกลับกัน $I - B_a$ และ $I - B_a^{(2)}$ ไม่ผกผัน เพราะค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_0 = 1$ ทำให้ $1 - \lambda_0 = 0$. ในหนึ่งมิติเห็นได้ชัดว่า $(I - B_a)\mathbf{1} = 0$ โดย $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$; ในสองมิติ $(I - B_a^{(2)})\mathbf{1} = 0$ เช่นกัน.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เวกเตอร์ $v^{(j)}$ คือโหมดความถี่ j. การเลื่อนดัชนีคูณโหมดนี้ด้วย $e^{\pm 2\pi i j/n}$; เมื่อรวมสามพจน์จะได้สูตร λ_j. เราคำนวณใน $\mathbb{C}^n$ โดยใช้ฐานตั้งฉากปรกติ $v^{(j)}/\sqrt{n}$. สำหรับเมทริกซ์จริง นอร์มการดำเนินการบน $\mathbb{R}^n$ และบน $\mathbb{C}^n$ เท่ากัน; เขียน $x = u + iv$ แล้ว $\|B_a x\|_2^2 = \|B_a u\|_2^2 + \|B_a v\|_2^2$ และ $\|x\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$.

1. **การเลื่อนดัชนี.** สำหรับ $v = v^{(j)}$,

$$(B_a v)_k = a v_{k-1} + (1-2a) v_k + a v_{k+1} = a e^{-2\pi i j/n} v_k + (1-2a) v_k + a e^{2\pi i j/n} v_k.$$

   ใช้ $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ กับ $\theta = 2\pi j/n$ ได้ $(B_a v)_k = \lambda_j v_k$.

2. **ฐานตั้งฉากปรกติใน $\mathbb{C}^n$.** ให้ $w^{(j)} := v^{(j)}/\sqrt{n}$. แล้ว

$$\langle w^{(j)}, w^{(k)} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} e^{-2\pi i j \ell/n} e^{2\pi i k \ell/n} = \delta_{jk}.$$

   ดังนั้น $w^{(0)}, \ldots, w^{(n-1)}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $\mathbb{C}^n$. เพราะ B_a มีเมทริกซ์จริงและสมมาตร การคำนวณบน $\mathbb{C}^n$ ให้ spectral norm เดียวกันบน $\mathbb{R}^n$ ตามการแยก $x = u + iv$ ในแผนภาพแนวคิด.

3. **ค่าสูงสุดและต่ำสุด.** เนื่องจาก $\cos\theta \in [-1, 1]$,

$$1 - 4a \leq \lambda_j \leq 1.$$

   ค่าสูงสุด 1 เกิดที่ $j = 0$; ค่าต่ำสุด $1 - 4a$ เกิดที่ $j = n/2$ เมื่อ n เป็นคู่. ดังนั้น $\|B_a\| = \max_j |\lambda_j| = 1$ เพราะ $0 \leq a \leq 1/4$ ทำให้ $\lambda_j \geq 0$.

4. **ตัวดำเนินการ $I - B_a$.** ค่าลักษณะเฉพาะคือ $1 - \lambda_j \in [0, 4a]$, จึง $\|I - B_a\| = 4a$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

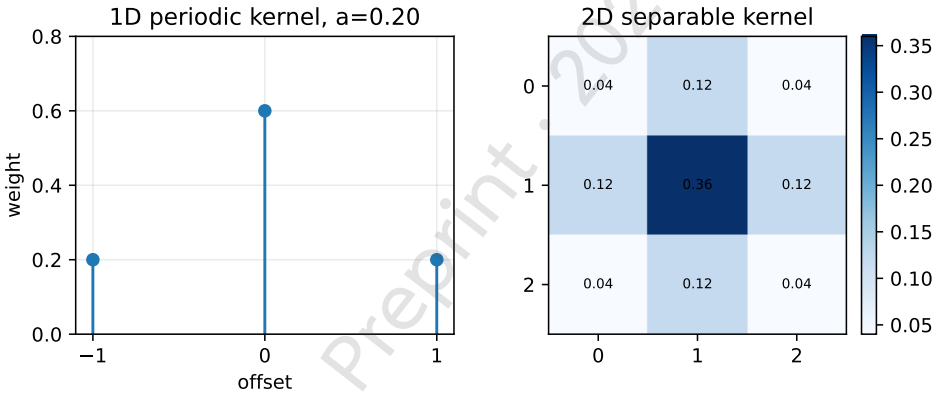
5. **สองมิติ.** ใน $\mathbb{C}^{n\times n}$ ฐานตั้งฉากปรกติคือ $w^{(j)}\otimes w^{(k)} = (v^{(j)}\otimes v^{(k)})/n$, เพราะ $\|v^{(j)}\otimes v^{(k)}\|_2 = n$. ตัวดำเนินการ $B_a^{(2)}$ มีค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_j\lambda_k$. การเปรียบเทียบนอร์มจริงและเชิงซ้อนทำทีละพิกัดของเมทริกซ์เหมือนในหนึ่งมิติ. เพราะ $0 \le \lambda_j\lambda_k \le 1$, $\|B_a^{(2)}\| = 1$. สำหรับ $I - B_a^{(2)}$ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $1-\lambda_j\lambda_k$ ซึ่งมีค่าสูงสุด $1-(1-4a)^2$.

6. **ตัวผกผัน.** ถ้า $0 < a < 1/4$ แล้ว $\lambda_j > 0$ ทุก j และ $\lambda_j\lambda_k > 0$. ดังนั้น B_a และ $B_a^{(2)}$ ผกผันได้. ค่าลักษณะเฉพาะของตัวผกผันคือ $1/\lambda_j$ และ $1/(\lambda_j\lambda_k)$; ค่าสูงสุดคือ $1/(1-4a)$ และ $1/(1-4a)^2$.

สรุป: การเบลอไม่ขยายภาพ (นอร์ม 1) แต่ตัวผกผันขยายได้มากเมื่อ a ใกล้ $1/4$; ที่ $a = 1/4$ โหมดตารางหมากรุกอยู่ในเคอร์เนลของ B และตัวผกผันไม่มีอยู่. □

ข้อควรระวัง

"$\|B\| = 1$" ไม่ได้แปลว่า B ไม่เปลี่ยนภาพ. มันแปลว่า B ไม่ทำให้ภาพยาวขึ้นในนอร์ม ℓ^2 เกินหนึ่งเท่า. การเบลอทำให้รายละเอียดหายไปเพราะมันลดค่าลักษณะเฉพาะของโหมดความถี่สูงลง ไม่ใช่เพราะมันเพิ่มขนาดของภาพ. ในทางกลับกัน ตัวผกผันมีนอร์มมากกว่า 1 มาก และนั่นคือที่มาของการขยายสัญญาณรบกวน.



รูปที่ 5.2: เคอร์เนลสังวัตนาการสามจุด $(a, 1-2a, a)$ และผลตอบสนองความถี่ $\lambda_j = 1-2a+2a\cos(2\pi j/n)$ สำหรับ $a = 0.20$ (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

ให้ $y = Bx + n$ โดย n คือสัญญาณรบกวน และให้ $\widehat{x} = B^{-1}y$. แล้ว

$$\widehat{x} = B^{-1}(Bx+n) = x + B^{-1}n. \tag{5.3}$$

เทอม $B^{-1}n$ คือส่วนที่เราไม่ต้องการ. จากอสมการนอร์ม

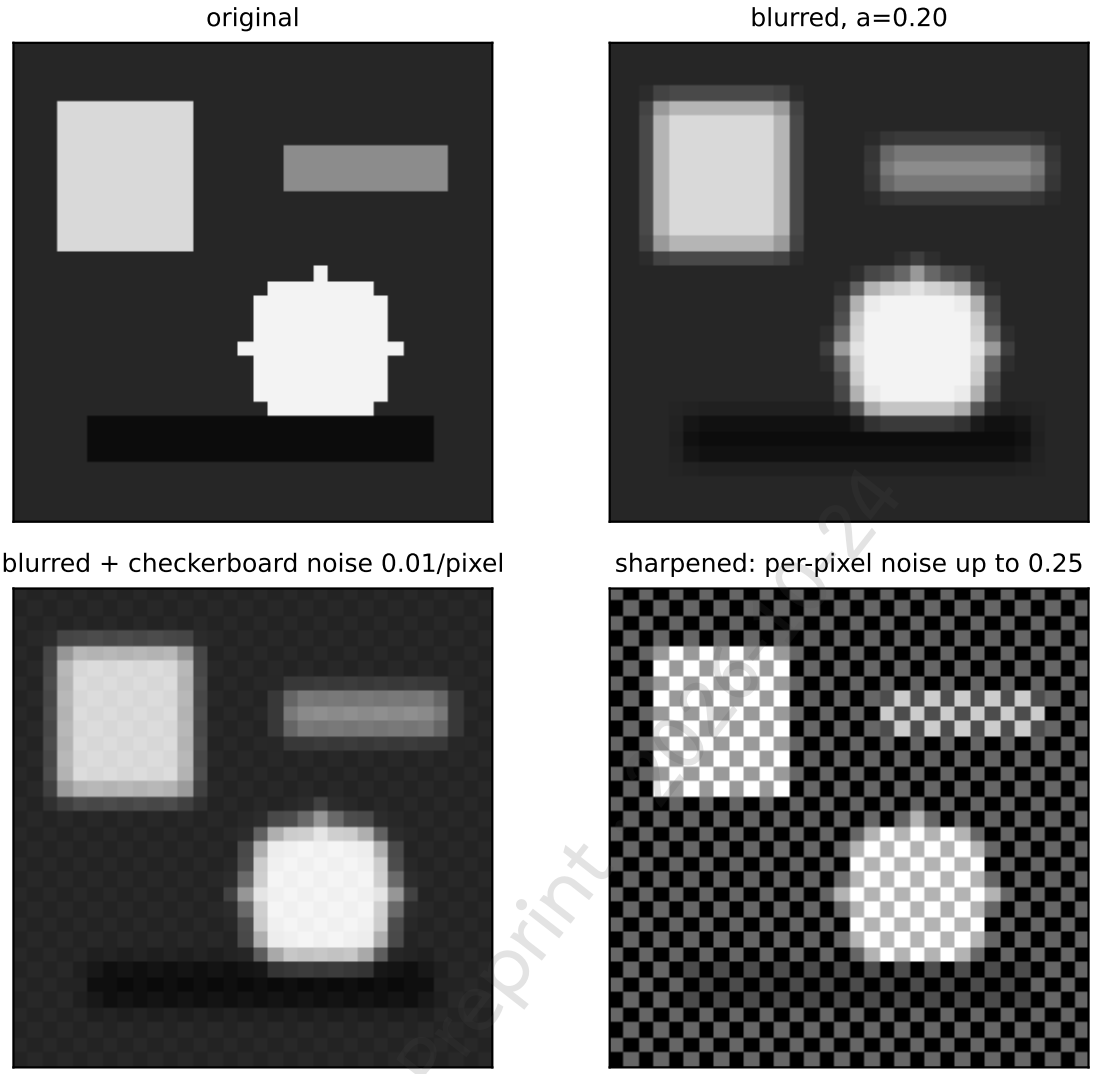
$$\|B^{-1}n\|_2 \le \|B^{-1}\|_2\|n\|_2.$$

ถ้า n อยู่ในโหมดที่แย่ที่สุด (โหมดความถี่สูงสุด คือตารางหมากรุก) อสมการนี้เป็นความเท่ากัน. สมมติว่าสัญญาณรบกวนมีแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซล. สำหรับ $a = 0.20$ ในสองมิติ $\|B^{-1}\| = 25$; ค่าสัมบูรณ์สูงสุดของ $B^{-1}n$ จึงเป็น 0.25. ในนอร์ม ℓ^2 ค่า $\|n\|_2 = 0.32$ ถูกขยายเป็น $\|B^{-1}n\|_2 = 8$. ที่ $a = 0.15$ ตัวผกผันมีนอร์ม 6.25 และแอมพลิจูดต่อพิกเซลเดียวกันกลายเป็น 0.0625. ที่ $a = 0.24$ ตัวผกผันมีนอร์ม 625 และแอมพลิจูดกลายเป็น 6.25. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

อนุกรมนอยมันน์บอกว่าเราไม่จำเป็นต้อง invert เมทริกซ์ทั้งก้อน. เขียน $B = I - T$ โดย $T = I - B$. แล้ว

$$B^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} T^m.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 5.3: ภาพสังเคราะห์ ภาพที่ถูกเบลอด้วย $a = 0.20$ และภาพที่ได้หลังการทำให้คมชัด. ขอบที่แหลมถูกเฉลี่ยให้เรียบ; ตัวผกผันพยายามดึงขอบกลับมา (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

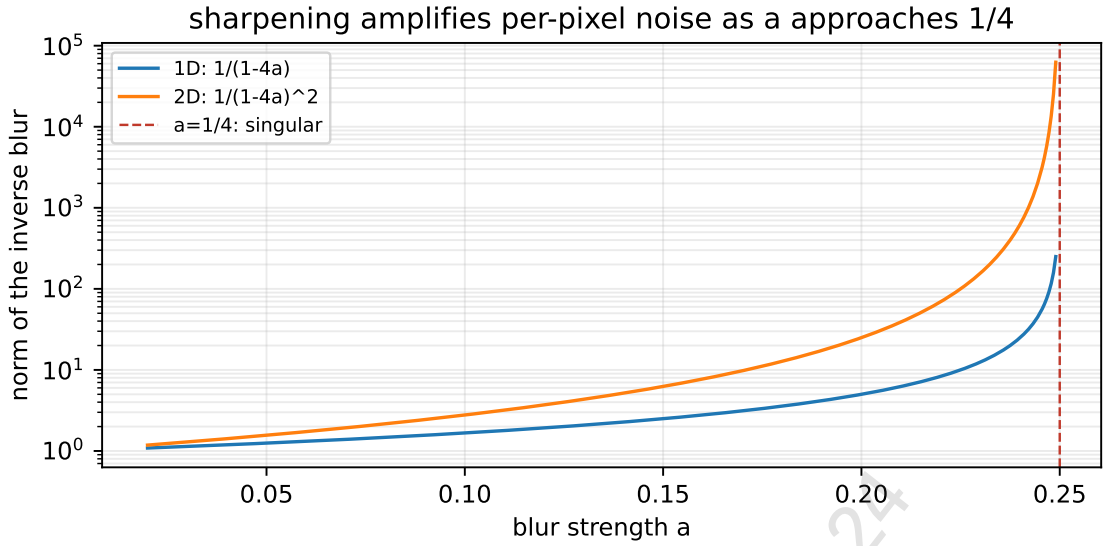
ผลรวมจำกัด $m = 0, \dots, M-1$ มีความคลาดเคลื่อนในโหมดที่แย่ที่สุดเท่ากับ

$$\|B^{-1} - \sum_{m=0}^{M-1} T^m\| = \frac{r^M}{1-r}, \qquad r = \|T\| = \|I - B\|.$$

สำหรับการเบลอสองมิติที่มี n คู่ (ในที่นี้ $n = 32$) $r = 8a - 16a^2$. ความเท่ากันในโหมดที่แย่ที่สุดมาจาก: $T = I - B$ สมมาตร มีค่าลักษณะเฉพาะ $t \in [0, r]$, ค่า r ถูกบรรลุ และฟังก์ชัน $t^M/(1-t)$ เพิ่มขึ้นบน $[0, r]$. รายการต่อไปนี้แสดงค่าที่คำนวณจากสูตรนี้. ทุกค่ามีแบบทดสอบยืนยัน.

- $a = 0.15$: $r = 0.84$, $\|B^{-1}\| = 6.25$, สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลให้ค่าสูงสุด 0.0625 และข้อผิดพลาด $M = 50$ คือ 0.00102293.
- $a = 0.20$: $r = 0.96$, $\|B^{-1}\| = 25$, สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลให้ค่าสูงสุด 0.25 และข้อผิดพลาด $M = 50$ คือ 3.24714.

ฉบับร่าง · Preprint



รูปที่ 5.4: การทำให้คมชัดภาพที่มีสัญญาณรบกวน: ยิ่ง a ใกล้ $1/4$ ตัวผกผันยิ่งขยายสัญญาณรบกวน. แกนตั้งคือค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนต่อพิกเซลหลังการทำให้คมชัด (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

- $a = 0.24$: $r = 0.9984$, $\|B^{-1}\| = 625$, สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลให้ค่าสูงสุด 6.25; ต้องใช้มากกว่า 50 พจน์.

ที่ $a = 0.20$ การใช้ 50 พจน์ยังให้ข้อผิดพลาดมากกว่า 1 เพราะ $r = 0.96$ ใกล้ 1. ต้องใช้ประมาณ 200 พจน์จึงจะได้ข้อผิดพลาด 0.00711519. ที่ $a = 0.15$ ใช้ 20 พจน์ได้ 0.191190 และใช้ 50 พจน์ได้ 0.00102293. ตัวเลขทั้งหมดนี้มาจากสูตร $r^M/(1-r)$ และมีแบบทดสอบยืนยัน.

ลองเอง: อ่านตัวเลขจากโค้ด

รัน `blur_operator_norms(0.20)` และ `neumann_blur_error(0.20, 50)` ใน `code/funkana/ch05.py`. ตรวจว่าได้ $\|I - B\| = 0.96$, $\|B^{-1}\| = 25$ และข้อผิดพลาด 3.24714. จากนั้นลองเปลี่ยน a เป็น 0.15 และ 0.24. จากตารางด้านบน จำนวนพจน์ที่ต้องใช้เมื่อ a เพิ่มจาก 0.15 เป็น 0.20 เพิ่มจาก 50 เป็นประมาณ 200 เพราะ r เพิ่มจาก 0.84 เป็น 0.96.

สรุปใจความ

- ปริภูมิคู่ X' คือปริภูมิของฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง และเป็นปริภูมิบานาคเสมอ.
- ตัวดำเนินการผูกพัน T' ย้ายไม้บรรทัดจาก Y กลับมา X; มันกลับลำดับการประกอบและไม่เพิ่มนอร์ม.
- บนปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการผูกพันเขียนได้ด้วยผลคูณภายใน: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.
- ถ้า $\|T\| < 1$ อนุกรมนอยมันน์ให้ $(I-T)^{-1} = \sum T^n$; ยิ่งนอร์มใกล้ 1 ตัวผกผันยิ่งใหญ่และอนุกรมยิ่งลู่เข้าช้า.
- การเบลอมีนอร์ม 1 แต่ตัวผกผันมีนอร์ม $1/(1-4a)^2$ ในสองมิติเมื่อ n คู่; ที่ $a = 0.20$ สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลกลายเป็นค่าสูงสุด 0.25. นี่คือคำตอบของคำถามเปิดบท: ปัญหาอยู่ที่ตัวผกผัน ไม่ใช่ที่การทำให้คมชัด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-04-21

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $s = (3, 4)$. จงหานอร์มของฟังก์ชันนัล $f_s(x) = 3x_1 + 4x_2$ เมื่อ x อยู่ใน ℓ^2, ℓ^∞ (มิติจำกัด) และ ℓ^1 ตามลำดับ.

2. ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ บน $\mathbb{R}^2$ พร้อมผลคูณภายในมาตรฐาน. จงเขียน A^* และตรวจเอกลักษณ์ $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ สำหรับ $x = (1, 2)$ และ $y = (3, -1)$.

3. ให้ $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/5 & 0 \end{pmatrix}$. จงหาตัวผกผันของ $I - T$ และข้อผิดพลาดของผลรวมนอยมันน์เมื่อใช้ $1, 2, 4, 8, 16$ พจน์.

4. ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนคู่ และ B_a เป็นการเบลอหนึ่งมิติที่ $a = 1/8$. จงหาค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมด, $\|B_a\|$, $\|I - B_a\|$ และนอร์มของตัวผกผัน. ทำเช่นเดียวกันในสองมิติ.

5. ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนคู่. จงแสดงว่า $B_{1/4}$ ไม่ผกผัน โดยหาค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นศูนย์และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้อง.

6. ให้ A เป็นเมทริกซ์จริงสมมาตร. จงแสดงว่า $A^* = A$ และอธิบายว่าทำไมตัวดำเนินการเบลอแบบสมมาตรจึงเป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว.

7. ภาพหนึ่งถูกเบลอด้วย $a = 0.20$ แล้วเติมสัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซล. จงอธิบายด้วย (5.3) ว่าเหตุใดการทำให้คมชัดจึงทำให้เห็นค่าสูงสุด 0.25 และเปรียบเทียบกับกรณี $a = 0.15$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. บน ℓ^2 นอร์มคู่คือ $\|s\|_2 = \sqrt{9 + 16} = 5$. บน ℓ^∞ (มิติจำกัด) นอร์มคู่คือ $\|s\|_1 = 3 + 4 = 7$. บน ℓ^1 นอร์มคู่คือ $\|s\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$. ตัวเลขทั้งสามมีแบบทดสอบยืนยัน.

2. $A^* = A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. สำหรับ $x = (1, 2)$ และ $y = (3, -1)$: $Ax = (5, 6)$ จึง $\langle Ax, y\rangle = 15 - 6 = 9$; และ $A^* y = (3, 3)$ จึง $\langle x, A^* y\rangle = 3 + 6 = 9$. ทั้งสองข้างเท่ากัน.

3. ผลบวกค่าสัมบูรณ์ตามแถวคือ $1/2$ และ $1/5$; ดังนั้น $\|T\|_\infty = \max\{1/2, 1/5\} = 1/2 < 1$. (รัศมีสเปกตรัมคือ $1/\sqrt{10} \approx 0.3162$, แต่เราใช้ผลบวกแถวเพื่อยืนยันภาวะหดตัว.) คำนวณตรง ๆ

$$(I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 10/9 & 5/9 \\ 2/9 & 10/9 \end{pmatrix}.$$

ข้อผิดพลาดของผลรวม M พจน์คือ $\|(I - T)^{-1} - S_M\|$. ค่าที่ได้คือ 0.589197 ($M = 1$), 0.151243 ($M = 2$), 0.0151243 ($M = 4$), 0.000151243 ($M = 8$) และ 1.51243×10^{-8} ($M = 16$). ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

4. ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนคู่. ที่ $a = 1/8$ ค่าลักษณะเฉพาะหนึ่งมิติคือ $1 - 1/4 + (1/4)\cos(2\pi j/n) = 3/4 + (1/4)\cos\theta$. ค่าต่ำสุดคือ $1/2$ (ที่ $j = n/2$) และค่าสูงสุดคือ 1 (ที่ $j = 0$). ดังนั้น $\|B_a\| = 1$ และ $\|I - B_a\| = 1/2$. ตัวผกผันมีนอร์ม $1/(1/2) = 2$. ในสองมิติ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda_j \lambda_k$; ค่าต่ำสุดคือ $(1/2)^2 = 1/4$, $\|B_a^{(2)}\| = 1$, $\|I - B_a^{(2)}\| = 3/4$ และตัวผกผันมีนอร์ม 4.

ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-24

5. ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนคู่. ที่ $a = 1/4$ ค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_j = 1 - 1/2 + (1/2)\cos(2\pi j/n)$ เป็นศูนย์เมื่อ $\cos\theta = -1$, นั่นคือ $j = n/2$. เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะคือ $v_k^{(n/2)} = (-1)^k$ ซึ่งเป็นตารางหมากรุก. เพราะมีค่าลักษณะเฉพาะศูนย์ $B_{1/4}$ จึงไม่ผกผัน. ในสองมิติ โหมด $(n/2, n/2)$ ก็มีค่าลักษณะเฉพาะศูนย์เช่นกัน.

6. ถ้า A จริงสมมาตร แล้ว $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^{\mathsf{T}}y = x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}y = x^{\mathsf{T}}Ay = \langle x, Ay\rangle$. ดังนั้น $A^* = A$. ตัวดำเนินการเบลอ B_a มีเมทริกซ์สมมาตร (ค่าถ่วงน้ำหนักไปกลับเท่ากัน) จึงเป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว.

7. จาก (5.3) $\widehat{x} - x = B^{-1}n$. ที่ $a = 0.20$ ในสองมิติ $\|B^{-1}\| = 25$; สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลจึงถูกขยายเป็นค่าสูงสุด $0.01 \cdot 25 = 0.25$. ที่ $a = 0.15$ นอร์มคือ 6.25 และได้ 0.0625. ตัวเลขทั้งสองมีแบบทดสอบยืนยัน. นี่คือคำตอบว่าเหตุใดการทำให้คมชัดจึงทำให้เห็นสัญญาณรบกวน: ตัวผกผันมีนอร์มใหญ่กว่าหนึ่งมาก.

อ่านต่อ

§5.2 ใช้ปริภูมิคู่และอนุกรมนอยมันน์ตอบคำถามเรื่องการย้อนตัวดำเนินการ. แต่ยังเหลือคำถามพื้นฐาน: ฟังก์ชันนัลบนปริภูมิหนึ่งมีมากพอที่จะแยกจุดและวัดนอร์มได้หรือไม่. คำตอบคือมี ถ้าเรายอมใช้บทตั้งของซอร์น. หัวข้อถัดไปจึงเป็นทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค ซึ่งรับประกันว่าฟังก์ชันนัลที่นิยามบนปริภูมิย่อยสามารถขยายออกไปได้โดยไม่เพิ่มนอร์ม.

5.3 ฮาห์น–บานาค: การขยายฟังก์ชันนัล

ภาพรวมก่อนอ่าน

สมมติว่าเรารู้วิธีวัดเวกเตอร์บนปริภูมิย่อย U แล้ว. เราอยากวัดเวกเตอร์ทั้งหมดใน X ให้ได้ค่าเดิมบน U และไม่ให้ไม้บรรทัดใหม่แรงกว่าเดิม. ถ้า X มีมิติมากขึ้นเพียงหนึ่ง เราสามารถเลือก “ความชัน” ของส่วนที่เพิ่มเข้ามาได้ในช่วงหนึ่ง; ช่วงนี้ไม่ว่างเพราะฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ p ควบคุมทุกอย่างไว้. สำหรับมิติอนันต์ เราใช้บทตั้งของซอร์นเพื่อเลือกความชันทีละขั้นและรวมทุกขั้นเข้าด้วยกัน.

ผลลัพธ์นี้มีชื่อว่าทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค. มันเป็นทฤษฎีบท*การมีอยู่*: โดยทั่วไปไม่ได้บอกสูตรของฟังก์ชันนัลที่ขยายออกมา. แต่การมีอยู่ก็เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าปริภูมิคู่มีไม้บรรทัดมากพอ: แยกจุดได้, วัดนอร์มได้, และวัดระยะทางถึงปริภูมิย่อยปิดได้.

5.3.1 บทตั้งของซอร์นและฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์

ทฤษฎีบท 5.3.1: บทตั้งของซอร์น (ใช้โดยไม่พิสูจน์)

ให้ $(P, \leq)$ เป็นเซตอันดับบางส่วนที่ไม่ว่าง. ถ้าทุกโซ่ใน P มีขอบเขตบนใน P แล้ว P มีสมาชิกสูงสุด (maximal element) อย่างน้อยหนึ่งตัว. คำว่า “สูงสุด” ในที่นี้หมายถึงไม่มีสมาชิกอื่นที่ใหญ่กว่าอย่างเคร่งครัด; ไม่ได้หมายความว่ามันใหญ่กว่าทุกสมาชิก.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

เราจะใช้บทตั้งของซอร์นโดยไม่พิสูจน์. มันเป็นข้อความที่เทียบเท่ากับสัจพจน์ของการเลือก (axiom of choice) ในทฤษฎีเซตมาตรฐาน. ผู้อ่านที่ยอมรับสัจพจน์นี้ก็ใช้บทตั้งได้ทันที. การพิสูจน์ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาคในหัวข้อนี้จะระบุชัด ๆ ว่าขั้นใดใช้บทตั้ง.

ร่างเรียง preprint · 2026-10-24

นิยาม 5.3.1: ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริง. การส่ง $p : X \to \mathbb{R}$ เรียกว่า**ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์** (sublinear functional) ถ้า

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{สำหรับทุก } \lambda \geq 0,\ x \in X, \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in X.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์คือ “ขนาดคร่าว ๆ” ที่ยังไม่จำเป็นต้องสมมาตร: $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ สำหรับ λ ไม่ติดลบ และ $p(x+y)$ ไม่เกินผลบวกของขนาด. นอร์มและกึ่งนอร์มเป็นตัวอย่าง; ฟังก์ชัน $p(x) = \max\{x_1, x_2\}$ บน $\mathbb{R}^2$ ก็เป็นตัวอย่าง เพราะมันเป็นบวกเนื้อเดียวกันและรองรับการบวก. ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นทุกตัวเป็นซับลิเนียร์ เพราะ $p(x+y) = p(x) + p(y)$; แต่ซับลิเนียร์ไม่จำเป็นต้องเป็นเชิงเส้น เช่น $\max\{x_1, x_2\}$.

บทตั้ง 5.3.2: การขยายหนึ่งมิติ

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริง, $p : X \to \mathbb{R}$ ซับลิเนียร์, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ $f : U \to \mathbb{R}$ เชิงเส้นโดย $f(u) \leq p(u)$ ทุก $u \in U$. ถ้า $x_0 \in X \setminus U$ แล้วมีฟังก์ชันนัลเชิงเส้น $F : U + \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ ซึ่ง $F|_U = f$ และ $F \leq p$ บน $U + \mathbb{R}x_0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน $F(u + tx_0) = f(u) + tc$. ต้องเลือก c ให้อสมการถูกทั้งกรณี $t > 0$ และ $t < 0$. เงื่อนไขสองด้านให้ช่วงปิดสำหรับ c; ความเป็นซับลิเนียร์ของ p รับประกันว่าช่วงนี้ไม่ว่าง.

1. **เงื่อนไขบน c.** ถ้า $t > 0$ เขียน $u = tv$; ต้องมี

   $$f(v) + c \leq p(v + x_0) \quad \Longrightarrow \quad c \leq p(v + x_0) - f(v).$$

   ถ้า $t < 0$ เขียน $t = -s$ กับ $s > 0$ และ $u = sw$; ต้องมี

   $$f(w) - c \leq p(w - x_0) \quad \Longrightarrow \quad c \geq f(w) - p(w - x_0).$$

   ดังนั้น c ต้องอยู่ในช่วง

   $$\Big[\sup_{w \in U} \big(f(w) - p(w - x_0)\big),\ \inf_{v \in U} \big(p(v + x_0) - f(v)\big)\Big].$$

2. **ช่วงไม่ว่าง.** สำหรับ $v, w \in U$,

   $$f(w) - p(w - x_0) \leq p(v + x_0) - f(v)$$

   เพราะเมื่อย้ายข้างจะได้

   $$f(v + w) \leq p(v + w) \leq p(v + x_0) + p(w - x_0),$$

   โดยใช้ $f \leq p$ กับ $v + w$ และความเป็นซับลิเนียร์ของ p กับ $(v + x_0) + (w - x_0) = v + w$.

3. **เลือก c.** เลือก c ในช่วงนั้น และนิยาม $F(u + tx_0) = f(u) + tc$. การเขียนแบบนี้ไม่ขึ้นกับตัวแทนเพราะ $x_0 \notin U$; F เป็นเชิงเส้นและตรงกับ f บน U.

4. **ตรวจอสมการ.** ถ้า $t > 0$ ใช้ขอบเขตบนของ c; ถ้า $t < 0$ ใช้ขอบเขตล่าง; ถ้า $t = 0$ ใช้ $f \leq p$. ทั้งสามกรณีให้ $F(u + tx_0) \leq p(u + tx_0)$.

สรุป: การขยายทีละหนึ่งมิติทำได้เพราะช่วงของความชันไม่ว่าง; นี่คือขั้นเดียวที่บทตั้งของซอร์นจะนำมาวนซ้ำ. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

5.3.2 ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค

ทฤษฎีบท 5.3.3: ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค (ฉบับจริง)

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริง, $p : X \to \mathbb{R}$ ซับลิเนียร์, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ $f : U \to \mathbb{R}$ เชิงเส้นโดย $f(u) \le p(u)$ ทุก $u \in U$. แล้วมีฟังก์ชันนัลเชิงเส้น $F : X \to \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$F|_U = f \qquad \text{และ} \qquad F(x) \le p(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิจารณาครอบครัวของ “การขยายที่ยังไม่สุด” ทั้งหมด แล้วใช้บทตั้งของซอร์นเลือกตัวที่ใหญ่ที่สุด. ถ้ามันยังไม่ครอบ X เราจะขยายได้อีกหนึ่งมิติ ซึ่งขัดกับความใหญ่ที่สุด.

1. **เซตอันดับ.** ให้ $\mathcal{P}$ เป็นเซตของคู่ (V, g) โดยที่ $U \subset V \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย, $g : V \to \mathbb{R}$ เชิงเส้น, $g|_U = f$ และ $g \le p$ บน V. เรียงลำดับโดย $(V_1, g_1) \le (V_2, g_2)$ เมื่อ $V_1 \subset V_2$ และ $g_2|_{V_1} = g_1$.

2. **มีสมาชิกเริ่มต้น.** $(U, f) \in \mathcal{P}$ เพราะ $f \le p$ บน U.

3. **โซ่มีตัวคุมด้านบน.** ถ้าโซ่ $\mathcal{C}$ ว่าง ให้ใช้ $(U, f) \in \mathcal{P}$ เป็นตัวคุม. สมมติ $\mathcal{C} \neq \varnothing$ และให้ $V_* := \bigcup_{(V,g)\in\mathcal{C}} V$. สำหรับ $x, y \in V_*$ มี $(V_1, g_1), (V_2, g_2) \in \mathcal{C}$ ซึ่ง $x \in V_1$ และ $y \in V_2$. เพราะโซ่เทียบกันได้ สมมติ $V_1 \subset V_2$; แล้ว $x, y \in V_2$ จึง $\alpha x + \beta y \in V_2 \subset V_*$. นิยาม $g_* : V_* \to \mathbb{R}$ โดย $g_*(x) = g(x)$ ถ้า $x \in V$ สำหรับบาง $(V, g) \in \mathcal{C}$. ถ้า x อยู่ใน V_1, V_2 สองตัว ตัวที่ใหญ่กว่าควบคุมอีกตัว และการเป็นส่วนขยายที่เข้ากันได้ทำให้ค่าเท่ากัน; คำนิยามจึงไม่กำกวม. ด้วยเหตุผลเดียวกัน g_* เคารพการบวกและการคูณสเกลาร์. อสมการ $g_* \le p$ สืบทอดมาจากแต่ละสมาชิก. จึงได้ (V_*, g_*) เป็นตัวคุมด้านบน.

4. **สมาชิกใหญ่สุด.** บทตั้งของซอร์นให้สมาชิก $(V_\infty, g_\infty) \in \mathcal{P}$ ที่ไม่มีสมาชิกอื่นใน $\mathcal{P}$ ใหญ่กว่าอย่างเคร่งครัด.

5. **ต้องมี $V_\infty = X$.** ถ้ามี $x_0 \in X \setminus V_\infty$ ใช้บทแทรก 5.3.2 ขยาย g_∞ ไปยัง $V_\infty + \mathbb{R}x_0$. ได้สมาชิกที่ใหญ่กว่าใน $\mathcal{P}$, ขัดกับความใหญ่สุด. ดังนั้น $V_\infty = X$ และ $F := g_\infty$ คือคำตอบ.

สรุป: บทตั้งของซอร์นเปลี่ยน “ขยายได้ทีละหนึ่งมิติ” ให้เป็น “ขยายได้ทั้งปริภูมิ”. □

บทตั้ง 5.3.4: การแปลงฟังก์ชันนัลจริงเป็นฟังก์ชันนัลเชิงซ้อน

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน และ $L : X \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นจริง. นิยาม

$$\widetilde{L}(x) := L(x) - iL(ix).$$

แล้ว $\widetilde{L} : X \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นเชิงซ้อน และ $\operatorname{Re}\widetilde{L} = L$. ในทางกลับกัน ถ้า $h : X \to \mathbb{C}$ เป็นเชิงเส้นเชิงซ้อนและ $L = \operatorname{Re} h$ แล้ว $\widetilde{L} = h$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ส่วนจินตภาพของฟังก์ชันนัลเชิงซ้อนถูกกำหนดโดยส่วนจริงที่จุด ix: เพราะ $h(ix) = ih(x)$.

1. **เชิงเส้นจริงและส่วนจริง.** $\widetilde{L}$ เป็นการบวกกันของฟังก์ชันจริงเชิงเส้นสองตัว จึงเป็นจริงเชิงเส้น. และ $\operatorname{Re}\widetilde{L}(x) = L(x)$.

2. **คูณด้วย i.** คำนวณ

$$\widetilde{L}(ix) = L(ix) - iL(i^2x) = L(ix) + iL(x) = i\big(L(x) - iL(ix)\big) = i\widetilde{L}(x).$$

ดังนั้น $\widetilde{L}$ เคารพการคูณด้วย i และด้วยจำนวนจริง; จึงเป็นเชิงเส้นเชิงซ้อน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. **กลับกัน.** ถ้า h เป็นเชิงเส้นเชิงซ้อนและ $L = \operatorname{Re} h$ แล้ว $h(ix) = ih(x)$ ให้ $\operatorname{Re} h(ix) = -\operatorname{Im} h(x)$. ดังนั้น $\operatorname{Im} h(x) = -\operatorname{Re} h(ix) = -L(ix)$, จึง $h(x) = L(x) - iL(ix) = \widetilde{L}(x)$.

สรุป: ฟังก์ชันนัลเชิงซ้อนหนึ่งตัวเทียบเท่ากับฟังก์ชันนัลจริงหนึ่งตัวบนปริภูมิที่มองเป็นปริภูมิจริง และส่วนจริงกำหนดทุกอย่าง. □

ทฤษฎีบท 5.3.5: ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค (ฉบับเชิงซ้อน)

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงซ้อน, $p : X \to \mathbb{R}$ ซับลิเนียร์, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ $f : U \to \mathbb{C}$ เชิงเส้นเชิงซ้อนโดย $\operatorname{Re} f(u) \le p(u)$ ทุก $u \in U$. แล้วมีฟังก์ชันนัลเชิงเส้นเชิงซ้อน $F : X \to \mathbb{C}$ ซึ่ง $F|_U = f$ และ $\operatorname{Re} F(x) \le p(x)$ ทุก $x \in X$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** มอง X เป็นปริภูมิจริง ใช้ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาคกับส่วนจริงของ f แล้วประกอบกลับเป็นฟังก์ชันนัลเชิงซ้อนด้วยบทแทรกข้างต้น.

1. **เปลี่ยนไปใช้จำนวนจริง.** ให้ $L = \operatorname{Re} f : U \to \mathbb{R}$. L เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นจริง และ $L \le p$ บน U.
2. **ขยายฟังก์ชันจริง.** ตามทฤษฎีบท 5.3.3 มีฟังก์ชันนัลจริง $\widetilde{L} : X \to \mathbb{R}$ ซึ่ง $\widetilde{L}|_U = L$ และ $\widetilde{L} \le p$ บน X.
3. **ประกอบกลับ.** นิยาม $F(x) = \widetilde{L}(x) - i\widetilde{L}(ix)$. ตามบทแทรก 5.3.4 F เป็นเชิงเส้นเชิงซ้อน, $\operatorname{Re} F = \widetilde{L}$ และ $F|_U = f$ เพราะ $\widetilde{L}|_U = \operatorname{Re} f$ กำหนด f ทั้งตัว.
4. **อสมการ.** $\operatorname{Re} F(x) = \widetilde{L}(x) \le p(x)$ ทุก $x \in X$.

สรุป: ฉบับเชิงซ้อนไม่ต้องพิสูจน์ใหม่ทั้งหมด: ใช้ฉบับจริงกับส่วนจริงแล้วเติมส่วนจินตภาพกลับเข้าไป. □

ทฤษฎีบท 5.3.6: การขยายฟังก์ชันนัลโดยไม่เพิ่มนอร์ม

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ $u' \in U'$. แล้วมี $x' \in X'$ ซึ่ง

$$x'|_U = u' \qquad \text{และ} \qquad \|x'\|_{X'} = \|u'\|_{U'}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ $p(x) = \|u'\|\|x\|$ เป็นตัวควบคุม. บน U ฟังก์ชันนัล u' ถูก p ควบคุม; ขยายด้วยฮาห์น–บานาค แล้วพิสูจน์ว่าค่าที่ได้มีโมดูลัสไม่เกิน p โดยหมุนเวกเตอร์ให้ค่ากลายเป็นจริง.

1. **กรณีจริง.** ให้ $p(x) = \|u'\|\|x\|$. สำหรับ $u \in U$, $u'(u) \le |u'(u)| \le p(u)$. ใช้ทฤษฎีบท 5.3.3 ได้ x' จริงเชิงเส้นซึ่ง $x'|_U = u'$ และ $x' \le p$. ใช้ $-x$ แทน x ได้ $-x'(x) = x'(-x) \le p(-x) = p(x)$; ดังนั้น $|x'(x)| \le p(x)$ ทุก x. จึง $\|x'\| \le \|u'\|$. อสมการกลับกันมาจากการเป็นส่วนขยาย.
2. **เมื่อสนามเป็นจำนวนเชิงซ้อน.** ใช้ $p(x) = \|u'\|\|x\|$ และ $\operatorname{Re} u'(u) \le p(u)$ บน U. ใช้ทฤษฎีบท 5.3.5 ได้ x' เชิงซ้อนซึ่ง $\operatorname{Re} x'(x) \le p(x)$ ทุก x. ให้ $x \in X$ และเลือก θ ซึ่ง $e^{-i\theta}x'(x) = |x'(x)|$. แล้ว

$$|x'(x)| = \operatorname{Re}\big(e^{-i\theta}x'(x)\big) = \operatorname{Re} x'(e^{-i\theta}x) \le p(e^{-i\theta}x) = \|u'\|\|x\|.$$

   จึง $\|x'\| \le \|u'\|$; และ $\|x'\| \ge \|u'\|$ เพราะ x' ตรงกับ u' บน U.

สรุป: ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบนปริภูมิย่อยขยายได้เสมอโดยรักษานอร์ม; นี่คือรูปแบบที่เราใช้บ่อยที่สุด. □

สัมมนา · Preprint · 2026-10-21

บทแทรก 5.3.7: การแยกจุดและสูตรนอร์มผ่านปริภูมิคู่

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม.

(a) สำหรับ $x \in X$ ซึ่ง $x \neq 0$ มี $x' \in X'$ ซึ่ง $\|x'\| = 1$ และ $x'(x) = \|x\|$.

(b) ถ้า $x'(x) = 0$ สำหรับทุก $x' \in X'$ แล้ว $x = 0$. โดยเฉพาะ X' แยกจุดของ X.

(c) สำหรับทุก $x \in X$,

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)|.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** สร้างฟังก์ชันนัลบนเส้นตรงหนึ่งมิติที่ทอดด้วย x แล้วขยายโดยไม่เพิ่มนอร์ม. ส่วน (c) ได้จาก (a) ด้านหนึ่งและนิยามนอร์มคู่อีกด้าน.

1. **(a)** ให้ $U = \mathbb{K}x$ และนิยาม $u'(tx) = t\|x\|$. แล้ว $|u'(tx)| = |t|\|x\| = \|tx\|$, ดังนั้น $\|u'\| = 1$. ใช้ทฤษฎีบท 5.3.6 ขยายเป็น $x' \in X'$ ด้วย $\|x'\| = 1$.

2. **(b)** ถ้า $x \neq 0$ ข้อ (a) ให้ x' ซึ่ง $x'(x) = \|x\| \neq 0$. ดังนั้นถ้าทุก x' ให้ค่า 0 ที่ x ต้องมี $x = 0$. การแยกจุดตามมาจากการใช้ (b) กับ $x_1 - x_2$.

3. **(c)** สำหรับ $\|x'\| \leq 1$, $|x'(x)| \leq \|x'\|\,\|x\| \leq \|x\|$; อสมการนี้แสดงว่าค่าสูงสุดทางซ้ายไม่เกิน $\|x\|$. ถ้า $x \neq 0$ ข้อ (a) ให้ฟังก์ชันนัลที่มีค่า $\|x\|$; เมื่อ $x = 0$ ค่าทั้งสองฝั่งเท่ากันและเป็นศูนย์.

สรุป: ปริภูมิคู่มีไม้บรรทัดมากพอที่จะวัดนอร์มของทุกเวกเตอร์ และแยกเวกเตอร์ที่ต่างกันได้. □

ทฤษฎีบท 5.3.8: ระยะทางถึงปริภูมิย่อยปิด

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยปิด และ $x_0 \in X \setminus U$. ให้

$$d := \operatorname{dist}(x_0, U) = \inf_{u \in U} \|x_0 - u\| > 0.$$

แล้วมี $x' \in X'$ ซึ่ง

$$x'|_U = 0, \qquad \|x'\| = 1, \qquad x'(x_0) = d.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** นิยามฟังก์ชันนัลบนผลบวกตรง $U + \mathbb{K}x_0$ โดยให้มันอ่านเฉพาะสัมประสิทธิ์ของ x_0. ระยะทาง d คืออัตราส่วนที่แย่ที่สุดพอดี.

1. **นิยาม.** ทุกเวกเตอร์ใน $U + \mathbb{K}x_0$ เขียนได้แบบเดียวเป็น $u + tx_0$ กับ $u \in U$, $t \in \mathbb{K}$ เพราะ $x_0 \notin U$. นิยาม $f(u + tx_0) = td$.

2. **ขอบเขต.** ถ้า $t = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. ถ้า $t \neq 0$,

$$\|u + tx_0\| = |t|\,\|x_0 + u/t\| \geq |t|\,d = |f(u + tx_0)|,$$

เพราะ $u/t \in U$ และ d เป็นระยะทางที่เล็กที่สุดจาก x_0 ถึง U. ดังนั้น $\|f\| \leq 1$.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

3. **นอร์มเป็นหนึ่ง.** เลือก $u_n \in U$ ซึ่ง $\|x_0 - u_n\| \to d$. แล้ว

$$|f(u_n - x_0)| = |-d| = d, \qquad \|u_n - x_0\| \to d,$$

ดังนั้นอัตราส่วน $|f(y)|/\|y\|$ เข้าใกล้ 1; จึง $\|f\| = 1$.

4. **ขยาย.** ใช้ทฤษฎีบท 5.3.6 ขยาย f เป็น $x' \in X'$ โดยไม่เพิ่มนอร์ม. แล้ว $x'|_U = 0$, $\|x'\| = 1$ และ $x'(x_0) = d$.

สรุป: ระยะทางจากจุดถึงปริภูมิย่อยปิดเป็นค่าที่ฟังก์ชันนัลนอร์มหนึ่งซึ่งหายบนปริภูมิย่อยนั้นวัดได้พอดี. □

ทฤษฎีบท 5.3.9: นอร์มของตัวดำเนินการผูกพันเท่ากับนอร์มของตัวดำเนินการ

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. แล้ว

$$\|T'\|_{Y' \to X'} = \|T\|_{X \to Y}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** อสมการ $\leq$ ได้จาก §5.2 โดยไม่ใช้ฮาห์น–บานาค. สำหรับ $\geq$ ใช้บทแทรกการแยกจุดเพื่อหาไม้บรรทัดนอร์มหนึ่งบน Y ที่วัด Tx ได้เต็มขนาด.

1. $\leq$. จากทฤษฎีบท 5.2.2(b), $\|T'\| \leq \|T\|$.

2. $\geq$. ถ้า $T = 0$ ทั้งสองข้างเป็นศูนย์. มิฉะนั้นให้ $x \neq 0$ ซึ่ง $Tx \neq 0$; สำหรับ x ที่ $Tx = 0$ อัตราส่วนทางขวาเป็นศูนย์จึงไม่ต้องตรวจ. ตามบทแทรก 5.3.7(a) มี $y' \in Y'$ ซึ่ง $\|y'\| = 1$ และ $y'(Tx) = \|Tx\|_Y$. แล้ว

$$\|T'y'\|_{X'} \geq \frac{|(T'y')(x)|}{\|x\|_X} = \frac{|y'(Tx)|}{\|x\|_X} = \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

เพราะ $\|T'y'\| \leq \|T'\|\|y'\| = \|T'\|$, จึง $\|T'\| \geq \|Tx\|/\|x\|$ ทุก $x \neq 0$. หาซูพรีมัมได้ $\|T'\| \geq \|T\|$.

สรุป: การผูกพันไม่เปลี่ยนนอร์ม; มันย้ายตัวดำเนินการไปยังปริภูมิคู่โดยรักษาขนาด. □

นิยาม 5.3.2: แอนนิฮิเลเตอร์

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $U \subset X$ และ $V \subset X'$. นิยาม

$$U^{\perp} := \{x' \in X' : x'(u) = 0 \ \forall u \in U\}, \qquad V_{\perp} := \{x \in X : x'(x) = 0 \ \forall x' \in V\}.$$

เราเรียกทั้งสองเซตว่า**แอนนิฮิเลเตอร์** (annihilator): $U^{\perp}$ เก็บฟังก์ชันนัลที่อ่านทุกสมาชิกของ U เป็นศูนย์ ส่วน $V_{\perp}$ เก็บเวกเตอร์ที่ทุกสมาชิกของ V อ่านได้เป็นศูนย์.

สำหรับ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ เราเขียน $\operatorname{ran} T := \{Tx : x \in X\}$ และ $\ker T := \{x \in X : Tx = 0\}$. เซตแรกเรียกว่า**พิสัย** (range) คือค่าทั้งหมดที่ T ให้ได้; เซตที่สองเรียกว่า**เคอร์เนล** (kernel) คือเวกเตอร์ที่ T ส่งไปยังศูนย์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 5.3.10: ส่วนปิดคลุมของพิสัยและเคอร์เนลของตัวดำเนินการผูกพัน

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. แล้ว

$$\overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T')_\perp.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทิศ $\subset$ ตรวจตรง ๆ. ทิศ $\supset$ ใช้บทแทรกระยะทาง: จุดที่อยู่นอกส่วนปิดคลุมของพิสัยถูกแยกด้วยฟังก์ชันนัลที่หายบนพิสัย จึงอยู่ในเคอร์เนลของ T'.

1. $\subset$. ให้ $y = Tx \in \operatorname{ran} T$ และ $y' \in \ker T'$. แล้ว $y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$. ดังนั้น $\operatorname{ran} T \subset (\ker T')_\perp$. เพราะ $(\ker T')_\perp$ ปิด (เป็นจุดตัดของเซตปิด $\{y : y'(y) = 0\}$), ส่วนปิดคลุมของ $\operatorname{ran} T$ ก็อยู่ในนั้นด้วย.

2. $\supset$. ให้ $y \notin \overline{\operatorname{ran} T}$. ใช้บทแทรก 5.3.8 กับปริภูมิย่อยปิด $U = \overline{\operatorname{ran} T}$ ได้ $y' \in Y'$ ซึ่ง $y'|_U = 0$ และ $y'(y) \neq 0$. สำหรับทุก $x \in X$, $Tx \in U$ จึง $(T'y')(x) = y'(Tx) = 0$; ดังนั้น $y' \in \ker T'$. แต่ $y'(y) \neq 0$, ดังนั้น $y \notin (\ker T')_\perp$. จึง $(\ker T')_\perp \subset \overline{\operatorname{ran} T}$.

สรุป: การแก้สมการ $Tx = y$ ถูกควบคุมโดยเงื่อนไข $T'y' = 0 \Rightarrow y'(y) = 0$ เมื่อพิสัยปิด. □

บทแทรก 5.3.11: เกณฑ์การแก้สมการเชิงตัวดำเนินการ

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ มีพิสัยปิด. สมการ $Tx = y$ มีคำตอบก็ต่อเมื่อ

$$T'y' = 0 \implies y'(y) = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } y' \in Y'.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เพราะพิสัยปิด เงื่อนไข “อยู่ในส่วนปิดคลุมของพิสัย” คือ “อยู่ในพิสัย” ตรง ๆ; ใช้บทแทรกก่อนหน้าแปลเงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขบนเคอร์เนลของ T'.

1. **จำเป็น.** ถ้า $Tx = y$ และ $T'y' = 0$ แล้ว $y'(y) = y'(Tx) = (T'y')(x) = 0$.

2. **เพียงพอ.** ให้เงื่อนไขเป็นจริง. ถ้า $y \notin \operatorname{ran} T$ แล้วเพราะพิสัยปิด $y \notin \overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T')_\perp$. ดังนั้นมี $y' \in \ker T'$ ซึ่ง $y'(y) \neq 0$, ขัดกับเงื่อนไข. จึง $y \in \operatorname{ran} T$ และมีคำตอบ.

สรุป: การมีคำตอบของ $Tx = y$ เทียบเท่ากับการที่ y ถูกทำให้เป็นศูนย์โดยทุกฟังก์ชันนัลที่ฆ่า T. □

5.3.3 ผลที่ตามมา: การแยกจุด ระยะทาง และคู่เชิงของ ℓ^1

ผลของฮาห์น--บานาคไม่ได้จบที่การขยายฟังก์ชันนัล. ในหัวข้อนี้เราเก็บผลที่ใช้บ่อยสามแบบ: การแยกจุดออกจากเซตปิด, สูตรระยะทางถึงปริภูมิย่อยปิด และคำอธิบายคู่เชิงของ ℓ^1. ทั้งสามแบบมาจากหลักเดียวกัน คือการหาฟังก์ชันนัลที่วัดจุดหนึ่ง แต่หายบนส่วนที่เราต้องการแยก.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทแทรก 5.3.12: เกณฑ์ความหนาแน่นผ่านปริภูมิคู่

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $U \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) U หนาแน่นใน X.

(ii) ถ้า $x' \in X'$ และ $x'|_U = 0$ แล้ว $x' = 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทิศหนึ่งใช้ความต่อเนื่อง; อีกทิศหนึ่งใช้บทแทรกระยะทางกับจุดที่อยู่นอกส่วนปิดคลุม.

1. **(i)⇒(ii).** ให้ $x'|_U = 0$ และ $x \in X$. เลือก $u_n \in U$ ซึ่ง $u_n \to x$. แล้ว $x'(x) = \lim_n x'(u_n) = 0$. ดังนั้น $x' = 0$.

2. **ไม่ (i) ⇒ ไม่ (ii).** ถ้า U ไม่หนาแน่น แล้ว $\overline{U} \neq X$ (ส่วนปิดของปริภูมิย่อยเป็นปริภูมิย่อยปิด). เลือก $x_0 \notin \overline{U}$. ใช้บทแทรก 5.3.8 กับปริภูมิย่อยปิด $\overline{U}$ ได้ $x' \neq 0$ ซึ่ง $x'|_{\overline{U}} = 0$. โดยเฉพาะ $x'|_U = 0$ แต่ $x' \neq 0$.

สรุป: ปริภูมิย่อยหนาแน่นคือปริภูมิย่อยที่ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องซึ่งหายบนปริภูมิย่อยนั้นต้องเป็นศูนย์. □

ทฤษฎีบท 5.3.13: ℓ^1 ฝังตัวในคู่เชิงของ ℓ^∞ แต่ไม่ทั่วถึง

นิยาม $T : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ โดย

$$(Ts)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n, \qquad s = (s_n) \in \ell^1,\ x = (x_n) \in \ell^\infty.$$

แล้ว T เป็น**การฝังตัว** (embedding) แบบสมมิติ (การส่งหนึ่งต่อหนึ่งที่รักษาระยะ) แต่ไม่ทั่วถึง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** อสมการสามเหลี่ยม (กรณี ℓ^1–ℓ^∞ ของอสมการเฮิลเดอร์) ให้ $\|Ts\| \le \|s\|_1$; เลือกเครื่องหมายของ x_n ให้ทุกพจน์บวกเพื่อให้ได้ความเท่ากัน. ความไม่ทั่วถึงมาจากฟังก์ชันนัลลิมิตบน c ซึ่งขยายไป ℓ^∞ แต่ไม่มีลำดับใน ℓ^1 แทนมันได้.

1. **ขอบเขต.** สำหรับ $x \in \ell^\infty$,
$$|(Ts)(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|\,|x_n| \le \|s\|_1 \|x\|_\infty.$$
ดังนั้น $\|Ts\| \le \|s\|_1$.

2. **ความเท่ากัน.** ถ้า $s \neq 0$ เลือก $x_n = \overline{s_n}/|s_n|$ เมื่อ $s_n \neq 0$ และ $x_n = 1$ เมื่อ $s_n = 0$. แล้ว $x \in \ell^\infty$, $\|x\|_\infty = 1$ และ $(Ts)(x) = \sum |s_n| = \|s\|_1$. ดังนั้น $\|Ts\| = \|s\|_1$.

3. **ลิมิตบน c.** ให้ $L_0 : c \to \mathbb{K}$ นิยามโดย $L_0(x) = \lim_n x_n$. แล้ว L_0 เป็นเชิงเส้นและ $|L_0(x)| \le \|x\|_\infty$; นอกจากนี้ $L_0(1) = 1$ ดังนั้น $\|L_0\| = 1$.

4. **ขยายไป ℓ^∞.** ใช้ทฤษฎีบท 5.3.6 ขยาย L_0 เป็น $L \in (\ell^\infty)'$ ด้วย $\|L\| = 1$.

5. **ไม่ทั่วถึง.** สมมติมี $s \in \ell^1$ ซึ่ง $Ts = L$. สำหรับเวกเตอร์ฐาน $e_n \in c$,
$$s_n = (Ts)(e_n) = L(e_n) = L_0(e_n) = 0$$
ทุก n; ดังนั้น $s = 0$ และ $L = 0$. แต่ $L(1) = L_0(1) = 1$, ขัดแย้ง. จึงไม่มี s เช่นนั้น.

สรุป: ℓ^1 เห็นด้วยกับส่วนหนึ่งของ $(\ell^\infty)'$ แต่ไม่ใช่ทั้งหมด; ปริภูมิคู่ของ ℓ^∞ ใหญ่กว่าอย่างเคร่งครัด. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

ทฤษฎีบท 5.3.14: คู่เชิงของ ℓ^p สำหรับ $1 \le p < \infty$

ให้ $1 \le p < \infty$ และ q เป็นเลขชี้กำลังสังยุค: $1/p + 1/q = 1$ (เมื่อ $p = 1$ ให้ $q = \infty$). นิยาม

$$T : \ell^q \to (\ell^p)', \qquad (Ts)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n.$$

แล้ว T เป็นสมสัณฐานแบบสมมิติ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** อสมการเฮิลเดอร์ให้ $\|Ts\| \le \|s\|_q$. สำหรับการทั่วถึง ให้ $s_n = y'(e_n)$ และทดสอบ y' กับเวกเตอร์ที่มีขนาด $|s_n|^{q-1}$ เมื่อ $p > 1$; กรณี $p = 1$ ใช้เวกเตอร์พิกัดเดียว. จะได้ว่า $s \in \ell^q$. แล้ว y' กับ Ts ตรงกันบนเซตหนาแน่นของลำดับที่มีตัวไม่เป็นศูนย์จำกัด.

1. **ขอบเขต.** ตามอสมการเฮิลเดอร์ (บท“ปริภูมิของฟังก์ชัน”),

   $$|(Ts)(x)| \le \|s\|_q \|x\|_p,$$

   จึง $\|Ts\| \le \|s\|_q$.

2. **สร้าง s จาก y'.** ให้ $y' \in (\ell^p)'$ และ $s_n := y'(e_n)$. ให้ $F \subset \mathbb{N}$ เป็นเซตจำกัด. ถ้า $1 < p < \infty$ เลือก $x_n = |s_n|^{q-1}\overline{\operatorname{sgn} s_n}$ สำหรับ $n \in F$ และ $x_n = 0$ นอก F. แล้ว

   $$\sum_{n \in F} |s_n|^q = y'(x) \le \|y'\| \|x\|_p = \|y'\| \Big(\sum_{n \in F} |s_n|^q \Big)^{1/p}.$$

   ดังนั้น $(\sum_{n \in F} |s_n|^q)^{1/q} \le \|y'\|$ ทุกเซตจำกัด F; จึง $s \in \ell^q$ และ $\|s\|_q \le \|y'\|$. กรณี $p = 1$: สำหรับ m ใด ๆ ใช้ $x = \overline{\operatorname{sgn} s_m}\, e_m$ ซึ่ง $\|x\|_1 = 1$ ได้ $|s_m| = y'(x) \le \|y'\|$; จึง $\sup_m |s_m| \le \|y'\|$.

3. **ตรงกันบนเซตหนาแน่น.** สำหรับ x ที่มีตัวไม่เป็นศูนย์จำกัด, $x = \sum_{n \in F} x_n e_n$ จึง $y'(x) = \sum_{n \in F} s_n x_n = (Ts)(x)$. เซตของลำดับเช่นนี้หนาแน่นใน ℓ^p (เพราะ $p < \infty$); ทั้ง y' และ Ts ต่อเนื่อง จึงตรงกันทุก x.

4. **คงระยะ.** จากขั้นที่แล้ว T ทั่วถึง และ $\|s\|_q \le \|Ts\|$; รวมกับ $\|Ts\| \le \|s\|_q$ ได้ $\|Ts\| = \|s\|_q$.

สรุป: สำหรับ $1 \le p < \infty$ คู่เชิงของ ℓ^p คือ ℓ^q; การจับคู่คือผลบวกของผลคูณ และนอร์มตรงกัน. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไม ℓ^∞ ต่างจาก ℓ^p

สำหรับ $1 \le p < \infty$ ปริภูมิคู่ของ ℓ^p คือ ℓ^q กับ $1/p + 1/q = 1$ (Werner 2007, p. 59; PDF p. 69). แต่ ℓ^∞ ไม่มีสมบัติแบบเดียวกัน: ℓ^1 ฝังตัวอยู่ใน $(\ell^\infty)'$ แต่ไม่ทั่วถึง ดังบทแทรกข้างต้น. ความแตกต่างนี้มาจาก ℓ^∞ ไม่ separable; ปริภูมิคู่จึงใหญ่กว่าลำดับน้ำหนักที่รวมได้แบบผลบวก.

สรุปใจความ

- บทตั้งของซอร์นให้สมาชิกสูงสุดในเซตอันดับที่ทุกโซ่มีขอบเขตบน; เราใช้มันโดยไม่พิสูจน์.
- ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ p ใช้ควบคุมการขยาย; ขั้นหนึ่งมิติเลือกความชันในช่วงที่ p รับประกันว่าไม่ว่าง.
- ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาคขยายฟังก์ชันนัลเชิงเส้นจากปริภูมิย่อยไปทั้งปริภูมิโดยไม่ให้เกิน p.

ร่างปรับปรุง Preprint · 2026-10-24

- ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบนปริภูมิย่อยขยายได้โดยรักษานอร์ม; จึงวัดนอร์มได้ด้วยปริภูมิคู่และแยกระยะทางถึงปริภูมิย่อยปิดได้.
- ℓ^1 ฝังตัวแบบสมมิติใน $(\ell^\infty)'$ แต่ไม่ทั่วถึง เพราะมีฟังก์ชันนัลลิมิตที่ไม่มีลำดับน้ำหนักใน ℓ^1 แทน.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $f(x_1, 0) = 3x_1$ บนแกน x_1 ใน $\mathbb{R}^2$ พร้อมนอร์มแบบยุคลิด. จงหาส่วนขยายสองแบบที่ต่างกันและเปรียบเทียบนอร์มของมัน.

2. ให้ $p(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ บน $\mathbb{R}^2$. จงแสดงว่า p เป็นฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ และคำนวณ $p(3, 4)$, $p(1, 2)$ และ $p(1/2, 1)$.

3. จงพิสูจน์บทแทรกการแยกจุด: ถ้า $x \neq 0$ มี x' นอร์มหนึ่งซึ่ง $x'(x) = \|x\|$.

4. ให้ $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ และ $x_0 = (1, 2)$. จงใช้บทแทรกระยะทางหาฟังก์ชันนัล x' ซึ่งหายบน U, มีนอร์มหนึ่ง และ $x'(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, U)$. คำนวณระยะทางนั้น.

5. จงพิสูจน์ว่า ℓ^1 ไม่ทั่วถึง $(\ell^\infty)'$ โดยใช้ฟังก์ชันนัลลิมิตบน c.

6. ให้ $U = \operatorname{span}\{(1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ และ $f(t, t) = 3t$. จงหาส่วนขยายของ f ไปทั้ง $\mathbb{R}^2$ ที่รักษานอร์ม และบอกนอร์มนั้น.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ตัวอย่างแรก $f_1(x) = 3x_1$ มีนอร์ม 3; ตัวอย่างที่สอง $f_2(x) = 3x_1 + 4x_2$ ก็ตรงกับ f บนแกน x_1 แต่มีนอร์ม 5. ทั้งสองเป็นส่วนขยายที่ถูกต้อง; ฮาห์น–บานาครับประกันว่ามีอย่างน้อยหนึ่งตัวที่รักษานอร์ม คือ f_1. ตัวเลข 3 และ 5 มีแบบทดสอบยืนยัน.

2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ สำหรับ λ จริง (แม้ $\lambda < 0$ ก็ได้เพราะมีค่าสัมบูรณ์) และ

$$p(x + y) = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\} = p(x) + p(y).$$

   ค่าที่ต้องการ: $p(3, 4) = 4$, $p(1, 2) = 2$ และ $p(1/2, 1) = 1$. ตัวเลขทั้งสามมีแบบทดสอบยืนยัน.

3. ให้ $U = \mathbb{K}x$ และ $u'(tx) = t\|x\|$. แล้ว $\|u'\| = 1$. ใช้ทฤษฎีบท 5.3.6 ขยายเป็น $x' \in X'$ โดยไม่เพิ่มนอร์ม; ได้ $\|x'\| = 1$ และ $x'(x) = \|x\|$.

4. ระยะทางคือ $\operatorname{dist}((1, 2), U) = |1| = 1$. ฟังก์ชันนัล $x'(x) = x_1$ หายบน U (เพราะจุดใน U มีพิกัดแรกศูนย์), มีนอร์ม 1 และ $x'(x_0) = 1$. ตรงตามบทแทรก.

5. ให้ $L_0(x) = \lim_n x_n$ บน c. L_0 มีนอร์ม 1 และ $L_0(e_n) = 0$ ทุก n แต่ $L_0(1) = 1$. ขยายด้วยฮาห์น–บานาคเป็น $L \in (\ell^\infty)'$. ถ้า $L = Ts$ สำหรับ $s \in \ell^1$ แล้ว $s_n = L(e_n) = 0$ ทุก n; จึง $L = 0$ ขัดกับ $L(1) = 1$. ดังนั้น T ไม่ทั่วถึง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. นอร์มของ f บน U คือ $3/\sqrt{2} \approx 2.1213$ เพราะ $\|(t,t)\|_2 = \sqrt{2}|t|$. ส่วนขยายที่รักษานอร์มคือ

$$x'(x_1, x_2) = \frac{3}{2}(x_1 + x_2).$$

บน U: $x'(t,t) = 3t$. นอร์มของมันคือ $\|(3/2, 3/2)\|_2 = 3/\sqrt{2} \approx 2.1213$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

อ่านต่อ

หัวข้อถัดไปจะตอบคำถามว่าฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน $C(K)$ ทุกตัวมาจากการวัดอะไร และการแยกเซตนูนให้ไม้บรรทัดแบบใด.

5.4 การแยกเซตนูนและคู่เชิงของ $C(K)$

ภาพรวมก่อนอ่าน

สมมติว่าเรามีเซตของภาพที่ยอมรับได้ (เช่น ภาพที่ทุกพิกเซลอยู่ในช่วง $[0,1]$) และภาพหนึ่งที่อยู่นอกเซตนั้น. เราอยากมี “ไม้บรรทัด” หนึ่งอันที่บอกได้ว่าภาพนั้นอยู่นอกจริง ๆ ไม่ใช่แค่ต่างเล็กน้อย. ถ้าเซตนั้นนูนและปิด ทฤษฎีบทการแยกของฮาห์น–บานาครับประกันว่าเราหาไม้บรรทัดเช่นนั้นได้. เรขาคณิตของเรื่องนี้คือการวาง**ระนาบเกิน** (hyperplane) ซึ่งคือเซตระดับของฟังก์ชันนัลเชิงเส้นหนึ่งตัว คั่นระหว่างจุดกับเซต. ใน $\mathbb{R}^2$ เราเห็นมันเป็นเพียงเส้นตรง และเรียกด้านหนึ่งของมันว่าครึ่งระนาบ.

ส่วนที่สองของหัวข้อนี้ตอบคำถามว่า “ไม้บรรทัดทั้งหมดบน $C(K)$ หน้าตาเป็นอย่างไร”. คำตอบคือทุกตัวมาจากการวัด (measure) บน K ผ่านการปริพันธ์. สำหรับ K ที่มีจำกัด คำตอบนี้เห็นได้ชัด: ฟังก์ชันนัลคือผลรวมถ่วงน้ำหนักของค่าที่แต่ละจุด. สำหรับ K ทั่วไป ต้องใช้ทฤษฎีการวัดและทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์.

5.4.1 จากเกจของเซตนูนสู่การแยก

นิยาม 5.4.1: ฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี

ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์จริง และ $A \subset X$ เป็นเซตซึ่ง $0 \in A$. **ฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี** (Minkowski functional) ของ A นิยามโดย

$$p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in A\}.$$

เราเรียก A ว่า**เซตดูดกลืน** (absorbing set) ถ้า $p_A(x) < \infty$ สำหรับทุก $x \in X$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

$p_A(x)$ ตอบคำถามว่า “ต้องย่อ x ลงกี่เท่า (คูณด้วย $1/p_A(x)$) จึงจะเข้าไปอยู่บนขอบของ A”. ถ้า A คือบอลหนึ่งหน่วย $p_A(x) = \|x\|$: เวกเตอร์ที่ยาว 2 ต้องย่อลงครึ่งหนึ่งจึงจะแตะขอบบอล. ถ้า A เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส $[-1,1]^2$ แล้ว $p_A(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$: มันวัดขนาดด้วยรูปร่างของสี่เหลี่ยม ไม่ใช่วงกลม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 5.4.1: สมบัติของฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $U \subset X$ เป็นเซตนูนซึ่ง $0 \in \operatorname{int} U$.

(a) U เป็นเซตดูดกลืน. ถ้า $\{x : \|x\| < \varepsilon\} \subset U$ แล้ว $p_U(x) \le \|x\|/\varepsilon$ ทุก x.

(b) p_U เป็นฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์.

พิสูจน์. **แนวคิด.** การเป็นเซตเปิดรอบศูนย์ให้ p_U มีค่าจำกัด; ความนูนให้อสมการสามเหลี่ยม โดยเขียนผลบวกเป็นผลผสมนูนของสองจุดใน U.

1. **(a)** ให้ $x \neq 0$ และเลือก $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. ให้ $\lambda = \|x\|/\varepsilon'$. แล้ว $\|x/\lambda\| = \|x\|/\lambda = \varepsilon' < \varepsilon$, ดังนั้น $x/\lambda \in \{y : \|y\| < \varepsilon\} \subset U$. จึง $p_U(x) \le \lambda = \|x\|/\varepsilon'$. ให้ $\varepsilon' \uparrow \varepsilon$ ได้ $p_U(x) \le \|x\|/\varepsilon$. สำหรับ $x = 0$, $0/\lambda = 0 \in U$ ทุก $\lambda > 0$ จึง $p_U(0) = 0$.

2. **เอกภาพบวก.** สำหรับ $t = 0$ ใช้ $p_U(0) = 0$. สำหรับ $t > 0$,

$$p_U(tx) = \inf\{\lambda > 0 : tx/\lambda \in U\} = t \inf\{\mu > 0 : x/\mu \in U\} = t p_U(x).$$

3. **รองรับการบวก.** ให้ $x, y \in X$ และ $\lambda > p_U(x)$, $\mu > p_U(y)$. โดยนิยามของอินฟิมัม มี $\lambda' \in (p_U(x), \lambda)$ ซึ่ง $x/\lambda' \in U$. ความนูนของ U และ $0 \in U$ ให้ $x/\lambda = (\lambda'/\lambda)(x/\lambda') + (1 - \lambda'/\lambda)0 \in U$; ในทำนองเดียวกัน $y/\mu \in U$. ความนูนให้

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in U.$$

ดังนั้น $p_U(x+y) \le \lambda + \mu$. หาอินฟิมัมทางขวาได้ $p_U(x+y) \le p_U(x) + p_U(y)$.

สรุป: เซตนูนเปิดรอบศูนย์ให้ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ที่วัดขนาดด้วยรูปร่างของเซตนั้น. □

บทตั้ง 5.4.2: การแยกเซตนูนเปิดจากศูนย์

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $V \subset X$ เป็นเซตนูนเปิดซึ่ง $0 \notin V$. แล้วมี $x' \in X'$ ซึ่ง

$$\operatorname{Re} x'(v) < 0 \qquad \text{สำหรับทุก } v \in V.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลื่อน V ให้ศูนย์อยู่ข้างใน แล้วใช้เกจ p_U ของเซตนูนที่เลื่อนแล้วเป็นตัวควบคุม. ขยายฟังก์ชันนัลที่วัด “ทิศของ $-x_0$” ด้วยฮาห์น–บานาค; ค่าของมันบน V จะติดลบเพราะ $p_U(u) < 1$ บน U.

1. **กรณีเซตว่าง.** ถ้า $V = \varnothing$ ข้อความจริงโดยปริยาย (เลือก $x' = 0$). ต่อไปสมมติ $V \neq \varnothing$.

2. **เลื่อนเซต.** เลือก $x_0 \in V$ และให้ $U = V - x_0 = \{v - x_0 : v \in V\}$. แล้ว U เป็นเซตนูนเปิด, $0 \in U$ และ $y_0 := -x_0 \notin U$ เพราะถ้า $-x_0 = v - x_0$ จะได้ $v = 0 \in V$, ขัดกับ $0 \notin V$.

3. **เกจของเซตนูน.** นิยาม p_U เป็นเกจของ U ตามนิยาม 5.4.1. ตามบทแทรก 5.4.1 p_U เป็นซับลิเนียร์. เราแสดง $U = \{x : p_U(x) < 1\}$. ถ้า $p_U(x) < 1$ เลือก $\lambda \in (p_U(x), 1)$; ขั้น “รองรับการบวก” ในบทแทรก 5.4.1 ให้ $x/\lambda \in U$, และความนูนให้ $x = (1-\lambda)0 + \lambda(x/\lambda) \in U$. กลับกัน ถ้า $x \in U$ เพราะ U เปิด มี $\eta > 0$ ซึ่ง $(1+\eta)x \in U$; แล้ว $p_U(x) \le 1/(1+\eta) < 1$. ดังนั้น $p_U(y_0) \ge 1$ เพราะ $y_0 \notin U$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. **ขยาย.** บนเส้นตรง $\mathbb{R}y_0$ นิยาม $f(ty_0) = tp_U(y_0)$. สำหรับ $t \geq 0$ มี $f(ty_0) = p_U(ty_0)$; สำหรับ $t < 0$ มี $f(ty_0) < 0 \leq p_U(ty_0)$. ใช้ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค (ฉบับจริง) ขยายเป็นฟังก์ชันนัลจริง x' บน X ซึ่ง $x' \leq p_U$.

5. **ติดลบบน V.** ให้ $v = u + x_0 \in V$ กับ $u \in U$. แล้ว

$$x'(v) = x'(u) - x'(y_0) \leq p_U(u) - p_U(y_0) < 1 - 1 = 0.$$

ขั้นสุดท้ายเป็นจริงเพราะ $u \in U$ ให้ $p_U(u) < 1$ และ $p_U(y_0) \geq 1$.

6. **กรณีเชิงซ้อน.** ทำกรณีจริงกับ X ที่มองเป็นปริภูมิจริง ได้ฟังก์ชันนัลจริง L ซึ่ง $L < 0$ บน V. นิยาม $x'(x) = L(x) - iL(ix)$; ตามบทแทรก 5.3.4 มันเป็นเชิงเส้นเชิงซ้อน และ $\operatorname{Re} x' = L < 0$ บน V.

สรุป: เซตนูนเปิดที่ไม่บรรจุศูนย์ถูกแยกจากศูนย์ด้วยฟังก์ชันนัลที่ติดลบทั้งเซต. □

ทฤษฎีบท 5.4.3: ทฤษฎีบทการแยก I

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $V_1, V_2 \subset X$ เป็นเซตนูนโดย V_1 เปิดและ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. แล้วมี $x' \in X'$ ซึ่ง

$$\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2) \qquad \text{สำหรับทุก } v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ผลต่าง $V_1 - V_2$ เป็นเซตนูนเปิดที่ไม่บรรจุศูนย์; แยกมันจากศูนย์ด้วยบทแทรก แล้วจัดรูปอสมการ.

1. **กรณีเซตว่าง.** ถ้า $V_1 = \varnothing$ หรือ $V_2 = \varnothing$ ข้อความจริงโดยปริยาย (เลือก $x' = 0$). ต่อไปสมมติทั้งสองเซตไม่ว่าง.

2. **เซตผลต่าง.** ให้ $V := V_1 - V_2 = \{v_1 - v_2 : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$. V เป็นเซตนูนและเปิด (เพราะเป็นยูเนียนของเซตเปิด $V_1 - v_2$). และ $0 \notin V$ เพราะ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

3. **แยกจากศูนย์.** ตามบทแทรก 5.4.2 มี $x' \in X'$ ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0$ ทุก $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

4. **จัดรูป.** $\operatorname{Re} x'(v_1) - \operatorname{Re} x'(v_2) < 0$ จึง $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$.

สรุป: เซตนูนเปิดสองเซตที่ disjoint กันถูกคั่นด้วยระดับของฟังก์ชันนัลหนึ่งตัว. □

ทฤษฎีบท 5.4.4: ทฤษฎีบทการแยก II: การแยกอย่างเคร่ง

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $V \subset X$ เป็นเซตนูนปิดไม่ว่าง และ $x \notin V$. แล้วมี $x' \in X'$ ซึ่ง

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf_{v \in V} \operatorname{Re} x'(v).$$

โดยเฉพาะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} x'(v)$ ทุก $v \in V$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เพราะ V ปิดและ $x \notin V$ ระยะทางจาก x ถึง V เป็นบวก จึงมีบอลเล็ก ๆ รอบ x ที่ไม่แตะ V. ใช้การแยก I กับบอลเปิดนั้นกับ V; แล้วอาศัยภาวะต่อเนื่องดึงค่าที่จุดศูนย์กลาง.

1. **เลือกระยะห่าง.** ให้ $d = \operatorname{dist}(x, V) > 0$ เพราะ V ปิดและ $x \notin V$. เลือก $0 < r < d/2$; แล้วบอลเปิด $B(x, r)$ ไม่ตัด V.

2. **แยกบอลกับ V.** ใช้ทฤษฎีบท 5.4.3 กับ $V_1 = B(x, r)$ และ $V_2 = V$. ได้ $x' \in X'$ ซึ่ง

$$\operatorname{Re} x'(y) < \operatorname{Re} x'(v) \qquad \text{สำหรับทุก } y \in B(x, r),\ v \in V.$$

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

3. **ดึงค่าที่ศูนย์กลาง.** สำหรับทุก $y \in B(x,r)$ อสมการข้างต้นให้ $\operatorname{Re} x'(y) \le \inf_V \operatorname{Re} x'(v)$. ให้ $y \to x$; เพราะ $\operatorname{Re} x'$ ต่อเนื่อง
$$\operatorname{Re} x'(x) \le \inf_{v \in V} \operatorname{Re} x'(v).$$
ก่อนอื่น $x' \neq 0$ เพราะถ้า $x' = 0$ อสมการเคร่งในขั้นก่อนจะกลายเป็น $0 < 0$. เมื่อ $x' \neq 0$ ค่าที่ x ไม่ใช่ค่าสูงสุดบนบอล; มี $y \in B(x,r)$ ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(y) > \operatorname{Re} x'(x)$. รวมกับอสมการก่อนหน้าได้ $\operatorname{Re} x'(x) < \inf_V \operatorname{Re} x'(v)$.

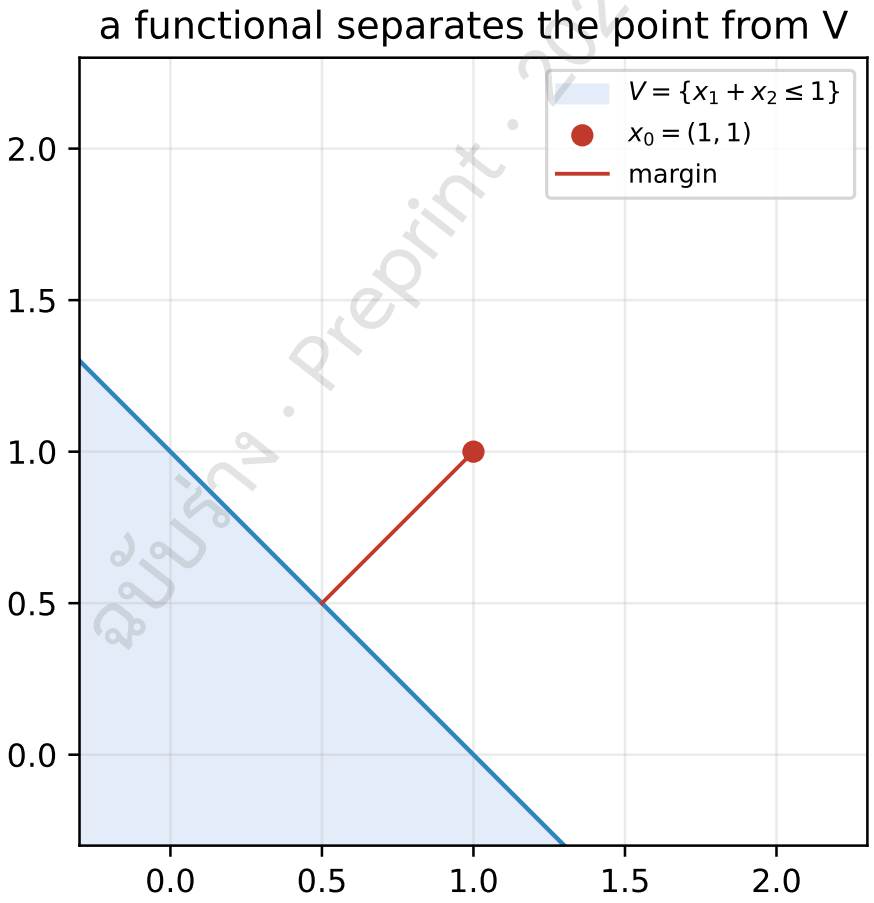
4. **ระยะขอบบวก.** ให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}(\inf_V \operatorname{Re} x'(v) - \operatorname{Re} x'(x)) > 0$. แล้ว $\operatorname{Re} x'(x) + \varepsilon \le \operatorname{Re} x'(v)$ ทุก $v \in V$.

สรุป: จุดที่อยู่นอกเซตนูนปิดถูกแยกอย่างเคร่งด้วยระยะขอบบวก; นี่คือรูปแบบที่ใช้ตรวจว่าจุดหนึ่ง “อยู่นอก” อย่างมั่นใจ. □

ข้อควรระวัง

การแยกอย่างเคร่งแบบมีระยะขอบต้องการ V ปิดและ x อยู่ห่างจาก V เป็นระยะบวก. ตัวอย่าง: ให้ V เป็นบอลเปิดหนึ่งหน่วยใน $\mathbb{R}^2$ และ $x = (1,0) \notin V$. มีฟังก์ชันนัลที่แยกได้เคร่งแบบไม่มีระยะขอบ แต่ไม่มีระยะขอบบวก เพราะ $\operatorname{dist}(x, V) = 0$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21



รูปที่ 5.5: การแยกจุด $x_0 = (1,1)$ จากครึ่งระนาบ $V = \{x : x_1 + x_2 \le 1\}$ ด้วยฟังก์ชันนัล $x'(x) = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$. ระยะขอบคือ $1/\sqrt{2} \approx 0.70711$ (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

ในตัวอย่างของภาพ 5.5 ให้ $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \le 1\}$ และ $x_0 = (1,1)$. เลือก $x'(x) = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$.

แล้ว

$$x'(x_0) = \sqrt{2} \approx 1.41421, \qquad \sup_{v \in V} x'(v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70711.$$

ระยะขอบคือ $1/\sqrt{2} \approx 0.70711$ ซึ่งเท่ากับระยะทางจาก x_0 ถึง V. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน. (ในภาพนี้ $x'(x_0) > \sup_V x'$; ทฤษฎีบท II ให้เครื่องหมายกลับกันเมื่อเลือก $-x'$.)

5.4.2 คู่เชิงของ $C(K)$

ตลอดหัวข้อนี้ K เป็นปริภูมิเมตริกกระชับ. (Werner อนุญาตให้ K เป็นปริภูมิทอพอโลยีกระชับ; เราใช้ฉบับเมตริกเพื่อให้เข้ากับเครื่องมือในบทนี้.) เขียน

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{K} : f \text{ ต่อเนื่อง}\}, \qquad \|f\|_\infty := \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

จากบท“ปริภูมิของฟังก์ชัน” เรารู้ว่า $C(K)$ พร้อมนอร์มซูพรีมัมเป็นปริภูมิบานาค.

นิยาม 5.4.2: การวัดโบเรลปรกติและการแปรผันรวม

ให้ $\mathcal{B}(K)$ เป็น σ-พีชคณิตของเซตโบเรลของ K. **การวัดโบเรลค่าใน** $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-valued Borel measure) คือฟังก์ชัน $\mu : \mathcal{B}(K) \to \mathbb{K}$ ที่ σ-บวก และมีค่าแปรผันรวมจำกัด

$$\|\mu\|_{\mathrm{var}} := |\mu|(K) < \infty,$$

โดย $|\mu|$ คือการวัดการแปรผันรวม. เมื่อ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ การวัดเช่นนี้เป็นการวัดที่มีเครื่องหมาย; เมื่อ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ จึงเรียกว่าการวัดเชิงซ้อน. เรากล่าวว่า μ เป็น**การวัดปรกติ** (regular measure) ถ้าทุกเซตโบเรล E และทุก $\varepsilon > 0$ มีเซตเปิด $O \supset E$ และเซตกระชับ $C \subset E$ ซึ่ง $|\mu|(O \setminus C) < \varepsilon$. เขียน $M(K)$ สำหรับปริภูมิของการวัดโบเรลปรกติค่าใน $\mathbb{K}$ พร้อมนอร์มการแปรผันรวม.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

การวัดคือ “น้ำหนัก” ที่กระจายบนเซต. สำหรับ K ที่มีจำกัด การวัดหนึ่งตัวก็คือชุดตัวเลข $\mu_1, \dots, \mu_n$ ที่ให้กับแต่ละจุด; การแปรผันรวมคือ $\sum_i |\mu_i|$. สำหรับ $K = [0,1]$ การวัดที่คุ้นเคยคือความยาว (Lebesgue measure) ซึ่งให้ค่า $\int_0^1 f(t)\,dt$ กับฟังก์ชันต่อเนื่อง. การวัดปรกติหมายความว่าน้ำหนักไม่กระจุกอยู่บนเซตที่ “แปลก” จนประมาณด้วยเซตเปิดและเซตกระชับไม่ได้.

ทฤษฎีบท 5.4.5: ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์สำหรับ $C(K)$

ให้ K เป็นปริภูมิเมตริกกระชับ. การส่ง

$$J : M(K) \to C(K)', \qquad J(\mu)(f) := \int_K f \, d\mu,$$

เป็นสมสัณฐานแบบสมมิติ. กล่าวคือ ทุก $x' \in C(K)'$ มีการวัดปรกติ $\mu \in M(K)$ เพียงตัวเดียวซึ่ง

$$x'(f) = \int_K f \, d\mu \qquad \text{สำหรับทุก } f \in C(K),$$

และ $\|x'\| = \|\mu\|_{\mathrm{var}}$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไมไม่พิสูจน์เต็ม

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ต้องสร้างการวัดจากฟังก์ชันนัลต่อเนื่อง (ใช้ทฤษฎีบทของดานีแยล–สโตนหรือการประมาณด้วยฟังก์ชันขั้น) และตรวจความปรกติของการวัด. เป็นเนื้อหาทฤษฎีการวัดที่ยาวกว่าบทนี้. เราจึงอ้างต้นฉบับ Werner (2007, pp. 62–64; PDF pp. 72–74) และ Alt (2012, p. 195; PDF p. 206) โดยไม่พิสูจน์. กรณี K มีจำกัดพิสูจน์ได้ทันทีด้านล่าง และแบบทดสอบตรวจตัวเลขของกรณีนั้น.

บทแทรก 5.4.6: กรณี K มีจำกัด

ให้ $K = \{1, \dots, n\}$ พร้อมโทโพโลยีแบบไม่ต่อเนื่อง. แล้ว $C(K)$ คือ $\mathbb{K}^n$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม และทุก $x' \in C(K)'$ เขียนได้แบบเดียวเป็น

$$x'(f) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(i), \qquad \mu_i = x'(e_i),$$

โดย e_i เป็นฟังก์ชันตัวชี้ที่จุด i. นอกจากนี้

$$\|x'\| = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** บนเซตจำกัด ฟังก์ชันใด ๆ คือผลรวมของค่าที่จุดคูณฟังก์ชันตัวชี้. ดึงค่าออกมาเป็น μ_i; นอร์มคือการแปรผันรวม เพราะเลือกเครื่องหมายของ $f(i)$ ให้ทุกพจน์บวกพร้อมกันได้.

1. **ตัวแทน.** ทุก $f \in C(K)$ เขียนได้เป็น $f = \sum_i f(i) e_i$. เพราะ x' เชิงเส้น
$$x'(f) = \sum_i f(i) x'(e_i) = \sum_i \mu_i f(i).$$
2. **ขอบเขต.** $|x'(f)| \le \sum_i |\mu_i||f(i)| \le (\sum_i |\mu_i|)\|f\|_\infty$; จึง $\|x'\| \le \sum_i |\mu_i|$.
3. **ความเท่ากัน.** ถ้า $\mu_i \neq 0$ ทั้งหมด เลือก $f(i) = \overline{\mu_i}/|\mu_i|$; ถ้า $\mu_i = 0$ เลือก $f(i) = 1$. แล้ว $\|f\|_\infty = 1$ และ $x'(f) = \sum_i |\mu_i|$. ดังนั้น $\|x'\| = \sum_i |\mu_i|$.
4. **เอกลักษณ์.** ค่าของ x' บน e_i ถูกกำหนดโดย x' เอง; จึงมี μ_i ชุดเดียว.

สรุป: บนเซตจำกัด ปริภูมิคู่ของ $C(K)$ คือ $\mathbb{K}^n$ พร้อมนอร์มผลบวก; นี่คือการแปรผันรวมในกรณีที่ง่ายที่สุด. □

สำหรับ $K = \{1, 2, 3\}$ ให้ $\mu = (2, -1, 0.5)$ และ $f = (1, -1, 1)$. แล้ว $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = 2 + 1 + 0.5 = 3.5$, $\|f\|_\infty = 1$ และ

$$\int f \, d\mu = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0.5 \cdot 1 = 3.5.$$

อสมการ $|\int f \, d\mu| \le \|\mu\|_{\mathrm{var}} \|f\|_\infty$ จึงเป็น $3.5 \le 3.5$. ตัวเลขทั้งหมดมีแบบทดสอบยืนยัน.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): จาก C_c^0 ถึงการวัด

Alt (2012, p. 197; PDF p. 208) กล่าวว่าฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่มีขอบเขตบน $C_c^0(\Omega)$ มีการวัดโบเรลปรกติ λ เพียงตัวเดียวแทนมัน และนอร์มของฟังก์ชันนัลเท่ากับการแปรผันรวมของ λ. นี่คือรูปแบบท้องถิ่นของทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์. เราไม่ต้องใช้ในบทนี้ แต่จะกลับมาใช้ในบท“ดิสทริบิวชันและโซโบเลฟ” เมื่อพูดถึงดิสทริบิวชัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

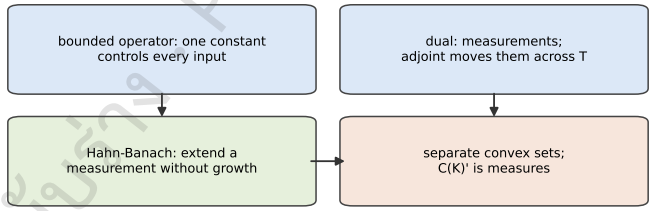
5.4.3 กลับไปที่คำถามเปิดบท

คำถามเปิดบทถามว่าทำไมการทำให้คมชัดภาพที่เบลอจึงทำให้สัญญาณรบกวนชัดขึ้น. คำตอบที่ได้จาก §5.2 คือ: เพราะการทำให้คมชัดคือการใช้ตัวผกผัน B^{-1} และ $\|B^{-1}\|$ ใหญ่เมื่อ a ใกล้ $1/4$. ที่ $a = 0.20$ ในสองมิติ $\|B^{-1}\| = 25$; สัญญาณรบกวนแอมพลิจูด 0.01 ต่อพิกเซลจึงกลายเป็นค่าสูงสุด 0.25. การแยกเซตนูนในหัวข้อนี้ช่วยอธิบายอีกด้านหนึ่ง: ถ้าเรารู้ว่าภาพจริงต้องอยู่ในเซตนูนของภาพที่ยอมรับได้ (เช่น พิกเซลไม่ติดลบ) การแยกจะบอกว่าภาพที่ทำให้คมชัดแล้วออกนอกเซตอย่างชัดเจนแค่ไหน. แต่การแยกไม่ได้ทำให้ตัวผกผันมีนอร์มเล็กลง; มันเพียงบอกว่าเราตรวจพบปัญหาได้. ดังนั้นสาเหตุที่แท้จริงยังคงอยู่ที่ตัวผกผันของตัวดำเนินการเบลอ ไม่ใช่ที่การทำให้คมชัด.

สรุปใจความ

- ฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี p_U วัดขนาดด้วยรูปร่างของเซตนูน U; ถ้า U เปิดและมีศูนย์อยู่ข้างใน p_U เป็นฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์.
- เซตนูนเปิดที่ไม่บรรจุศูนย์ถูกแยกจากศูนย์ด้วยฟังก์ชันนัลที่ติดลบทั้งเซต.
- เซตนูนเปิดสองเซตที่ disjoint กันถูกแยกด้วยระดับของฟังก์ชันนัล; จุดที่อยู่นอกเซตนูนปิดถูกแยกอย่างเคร่งด้วยระยะขอบบวก.
- ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์กล่าวว่า $C(K)'$ เป็นสมสัณฐานแบบสมมิติกับปริภูมิของการวัดโบเรลปรกติ $M(K)$ พร้อมนอร์มการแปรผันรวม.
- กรณี K จำกัดลดเหลือ $\mathbb{K}^n$ พร้อมนอร์มผลบวก; ตัวอย่าง $\mu = (2, -1, 0.5)$ มีการแปรผันรวม 3.5 และให้ค่า 3.5 กับ $f = (1, -1, 1)$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 5.6: แผนผังปิดบทนี้: นอร์มของตัวดำเนินการนำไปสู่คู่เชิง ตัวดำเนินการผูกพัน ฮาห์น–บานาค และการแยกเซตนูน; เส้นทางกลับคือการใช้คู่เชิงอ่านนอร์ม ระยะทาง และการวัด (สร้างจาก `code/funkana/ch05.py`).

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $U = [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. จงแสดงว่า $p_U(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ และคำนวณ $p_U(3,4)$, $p_U(1,2)$ และ $p_U(1/2,1)$.

2. ให้ $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \le 1\}$ และ $x_0 = (1,1)$. จงหาฟังก์ชันนัล x' ที่แยก x_0 จาก V อย่างเคร่ง และคำนวณระยะขอบ.

3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทการแยก I จากบทแทรกการแยกเซตนูนเปิดจากศูนย์.

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทการแยก II โดยละเอียด รวมถึงการแสดงว่าระยะขอบเป็นบวก.

5. ให้ $K = \{1,2,3\}$, $\mu = (2,-1,0.5)$ และ $f = (1,-1,1)$. จงคำนวณ $\|\mu\|_{\mathrm{var}}$, $\|f\|_\infty$ และ $\int f\,d\mu$ แล้วตรวจอสมการนอร์ม.

6. ให้ $K = [0,1]$ และ $x'(f) = f(0)$. จงหาการวัด μ ที่แทน x' และคำนวณ $\|\mu\|_{\mathrm{var}}$ กับ $x'(f)$ สำหรับ $f(t) = 1 - t$.

7. จงยกตัวอย่างฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน $C[0,1]$ ที่ไม่ใช่ผลรวมถ่วงน้ำหนักของค่าที่จุดจำนวนจำกัด และบอกการวัดที่แทนมัน.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สำหรับ $x \neq 0$, $x/\lambda \in [-1,1]^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x_1|/\lambda \le 1$ และ $|x_2|/\lambda \le 1$, นั่นคือ $\lambda \ge \max\{|x_1|,|x_2|\}$. อินฟิมัมจึงเป็นค่าสูงสุดนั้น. ค่าที่ต้องการ: $p_U(3,4) = 4$, $p_U(1,2) = 2$ และ $p_U(1/2,1) = 1$. ตัวเลขทั้งสามมีแบบทดสอบยืนยัน.

2. ให้ $x'(x) = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$. แล้ว $x'(x_0) = \sqrt{2} \approx 1.41421$ และ $\sup_{v \in V} x'(v) = 1/\sqrt{2} \approx 0.70711$. ระยะขอบคือ $\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \approx 0.70711 > 0$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

3. ให้ $V = V_1 - V_2$. เพราะ V_1 เปิด (ไม่ต้องให้ V_2 ปิด), V เปิด; เพราะทั้งสองนูน V นูน; และ $0 \notin V$ เพราะ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. ใช้บทแทรกได้ x' ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0$; จัดรูปเป็น $\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$.

4. ให้ $d = \operatorname{dist}(x, V) > 0$ และเลือก $0 < r < d$. บอล $B(x,r)$ ไม่ตัด V. ใช้การแยก I กับ $B(x,r)$ และ V ได้ x' ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(y) < \operatorname{Re} x'(v)$ ทุก $y \in B(x,r)$, $v \in V$. ให้ $y \to x$ ได้ $\operatorname{Re} x'(x) \le \inf_V \operatorname{Re} x'(v)$. สมการ $x' = 0$ เป็นไปไม่ได้เพราะจะให้ $0 < 0$; ดังนั้น $x' \neq 0$ และมี $y \in B(x,r)$ ซึ่ง $\operatorname{Re} x'(y) > \operatorname{Re} x'(x)$; รวมกับอสมการแรกได้อสมการเคร่ง. ระยะขอบคือครึ่งหนึ่งของผลต่าง ซึ่งมากกว่าศูนย์.

5. $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = 2 + 1 + 0.5 = 3.5$, $\|f\|_\infty = 1$ และ $\int f\,d\mu = 2 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0.5 \cdot 1 = 3.5$. ดังนั้น $|\int f\,d\mu| = 3.5 \le 3.5 \cdot 1$. ตัวเลขทั้งหมดมีแบบทดสอบยืนยัน.

6. การวัดคือมวลหนึ่งหน่วยที่จุด 0, $\mu = \delta_0$; การแปรผันรวมคือ 1. สำหรับ $f(t) = 1 - t$, $f(0) = 1$ และ $\|f\|_\infty = 1$; ดังนั้น $x'(f) = 1$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

7. ตัวอย่างคือ $x'(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$. มันเป็นการวัด Lebesgue μ ซึ่งไม่ใช่มวลจุดจำนวนจำกัด และ $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = 1$. สำหรับ $f \equiv 1$, $x'(f) = 1$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สูตรสรุป

- นอร์ม: $\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|$; $\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$ และ $\|T'\| = \|T\|$.
- คู่เชิง: $\|x\| = \sup_{\|x'\|\le 1}|x'(x)|$; ฮาห์น–บานาคขยาย $u' \in U'$ เป็น $x' \in X'$ ด้วย $\|x'\| = \|u'\|$.
- ตัวดำเนินการผูกพัน: $(T'y')(x) = y'(Tx)$; บนฮิลเบิร์ต $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ โดยช่องที่สองเป็นสังยุคเชิงเส้น.
- นอยมันน์: ถ้า $\|T\| < 1$ แล้ว $(I-T)^{-1} = \sum_{m\ge 0} T^m$ และ $\|(I-T)^{-1} - S_M\| \le \|T\|^M/(1-\|T\|)$. การเบลอ: $\|B_a^{-1}\|_2 = 1/(1-4a)$ และ $\|(B_a^{(2)})^{-1}\|_2 = 1/(1-4a)^2$ เมื่อ n คู่.
- เรขาคณิต: $p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in U\}$; เซตนูนเปิดแยกจากศูนย์ได้, จุดนอกเซตนูนปิดแยกได้ด้วยระยะขอบบวก, และ $M(K) \cong C(K)'$ ผ่านการหาปริพันธ์.

ทบทวนศัพท์ใหม่

- **เคอร์เนลสังวัตนาการ**: ชุดน้ำหนักที่ใช้ผสมค่าของแต่ละพิกเซลกับเพื่อนบ้าน; **สังวัตนาการ** คือการผสมแบบนี้.
- **สัญญาณรบกวน**: ความคลาดเคลื่อนที่เพิ่มเข้ามาในภาพ ไม่ได้มาจากภาพต้นฉบับ; **การทำให้คมชัด** คือการใช้ตัวผกผันที่แน่นอนของการเบลอ.
- **สมสัณฐาน**: การส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงที่มีตัวผกผันต่อเนื่อง; **การส่งสมมิติ** คือกรณีที่รักษาระยะทาง.
- **ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์**: ฟังก์ชันที่เข้ากับการคูณสเกลาร์ไม่ติดลบและรองรับการบวก; **ระนาบเกิน** คือเซตระดับของฟังก์ชันนัลเชิงเส้น.
- **เคอร์เนล**: เซตของเวกเตอร์ที่ตัวดำเนินการส่งไปยังศูนย์; **การส่งผลหาร** คือการส่งที่ภาพของบอลเปิดหนึ่งหน่วยเป็นบอลเปิดหนึ่งหน่วย.

อ่านต่อ

บทนี้เริ่มจากคำถามว่าตัวดำเนินการขยายภาพได้แค่ไหน และจบด้วยคำถามว่าการวัดบนปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องมาจากอะไร. เราเห็นแล้วว่าคำตอบทั้งสองเชื่อมกันผ่านปริภูมิคู่: ตัวดำเนินการผูกพันย้ายการวัด, ฮาห์น–บานาคทำให้การวัดมีมากพอ, และการแยกเซตนูนทำให้เราแปลการวัดกลับเป็นข้อความทางเรขาคณิตได้. บทถัดไปถามว่าการลู่เข้าทีละจุดให้ขอบเขตร่วมได้หรือไม่ และทฤษฎีบทหลักสามข้อเชื่อมคำถามนี้กับตัวดำเนินการมีขอบเขตอย่างไร.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 6

ทฤษฎีบทหลักสามข้อ: แบร์ ขอบเขตเอกรูป เปิด/กราฟปิด

ฉบับร่าง Preprint 2025-10-24

สถานการณ์สมมติ: คลิกเดียวในตัวอย่างเสียง

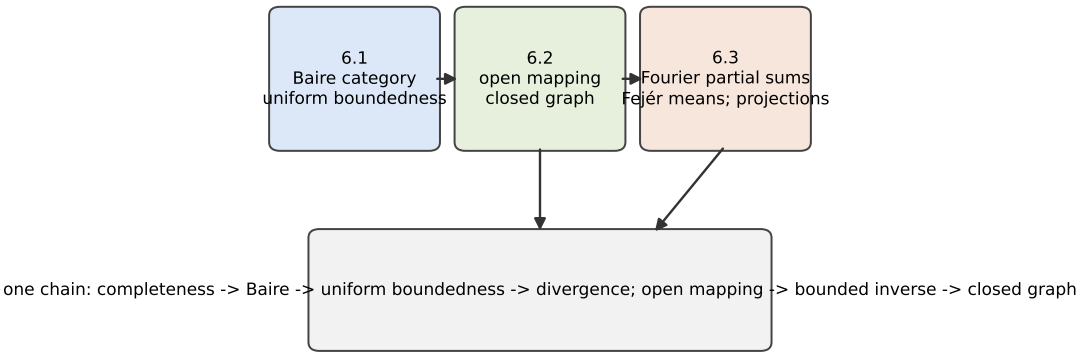
สมมติว่าเราเปิดแอปฟังเพลง แล้วเลื่อนไปยังจุดที่มีเสียง “คลิก” หนึ่งครั้ง. แอปต้องการวาดตัวอย่างรูปคลื่นให้เห็นก่อนกดเล่น. เพื่อให้วาดเร็ว มันเก็บความถี่ไว้ถึงอันดับ N แล้ววาดกราฟจาก**ผลบวกย่อย** (partial sum)ของอนุกรมฟูเรียร์. เมื่อ N ยังน้อย กราฟดูเรียบและคลิกยังดูเหมือนยอดเดียว. เมื่อเพิ่ม N ขึ้น กราฟกลับไม่ได้เรียบขึ้นอย่างที่คาด: ใกล้คลิกมีลอนเล็ก ๆ ชี้ขึ้นเกินค่าจริง และลอนนั้นไม่หดหายเมื่อ N โตขึ้น.

สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าแอปใดใช้วิธีนี้จริง. เราใช้คลิกเป็นชื่อของ*จุดที่ฟังก์ชันกระโดด*: ค่าด้านซ้ายกับด้านขวาต่างกันเป็นจำนวนจำกัด. คำถามของบทนี้คือ: ทำไมการเพิ่มพจน์จึงไม่ทำให้กราฟ “คมขึ้น” ทุกจุด, ทำไมบางฟังก์ชันต่อเนื่องจึงทำให้อนุกรมฟูเรียร์ลู่ออกที่จุดหนึ่ง, และมีวิธีเฉลี่ยที่กำจัดลอนเกินค่าหรือไม่.

คำตอบจะมาจาก**ทฤษฎีบทหลักสามข้อ** (principal theorems). ข้อแรกคือทฤษฎีบทหมวดหมู่ของแบร์: ปริภูมิบริบูรณ์ไม่สามารถถูกปกคลุมด้วยเซตที่ “บาง” จำนวนนับได้. ข้อที่สองคือหลักการมีขอบเขตเอกรูป: ถ้าตัวดำเนินการทั้งตระกูลมีค่ามีขอบเขตทีละจุด ก็มีค่าคงตัวตัวเดียวคุมนอร์มของทั้งตระกูล. ข้อที่สามคือทฤษฎีบทการส่งเปิดและทฤษฎีบทกราฟปิด: ความบริบูรณ์ทำให้การผกผันและการต่อเนื่องตามมาโดยอัตโนมัติ. จากนั้นเราจะใช้ข้อที่สองกับ**ค่าคงตัวเลอเบก** (Lebesgue constant)ของผลบวกย่อยฟูเรียร์ และเปรียบเทียบกับ**ค่าเฉลี่ยเฟเยร์** (Fejér mean)ซึ่งมีนอร์มไม่โต.

ตัวเลขจากการคำนวณทุกตัวในบทนี้มาจากโค้ดของเราและมีแบบทดสอบยืนยัน. เมื่อข้อความกล่าวถึง “การคำนวณ” หมายถึงการคำนวณบนแบบจำลองของเรา ไม่ใช่การวัดจากแอปหรืออุปกรณ์จริง.

ก่อนเข้าสู่การพิสูจน์ เราสรุปเส้นทางของบทไว้ในรูปที่ 6.1: ความบริบูรณ์จะถูกใช้ซ้ำ ๆ ตั้งแต่ทฤษฎีบทของแบร์ไปจนถึงการประมาณด้วยค่าเฉลี่ยเฟเยร์.



รูปที่ 6.1: แผนผังของบทนี้. หัวข้อ 6.1 ให้ทฤษฎีบทของแบร์และหลักการมีขอบเขตเอกรูป; หัวข้อ 6.2 ใช้ความบริบูรณ์เดียวกันเพื่อได้การส่งเปิด ตัวผกผันมีขอบเขต และกราฟปิด; หัวข้อ 6.3 นำหลักการมีขอบเขตเอกรูปไปใช้กับอนุกรมฟูเรียร์ และปิดด้วยการฉาย (สร้างจาก `code/funkana/ch06.py`).

ภาพรวมบท

บทนี้ตอบคำถามเดียวในสามภาษา. ภาษาของ*ความบาง*ถามว่าเซตหนึ่ง “เล็กพอ” ที่จะไม่ปิดปริภูมิทั้งปริภูมิหรือไม่; คำตอบคือทฤษฎีบทของแบร์. ภาษาของ*ขนาด*ถามว่าตระกูลของตัวดำเนินการที่มีขอบเขตทีละจุดจะมีขอบเขตเดียวกันหรือไม่; คำตอบคือหลักการมีขอบเขตเอกรูป. ภาษาของ*การย้อนกลับ*ถามว่าเมื่อตัวดำเนินการเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ตัวผกผันต่อเนื่องหรือไม่; คำตอบคือทฤษฎีบทการส่งเปิดและบทแทรกที่ตามมา.

ภาพที่ต้องจำคือ “ปริภูมิบริบูรณ์ไม่มีรู”. ถ้าเราเอาบอลปิดซ้อนกันและรัศมีหดลงจนเป็นศูนย์ จุดศูนย์กลางต้องมีลิมิตอยู่ในปริภูมิ. ภาพนี้ใช้ซ้ำในทุกบทพิสูจน์ของบทนี้: สร้างบอลซ้อนกัน, ใช้ความบริบูรณ์หาลิมิต, แล้วใช้ลิมิตนั้นขัดแย้งกับสมมติฐาน.

ลำดับของบทคือ: §6.1 วางรากด้วยแบร์และหลักการมีขอบเขตเอกรูป; §6.2 ต่อด้วยการส่งเปิด ตัวผกผันมีขอบเขต และกราฟปิด; §6.3 ใช้เครื่องมือทั้งหมดกับอนุกรมฟูเรียร์ การฉาย และคำถามเปิดบท.

6.1 ทฤษฎีบทของแบร์และหลักการมีขอบเขตเอกรูปสำหรับปริภูมิบานาค

หัวข้อนี้เริ่มจากคำถามง่าย ๆ ว่าเซตที่ “บาง” หลาย เซตรวมกันจะคลุมปริภูมิทั้งปริภูมิได้หรือไม่. เราจะให้นิยามที่ชัดเจนของคำว่า “บาง” ก่อน แล้วพิสูจน์ทฤษฎีบทของแบร์ในสองรูปแบบ. หลังจากนั้นเราจะใช้ทฤษฎีบทนี้กับตระกูลตัวดำเนินการ เพื่อให้ได้หลักการมีขอบเขตเอกรูปซึ่งเป็นเครื่องมือหลักของ §6.3.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพว่าเราเอาผ้าห่มผืนบางจำนวนนับได้มาคลุมเตียงทั้งหลัง. ถ้าผ้าห่มแต่ละผืนบางจนไม่มีส่วนใดหนาเลย คำถามคือมันจะคลุมเตียงได้ทั้งหมดหรือไม่. ทฤษฎีบทของแบร์ตอบว่าไม่: เตียงที่ “ไม่มีรู” (ปริภูมิบริบูรณ์) ต้องมีจุดหนึ่งที่ผ้าห่มผืนใดผืนหนึ่งหนาพอสมควร. คำว่า “บาง” ในที่นี้มีนิยามที่ชัดเจน คือ*ทุกที่ไม่หนาแน่น*: แม้จะปิดเซตนั้นลงไปแล้ว ข้างในยังไม่มีบอลเปิดเลย.

เมื่อได้ทฤษฎีบทนี้แล้ว เราจะใช้มันพิสูจน์หลักการมีขอบเขตเอกรูป. หลักการนี้บอกว่า ถ้าเรามีตัวดำเนินการจำนวนมาก และทุกจุด x ให้ค่า $T_i x$ ที่มีขนาดไม่เกินค่าหนึ่ง (ซึ่งอาจขึ้นกับ x) แล้วจริง ๆ มีค่าคงตัวตัวเดียวที่คุมนอร์มของทุก T_i พร้อมกัน. นี่ไม่ใช่เรื่องชัดเจน: ค่าขอบเขตทีละจุดอาจโตขึ้นเมื่อ x เปลี่ยน และเราไม่มีสิทธิ์สรุปว่าค่าขอบเขตเหล่านั้นถูกคุมด้วยค่าคงตัวเดียว. ความบริบูรณ์ของปริภูมิคือสิ่งที่ทำให้ได้ขอบเขตเอกรูป.

นิยาม 6.1.1: เซตทุกที่ไม่หนาแน่นและเซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $M \subset X$.

(a) เราเรียก M ว่า**ทุกที่ไม่หนาแน่น** (nowhere dense) ถ้า

$$\operatorname{int}_X\left(\overline{M}\right) = \emptyset.$$

(b) เราเรียก M ว่าเป็น**เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง** (set of first category) ถ้ามีลำดับของเซตทุกที่ไม่หนาแน่น (M_n) ซึ่ง

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n.$$

(c) เราเรียก M ว่าเป็น**เซตหมวดหมู่ที่สอง** (set of second category) ถ้ามันไม่ใช่เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“ทุกที่ไม่หนาแน่น” ไม่ได้หมายความว่าเซตนั้นว่างหรือมีจำนวนจุดน้อย. มันหมายความว่า*ส่วนปิด*ของเซตไม่มีบอลเปิดอยู่ข้างในเลย. ตัวอย่างเช่น $\{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$ เป็นเซตทุกที่ไม่หนาแน่นใน $\mathbb{R}$: มันปิดอยู่แล้ว และภายในว่าง. เซตต้นเสียง (Cantor set) ก็ทุกที่ไม่หนาแน่น แต่มีจุดมากมายจนนับไม่ได้. ดังนั้น “บาง” ในที่นี้เป็นเรื่องของ*ที่ว่าง* ไม่ใช่จำนวนจุด.

“หมวดหมู่ที่หนึ่ง” คือการรวมกันได้ของเซตบาง ๆ จำนวนนับได้. เซต $\mathbb{Q}$ เป็นหมวดหมู่ที่หนึ่งใน $\mathbb{R}$ เพราะเขียนเป็น $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ และแต่ละ $\{q\}$ ทุกที่ไม่หนาแน่น. แต่ $\mathbb{Q}$ ยัง*หนาแน่นใน* $\mathbb{R}$: ทุกช่วงมีจำนวนตรรกยะ. เพราะฉะนั้นเซตหมวดหมู่ที่หนึ่งไม่จำเป็นต้อง “ไม่หนาแน่น”; มันอาจกระจายทั่วปริภูมิก็ได้.

ข้อควรระวัง: ภายในว่างไม่เท่ากับทุกที่ไม่หนาแน่น

ถ้าเซต M มีภายในว่าง ($\operatorname{int} M = \emptyset$) เรา*ยังสรุปไม่ได้*ว่า M ทุกที่ไม่หนาแน่น. ตัวอย่างคือ $M = \mathbb{Q}$ ใน $\mathbb{R}$: ภายในของ $\mathbb{Q}$ ว่าง เพราะทุกช่วงมีจำนวนอตรรกยะ แต่ส่วนปิดของ $\mathbb{Q}$ คือ $\mathbb{R}$ ซึ่งมีภายในไม่ว่าง. ดังนั้น $\mathbb{Q}$ ไม่ใช่เซตทุกที่ไม่หนาแน่น. เวลาจะใช้คำว่า “บาง” ต้องตรวจ*ส่วนปิด* ไม่ใช่ตัวเซตเดิม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.1.1: ทฤษฎีบทหมวดหมู่ของแบร์

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่ไม่ว่าง. แล้ว

(i) ถ้า $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับของเซตเปิดที่หนาแน่นใน X แล้ว $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ หนาแน่นใน X.

(ii) ถ้า $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ โดยที่ A_n เป็นเซตปิดทุก n แล้วมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$\operatorname{int}_X(A_{n_0}) \neq \emptyset.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (i) พิสูจน์ด้วยบอลปิดซ้อนกัน: แต่ละ O_n เปิดและหนาแน่น จึงเลือกบอลเล็ก ๆ ข้างในบอลก่อนหน้าได้; รัศมีหดลงถึงศูนย์ ลำดับจุดศูนย์กลางเป็นโคชี และความบริบูรณ์ให้ลิมิตที่อยู่ในทุก O_n. ข้อ (ii) ตามมาจาก (i) ด้วยการเติม**ส่วนเติมเต็ม**: ถ้าทุก A_n มีภายในว่าง ส่วนเติมเต็ม $X \setminus A_n$ จะเปิดและหนาแน่น แต่ส่วนร่วมของมันว่าง ซึ่งขัดกับ (i).

1. **ข้อ (i): สร้างบอลซ้อนกัน.** ให้ $B_0 = B_{r_0}(x_0)$ เป็นบอลเปิดใด ๆ ใน X. เราจะแสดงว่า B_0 ตัด $\bigcap_n O_n$. เริ่มจาก B_0. ความหนาแน่นของ O_1 บอกว่า O_1 ตัดบอลเปิด B_0; และเพราะทั้ง O_1 และ B_0 เปิด จุดตัดนี้จึงเปิด. มันจึงไม่ว่าง และมีจุด x_1 อยู่ข้างใน. เลือก $0 < r_1 < \min\{1, r_0/2\}$ โดยอาจลด r_1 ลงอีกให้

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset O_1 \cap B_0.$$

ทำซ้ำ: เมื่อได้ x_{n-1} และ r_{n-1} แล้ว เพราะ O_n เปิดและหนาแน่น, $O_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1})$ เป็นเซตเปิดที่ไม่ว่าง. เลือก x_n และ

$$0 < r_n < \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{r_{n-1}}{2}\right\}$$

โดยอาจลด r_n ลงอีกให้

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset O_n \cap B_{r_{n-1}}(x_{n-1}).$$

2. **ลิมิตอยู่ในทุก O_n.** ถ้า $m \geq n$ แล้ว $x_m \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ ดังนั้น

$$d(x_m, x_n) \leq r_n < \frac{1}{n}.$$

เพราะฉะนั้น (x_n) เป็นลำดับโคชี. ความบริบูรณ์ของ X ให้ $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. สำหรับแต่ละ n, ทุก x_m ที่ $m \geq n$ อยู่ในเซตปิด $\overline{B_{r_n}(x_n)}$; จึง x อยู่ในเซตนั้นด้วย. แต่ $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset O_n$, ดังนั้น $x \in O_n$ ทุก n. นอกจากนี้ $x \in \overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_0$. เราจึงได้ $x \in B_0 \cap \bigcap_n O_n$. เพราะ B_0 เป็นบอลเปิดใด ๆ, ส่วนร่วม $\bigcap_n O_n$ หนาแน่น.

3. **ข้อ (ii): เติมส่วนเติมเต็ม.** สมมติว่า $\operatorname{int}_X(A_n) = \emptyset$ ทุก n. ตั้ง $O_n := X \setminus A_n$. แต่ละ O_n เปิด เพราะ A_n ปิด. เราจะแสดงว่า O_n หนาแน่น. ให้ $B \subset X$ เป็นเซตเปิดที่ไม่ว่าง. ถ้า $B \cap O_n = \emptyset$ แล้ว $B \subset A_n$. เพราะ B เปิด, ทุกจุดของ B เป็นจุดภายในของ A_n; จึง $B \subset \operatorname{int}_X(A_n) = \emptyset$, ขัดกับ $B \neq \emptyset$. ดังนั้น O_n หนาแน่น.

4. **ข้อขัดแย้ง.** ตามข้อ (i), $\bigcap_n O_n$ หนาแน่น. แต่

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus X = \emptyset.$$

ในปริภูมิที่ไม่ว่าง เซตว่างไม่หนาแน่น เพราะบอลเปิดใด ๆ ไม่ตัดเซตว่าง. ขัดแย้ง. ดังนั้นมี n_0 ซึ่ง $\operatorname{int}_X(A_{n_0}) \neq \emptyset$.

สรุป: ความบริบูรณ์ทำให้บอลซ้อนกันมีจุดร่วม; ถ้าทุกเซตปิดมีภายในว่าง การเติมส่วนเติมเต็มจะให้ส่วนร่วมที่ทั้งหนาแน่นและว่าง ซึ่งเป็นไปไม่ได้. □

ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-24

บทแทรก 6.1.2: ปริภูมิบริบูรณ์ที่ไม่ว่างไม่ใช่เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์และ $X \neq \varnothing$. ภายใต้สองเงื่อนไขนี้ X จัดเป็นเซตหมวดหมู่ที่สองเมื่อมองในตัวเอง; กล่าวคือ X เขียนเป็นการรวมกันนับได้ของเซตทุกที่ไม่หนาแน่นใน X ไม่ได้. สมบัตินี้ใช้แสดงว่าจุดทั่วไปในปริภูมิยังมีสมบัติบางอย่าง แม้เซตของจุดที่ผิดปกติจะมีขนาดใหญ่.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า X เป็นหมวดหมู่ที่หนึ่ง เราจะเขียน X เป็นการรวมกันนับได้ของเซตทุกที่ไม่หนาแน่น แล้วใช้ทฤษฎีบทของแบร์กับส่วนปิดของเซตเหล่านั้น.

สมมติว่า $X = \bigcup_n M_n$ โดยแต่ละ M_n ทุกที่ไม่หนาแน่น. เพราะ $M_n \subset \overline{M_n}$, เราได้

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}.$$

แต่ละ $\overline{M_n}$ เป็นเซตปิด และ $\operatorname{int}(\overline{M_n}) = \emptyset$ ตามนิยามของทุกที่ไม่หนาแน่น. ทฤษฎีบทของแบร์ (ข้อ (ii)) บอกว่าบาง $\overline{M_{n_0}}$ ต้องมีภายในไม่ว่าง ซึ่งขัดแย้ง. ดังนั้น X ไม่ใช่หมวดหมู่ที่หนึ่ง.

สรุป: ปริภูมิบริบูรณ์ที่ไม่ว่างไม่สามารถถูกเขียนเป็นการรวมกันนับได้ของเซตที่ส่วนปิดมีภายในว่าง. □

บทแทรก 6.1.3: จุดนอกเซตหมวดหมู่ที่หนึ่งยังหนาแน่น

ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่ไม่ว่าง และ $M \subset X$ เป็นเซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง. แล้วเซตของจุดที่ไม่อยู่ใน M ยังหนาแน่นใน X; ทุกบอลเปิดจึงบรรจุจุดเช่นนั้น.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน M เป็นการรวมกันของเซตทุกที่ไม่หนาแน่น แล้วเติมส่วนเติมเต็มของการปิด; เซตเหล่านี้เปิดและหนาแน่น และส่วนร่วมของมันอยู่ใน $X \setminus M$.

ให้ $M = \bigcup_n M_n$ โดยแต่ละ M_n ทุกที่ไม่หนาแน่น. ตั้ง $O_n := X \setminus \overline{M_n}$. เพราะ $\overline{M_n}$ ปิด, O_n เปิด. และ O_n หนาแน่น: ถ้า B เปิดไม่ว่างและ $B \cap O_n = \emptyset$ แล้ว $B \subset \overline{M_n}$, ทำให้ $\overline{M_n}$ มีจุดภายใน ซึ่งขัดกับสมมติฐาน. ตอนนี้

$$\bigcap_n O_n = \bigcap_n (X \setminus \overline{M_n}) = X \setminus \bigcup_n \overline{M_n} \subset X \setminus \bigcup_n M_n = X \setminus M.$$

ทฤษฎีบทของแบร์บอกว่า $\bigcap_n O_n$ หนาแน่น. ถ้าเซตหนึ่งหนาแน่นแล้ว เซตใด ๆ ที่บรรจุมันไว้ย่อมหนาแน่นด้วย; เนื่องจาก $X \setminus M$ บรรจุ $\bigcap_n O_n$, มันจึงหนาแน่น. ดังนั้น $X \setminus M$ หนาแน่น.

สรุป: เซตหมวดหมู่ที่หนึ่งอาจใหญ่หรือหนาแน่นได้ แต่ส่วนเติมเต็มของมันยังหนาแน่นเสมอในปริภูมิบริบูรณ์. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ตัวอย่างที่ทำให้เห็นความจำเป็นของสมมติฐาน

- **ความบริบูรณ์จำเป็น.** ให้ $X = \mathbb{Q}$ พร้อมเมตริกปกติ. เขียน $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. แต่ละ $\{q_k\}$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{Q}$ (เพราะจุดเดียวปิด) และมีภายในว่างใน $\mathbb{Q}$ (ทุกบอลรอบ q_k มีจำนวนตรรกยะตัวอื่น). แต่ $\mathbb{Q} = \bigcup_k \{q_k\}$ และไม่มี $\{q_k\}$ ใดมีภายในไม่ว่าง. ข้อสรุปของแบร์จึงล้ม เพราะ $\mathbb{Q}$ ไม่บริบูรณ์.
- **ความปิดจำเป็นในข้อ (ii).** เขียน $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. ทั้งสองเซตมีภายในว่าง และทั้งสองไม่ปิด. นี่ไม่ขัดกับแบร์ เพราะข้อ (ii) บังคับให้ A_n ปิด. สังเกตว่า $\mathbb{Q}$ และส่วนเติมเต็มของมันไม่ใช่เซตทุกที่ไม่หนาแน่น; เราเพียงเอา “ภายในว่าง” มาใช้โดยไม่มีความปิด ซึ่งไม่พอ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.1.4: หลักการมีขอบเขตเอกรูป (ทฤษฎีบทบานาค–ชไตน์เฮาส์)

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค, Y เป็นปริภูมินอร์ม, I เป็นเซตดัชนีใด ๆ และ $T_i \in \mathcal{L}(X,Y)$ สำหรับทุก $i \in I$. ถ้า

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y < \infty \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X,$$

แล้ว

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เซตของจุดที่ค่าทั้งตระกูลถูกคุมด้วยจำนวนเต็ม n เป็นเซตปิด; เซตเหล่านี้รวมกันได้ทั้ง X. แบร์ให้เซตหนึ่งมีบอลเปิดอยู่ข้างใน. ใช้ความสมมาตรและความนูนของเซตนั้นเพื่อย้ายบอลไปรอบศูนย์ แล้วอ่านค่าขอบเขตของนอร์ม.

1. **เซตปิดที่ครอบ X.** ในพิสูจน์นี้ให้ $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$. สำหรับ $n \in \mathbb{N}_0$ ตั้ง

   $$E_n := \{x \in X : \|T_i x\|_Y \le n \text{ สำหรับทุก } i \in I\}.$$

   สำหรับแต่ละ n และแต่ละ i, เซต $\{x : \|T_i x\|_Y \le n\}$ เป็นภาพผกผันของช่วงปิด $[0,n]$ ภายใต้ฟังก์ชันต่อเนื่อง $x \mapsto \|T_i x\|_Y$; มันจึงปิด. เมื่อตัดส่วนร่วมทุก i, E_n ยังปิด. สมมติฐานบอกว่า $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

2. **แบร์ให้บอลเปิด.** ตามทฤษฎีบทของแบร์ (ข้อ (ii)) มี $N \in \mathbb{N}_0$ ซึ่ง $\operatorname{int}(E_N) \neq \emptyset$. ดังนั้นมี $x_0 \in X$ และ $r > 0$ ซึ่ง

   $$B_r(x_0) \subset E_N.$$

   ถ้า $N = 0$ แล้ว $T_i = 0$ บนบอลนี้; เพราะ T_i เชิงเส้น, $T_i = 0$ ทุกตัว และข้อสรุปเป็นจริง. ต่อไปสมมติ $N \ge 1$.

3. **ความสมมาตรและความนูน.** เซต E_N สมมาตร: $x \in E_N$ ก็ต่อเมื่อ $-x \in E_N$, เพราะ $\|T_i(-x)\| = \|T_i x\|$. จึงได้ $B_r(-x_0) \subset E_N$ ด้วย. เซต E_N นูน: ถ้า $u, v \in E_N$ และ $0 \le \lambda \le 1$ แล้ว

   $$\|T_i(\lambda u + (1-\lambda)v)\|_Y \le \lambda\|T_i u\|_Y + (1-\lambda)\|T_i v\|_Y \le \lambda N + (1-\lambda)N = N.$$

4. **ย้ายบอลไปรอบศูนย์.** ให้ $\|u\|_X < r$. แล้ว $x_0 + u \in B_r(x_0) \subset E_N$ และ $-x_0 + u \in B_r(-x_0) \subset E_N$. โดยความนูน,

   $$u = \frac{1}{2}\big((x_0+u) + (-x_0+u)\big) \in E_N.$$

   ดังนั้น $\|T_i u\|_Y \le N$ ทุก $i \in I$ เมื่อ $\|u\|_X < r$.

5. **อ่านนอร์ม.** ให้ $x \neq 0$ และ $u = (r/2)x/\|x\|_X$. แล้ว $\|u\|_X = r/2 < r$, ดังนั้น

   $$\|T_i x\|_Y = \frac{2\|x\|_X}{r}\|T_i u\|_Y \le \frac{2N}{r}\|x\|_X.$$

   เพราะ x ใด ๆ ก็ได้, $\|T_i\| \le 2N/r$ ทุก $i \in I$. จึง $\sup_i \|T_i\| \le 2N/r < \infty$.

สรุป: เซต E_N ปิด ครอบ X และมีบอลเปิด; ความสมมาตรกับความนูนย้ายบอลนั้นไปรอบศูนย์ แล้วนอร์มทุกตัวถูกคุมด้วย $2N/r$. □

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

สมมติฐาน “$\sup_i \|T_i x\| < \infty$ สำหรับทุก x” คือขอบเขต*ทีละจุด*. ข้อสรุป “$\sup_i \|T_i\| < \infty$” คือขอบเขต*เอกรูป*: มีค่าคงตัวตัวเดียวใช้กับทุก i พร้อมกัน. หลักการนี้บอกว่าบนปริภูมิบานาค สองสิ่งนี้เท่ากัน. ถ้า X ไม่บริบูรณ์ เราจะสร้างตัวอย่างค้านได้ทันที: ใช้ปริภูมิ c_{00} ของลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด พร้อมนอร์ม ℓ^2, และให้ $T_n(x) = n x_n$. สำหรับ x แต่ละตัว มี N ซึ่ง $x_n = 0$ เมื่อ $n > N$; ดังนั้น $T_n x = 0$ สำหรับ n ใหญ่พอ และ $\sup_n |T_n x| < \infty$. แต่ $\|T_n\| = n$ เพราะ $|T_n x| = n|x_n| \le n\|x\|_2$ และ $T_n e_n = n e_n$ กับ $\|e_n\|_2 = 1$. นอร์มจึงไม่มีขอบเขต. ปริภูมิ c_{00} ไม่บริบูรณ์; นี่คือสมมติฐานที่หายไป.

บทแทรก 6.1.5: ลิมิตแบบจุดของตัวดำเนินการมีขอบเขต

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$. ถ้าสำหรับทุก $x \in X$ ลิมิต

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

มีอยู่ แล้ว $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ และ

$$\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ลำดับลู่เข้าทุกตัวมีขอบเขต; ใช้หลักการมีขอบเขตเอกรูปกับ T_n แล้วส่งลิมิตในอสมการ $\|T_n x\| \le \|T_n\|\|x\|$.

สำหรับแต่ละ x, ลำดับ $(\|T_n x\|_Y)$ ลู่เข้า จึงมีขอบเขต. โดยทฤษฎีบท 6.1.4, $C := \sup_n \|T_n\| < \infty$. ความเป็นเชิงเส้นของ T ตามมาจากลิมิตของผลบวกและสเกลาร์. และ

$$\|Tx\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_Y \le \liminf_{n\to\infty} \big(\|T_n\|\|x\|_X\big) = \Big(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\Big)\|x\|_X.$$

เพราะฉะนั้น T มีขอบเขตและได้อสมการที่ต้องการ.

สรุป: ขอบเขตทีละจุดของลำดับที่ลู่เข้าทุกจุดให้ขอบเขตเอกรูปของนอร์ม; ลิมิตจึงเป็นตัวดำเนินการมีขอบเขต. □

ข้อควรระวัง: การลู่เข้าแบบจุดไม่ใช่การลู่เข้าในนอร์ม

ให้ P_n เป็น**การฉาย** (projection) บน ℓ^2 (การส่งเชิงเส้นที่มี $P_n^2 = P_n$) ที่เก็บพิกัดแรกถึง n และตัดที่เหลือ:

$$P_n(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots).$$

สำหรับทุก $x \in \ell^2$, $\|P_n x - x\|_2 \to 0$ เพราะหางของอนุกรมกำลังสองลู่เข้าศูนย์. แต่ $\|P_n - I\| = 1$ ทุก n: ใช้เวกเตอร์ e_{n+1} ซึ่ง $(P_n - I)e_{n+1} = -e_{n+1}$ และ $\|e_{n+1}\|_2 = 1$. ดังนั้น $P_n \to I$ แบบจุด แต่ไม่ลู่เข้าในนอร์มของตัวดำเนินการ. ตัวอย่างตัวเลข: สำหรับ $x = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \dots)$ หางหลัง $n = 5$ มีขนาดกำลังสอง

$$\sum_{k=6}^{\infty} 4^{-(k-1)} = \frac{4}{3}\cdot 4^{-5} = \frac{1}{768} \approx 0.00130208.$$

ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุปใจความ

- เซตทุกที่ไม่หนาแน่นคือเซตที่ส่วนปิดไม่มีบอลเปิด; เซตหมวดหมู่ที่หนึ่งคือการรวมกันนับได้ของเซตเช่นนั้น.
- ทฤษฎีบทของแบร์: ในปริภูมิบริบูรณ์ที่ไม่ว่าง การรวมกันนับได้ของเซตปิดที่มีภายในว่างเป็นไปไม่ได้; ส่วนร่วมของเซตเปิดหนาแน่นยังหนาแน่น.
- ปริภูมิบริบูรณ์ที่ไม่ว่างเป็นหมวดหมู่ที่สองในตัวเอง; ส่วนเติมเต็มของเซตหมวดหมู่ที่หนึ่งหนาแน่น.
- หลักการมีขอบเขตเอกรูป: ขอบเขตทีละจุดของตระกูลตัวดำเนินการบนปริภูมิบานาคให้ขอบเขตเอกรูปของนอร์ม.
- ความบริบูรณ์ของโดเมนจำเป็น: $T_n(x) = nx_n$ บน c_{00} มีขอบเขตทีละจุด แต่นอร์ม $\|T_n\| = n$ ไม่มีขอบเขต.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงแสดงว่า $\mathbb{Q}$ เป็นเซตหมวดหมู่ที่หนึ่งใน $\mathbb{R}$ แต่ไม่ใช่เซตทุกที่ไม่หนาแน่นใน $\mathbb{R}$. อธิบายว่าทำไมข้อความทั้งสองจึงไม่ขัดกัน.

2. จงใช้ทฤษฎีบทของแบร์พิสูจน์ว่า $\mathbb{R}$ นับไม่ได้. (แนวทาง: ถ้า $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$ แล้ว $\mathbb{R} = \bigcup_n \{x_n\}$.)

3. ให้ c_{00} เป็นปริภูมิของลำดับที่มีพจน์ไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด พร้อมนอร์ม ℓ^2 และ $T_n(x) = nx_n$. จงแสดงว่า T_n มีขอบเขต, ตระกูล (T_n) มีขอบเขตทีละจุด, แต่ $\sup_n \|T_n\| = \infty$. อธิบายว่าทำไมนี่ไม่ขัดกับหลักการมีขอบเขตเอกรูป.

4. ให้ P_n เป็นการฉายบน ℓ^2 ที่เก็บพิกัดแรกถึง n ดังในข้อควรระวัง. จงแสดงว่า $P_n \to I$ แบบจุด แต่ $\|P_n - I\| = 1$ ทุก n. สำหรับ $x = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \dots)$ จงคำนวณ $\|P_5 x - x\|_2^2$ และตรวจว่าตรงกับ $1/768$.

5. ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่ไม่ว่าง และ O_n เป็นเซตเปิดหนาแน่น. จงแสดงว่า $\bigcap_n O_n$ หนาแน่น และส่วนเติมเต็มของมันเป็นเซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง.

6. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน:

   (ก) เซตทุกที่ไม่หนาแน่นต้องมีภายในว่าง;

   (ข) เซตที่มีภายในว่างต้องทุกที่ไม่หนาแน่น;

   (ค) เซตหมวดหมู่ที่หนึ่งอาจหนาแน่นได้;

   (ง) ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่ไม่ว่างทุกปริภูมิเป็นหมวดหมู่ที่สองในตัวเอง.

7. ใช้ ฟังก์ชัน `uniform_boundedness_counterexample` และ `pointwise_projection_error` ใน `code/funkana/ch06.py` ที่ $n = 5$. จงตรวจว่า $\|T_5\| = 5$ และ $\|P_5 x - x\|_2^2 = 1/768$ แล้วอธิบายว่าตัวเลขแต่ละตัวมาจากสมการใดในบท.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. เขียน $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. แต่ละ $\{q_k\}$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ เพราะจุดเดียวปิด และมีภายในว่าง เพราะทุกช่วงรอบ q_k มีจำนวนอตรรกยะ. ดังนั้น $\mathbb{Q} = \bigcup_k \{q_k\}$ เป็นหมวดหมู่ที่หนึ่ง. แต่ $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ และ $\operatorname{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \neq \emptyset$; ดังนั้น $\mathbb{Q}$ ไม่ใช่ทุกที่ไม่หนาแน่น. ข้อความทั้งสองไม่ขัดกันเพราะ “หมวดหมู่ที่หนึ่ง” ใช้เซตทุกที่ไม่หนาแน่นเป็นส่วนประกอบ แต่ตัวเซตที่รวมกันไม่จำเป็นต้องทุกที่ไม่หนาแน่นเอง.

2. สมมติ $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots\}$. แต่ละ $\{x_n\}$ เป็นเซตปิดและมีภายในว่าง. แล้ว $\mathbb{R} = \bigcup_n \{x_n\}$ เป็นการรวมกันนับได้ของเซตปิดที่มีภายในว่าง ซึ่งขัดกับทฤษฎีบทของแบร์. ดังนั้น $\mathbb{R}$ นับไม่ได้.

3. $|T_n(x)| = n|x_n| \le n\|x\|_2$, ดังนั้น $\|T_n\| \le n$. ใช้ e_n ได้ $T_n e_n = n e_n$ และ $\|e_n\|_2 = 1$, ดังนั้น $\|T_n\| = n$. สำหรับ $x \in c_{00}$ มี N ซึ่ง $x_n = 0$ ทุก $n > N$; จึง $T_n x = 0$ สำหรับ $n > N$ และ $\sup_n |T_n x| < \infty$. แต่ $\sup_n \|T_n\| = \infty$. หลักการมีขอบเขตเอกรูปต้องให้ X บริบูรณ์; c_{00} ไม่บริบูรณ์ (ตัวอย่างลำดับ $x^{(m)} = (1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{m}, 0, \dots) \in c_{00}$ เป็นโคชีแต่ลิมิต $(1, \tfrac{1}{2}, \dots) \notin c_{00}$). ดังนั้นสมมติฐานที่หายไปคือความบริบูรณ์ของ X.

4. สำหรับ $x \in \ell^2$, $\|P_n x - x\|_2^2 = \sum_{k>n} |x_k|^2 \to 0$. แต่ $(P_n - I)e_{n+1} = -e_{n+1}$ และ $\|e_{n+1}\|_2 = 1$, ดังนั้น $\|P_n - I\| \ge 1$; ตรวจตรง ๆ: สำหรับ x ใด ๆ, $(P_n - I)x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ จึง $\|(P_n - I)x\|_2 \le \|x\|_2$; ดังนั้น $\|P_n - I\| \le 1$ และรวมกับ ≥ 1 ได้ $= 1$. สำหรับ $x = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \dots)$, $x_k = 2^{-(k-1)}$ และ

$$\|P_5 x - x\|_2^2 = \sum_{k=6}^{\infty} 4^{-(k-1)} = \frac{4^{-5}}{1 - 1/4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1024} = \frac{1}{768} \approx 0.00130208.$$

5. ให้ $D = \bigcap_n O_n$. ส่วนเติมเต็มคือ $X \setminus D = \bigcup_n (X \setminus O_n)$. แต่ละ $X \setminus O_n$ ปิดและมีภายในว่าง: ถ้ามีบอลเปิด $B \subset X \setminus O_n$ แล้ว $B \cap O_n = \emptyset$, ขัดกับความหนาแน่นของ O_n. ดังนั้น $X \setminus D$ เป็นการรวมกันนับได้ของเซตปิดที่มีภายในว่าง; เป็นเซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง. ตามทฤษฎีบทของแบร์ข้อ (i), D หนาแน่น; โดยเฉพาะ $D \neq \varnothing$ เพราะ $X \neq \varnothing$.

6. (ก) จริง: ถ้า M ทุกที่ไม่หนาแน่น แล้ว $\operatorname{int}(\overline{M}) = \emptyset$; เพราะ $M \subset \overline{M}$, $\operatorname{int} M \subset \operatorname{int}(\overline{M}) = \emptyset$. (ข) เท็จ: $\mathbb{Q}$ มีภายในว่างแต่ไม่ทุกที่ไม่หนาแน่น. (ค) จริง: $\mathbb{Q}$ เป็นหมวดหมู่ที่หนึ่งและหนาแน่นใน $\mathbb{R}$. (ง) จริง: บทแทรก 6.1.2.

7. โค้ดให้ `norm=5`, `value_on_e_n=5`, `e_n_norm=1`; และ `tail_squared=1/768`. สมการที่ใช้คือ $\|T_n\| = n$ จาก $T_n e_n = n e_n$ และหางเรขาคณิต $\sum_{k=6}^{\infty} 4^{-(k-1)} = 4^{-5}/(1 - 1/4) = 1/768$. แบบทดสอบยืนยันค่าทั้งสอง.

อ่านต่อ

ตัวอย่างสองข้อท้ายชี้จุดต่างกัน: ข้อ 3 แสดงว่าความบริบูรณ์ของโดเมนจำเป็นต่อหลักการมีขอบเขตเอกรูป, ส่วนข้อ 4 แยกการลู่เข้าแบบจุดออกจากการลู่เข้าในนอร์ม. §6.2 จะใช้ความบริบูรณ์ของปริภูมิตั้งต้นและปลายทางเพื่อพิสูจน์การส่งเปิดและทฤษฎีบทกราฟปิด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6.2 การส่งเปิด ตัวผกผันมีขอบเขต และกราฟปิด

ภาพรวมก่อนอ่าน

ใน §6.1 เราเห็นว่าความบริบูรณ์บังคับให้เซตที่ครอบปริภูมิต้องมี “ที่หนา” อยู่ที่หนึ่ง. ในหัวข้อนี้เราใช้ความคิดเดียวกันกับ*ภาพ*ของตัวดำเนินการ. ถ้า $T : X \to Y$ ทั่วถึง ปริภูมิ Y ถูกครอบด้วยภาพของบอลที่ขยายขึ้นเรื่อย ๆ. ความบริบูรณ์ของ Y บอกว่าภาพของบอลขนาดหนึ่งต้องมีบอลเปิดอยู่ข้างใน. จากนั้นความบริบูรณ์ของ X ช่วย “เก็บเศษ” ที่เหลือได้ทีละครึ่ง ทำให้ได้บอลเปิดจริง ๆ ในภาพ ไม่ใช่เพียงในส่วนปิด.

ผลที่ได้คือทฤษฎีบทการส่งเปิด: ตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่องที่ทั่วถึงระหว่างปริภูมิบานาคส่งเซตเปิดเป็นเซตเปิด. ผลตามมาที่ใช้บ่อยที่สุดคือ: ถ้า T เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ตัวผกผัน T^{-1} ต่อเนื่องโดยอัตโนมัติ. นี่คือเหตุผลว่าทำไมในปริภูมิบานาค เราไม่ต้องตรวจความต่อเนื่องของตัวผกผันแยกอีกครั้ง.

ส่วนที่สองของหัวข้อนี้คือกราฟ. กราฟของ T คือเซตของคู่ (x, Tx). การที่กราฟเป็นเซตปิดหมายความว่า: ถ้า $x_n \to x$ และ $Tx_n \to y$ แล้วต้องได้ $y = Tx$. ถ้า T นิยามบน X ทั้งปริภูมิและ X, Y เป็นปริภูมิบานาค ทฤษฎีบทกราฟปิดบอกว่าเงื่อนไขนี้เพียงพอสำหรับความต่อเนื่อง. ภาพที่ต้องจำคือ: กราฟปิดคือ “กราฟที่ไม่ฉีก” และความบริบูรณ์ทำให้กราฟที่ไม่ฉีกต้องมาจากตัวดำเนินการต่อเนื่อง.

นิยาม 6.2.1: การส่งเปิด

ให้ X, Y เป็นปริภูมิอิงระยะทาง. เราเรียก $f : X \to Y$ ว่า**การส่งเปิด** (open map) ถ้าสำหรับทุกเซตเปิด $U \subset X$ ภาพ $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน Y.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ความต่อเนื่องพูดถึง*ภาพผกผัน*: f ต่อเนื่องเมื่อ $f^{-1}(V)$ เปิดทุก V เปิด. การส่งเปิดพูดถึง*ภาพตรง*: $f(U)$ เปิดทุก U เปิด. ทั้งสองเป็นคนละทิศ จึงไม่ใช่คำเดียวกัน. ถ้า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง, f เปิดก็ต่อเมื่อ f^{-1} ต่อเนื่อง. นี่คือเหตุผลที่การส่งเปิดใช้ศึกษาตัวผกผัน.

ตัวอย่างง่าย: การฉาย $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(s, t) = s$ เป็นการส่งเปิด เพราะภาพของบอลเปิดคือช่วงเปิด. แต่ไม่ส่งเซตปิดเป็นเซตปิดเสมอ: เซต $\{(s, t) : s \geq 0,\ st \geq 1\}$ ปิด แต่ภาพคือ $(0, \infty)$ ซึ่งไม่ปิด. ดังนั้น “เปิด” ไม่ได้หมายถึง “ส่งเซตปิดเป็นเซตปิด”.

บทตั้ง 6.2.1: เกณฑ์บอลสำหรับการส่งเปิด

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม และ $T : X \to Y$ เชิงเส้น. ข้อความต่อไปนี้สมมูล:

(i) T เป็นการส่งเปิด;

(ii) สำหรับทุก $r > 0$ มี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $B_\varepsilon(0) \subset T(B_r(0))$;

(iii) มี $\delta > 0$ ซึ่ง $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** นัย (i)⇒(ii) ใช้ภาพของบอลเปิดซึ่งเป็นเซตเปิดที่บรรจุ 0; ข้อ (ii)⇒(i) เลื่อนบอลเล็ก ๆ ไปรอบจุด Tx; ข้อ (ii) กับ (iii) ต่างกันเพียงการย่อขยาย.

1. **(i) ⇒ (ii).** บอล $B_r(0)$ เปิด ดังนั้น $T(B_r(0))$ เปิด. และ $0 = T0 \in T(B_r(0))$. จึงมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $B_\varepsilon(0) \subset T(B_r(0))$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2. **(ii) $\Rightarrow$ (i).** ให้ $U \subset X$ เปิด และ $x \in U$. เลือก $r > 0$ ซึ่ง $B_r(x) \subset U$. ตาม (ii) มี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $B_\varepsilon(0) \subset T(B_r(0))$. แล้ว

$$Tx + B_\varepsilon(0) \subset Tx + T(B_r(0)) = T(x + B_r(0)) \subset T(U).$$

ดังนั้นทุกจุด $Tx \in T(U)$ มีบอลเปิดรอบตัวอยู่ใน $T(U)$; จึง $T(U)$ เปิด.

3. **(ii) $\Leftrightarrow$ (iii).** ถ้า (iii) จริง แล้วสำหรับ $r > 0$,

$$B_{\delta r}(0) = rB_\delta(0) \subset rT(B_1(0)) = T(B_r(0)).$$

จึงได้ (ii) ด้วย $\varepsilon = \delta r$. การกลับกันใช้ $r = 1$.

สรุป: การส่งเปิดของตัวดำเนินการเชิงเส้นถูกตรวจได้ที่บอลรอบศูนย์เพียงลูกเดียว; การย่อขยายทำที่เหลือ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ถ้า T เป็นการส่งเปิดและ $X \neq \{0\}$ แล้ว T ทั่วถึง. เหตุผล: $T(X)$ เป็นปริภูมิย่อยเปิดของ Y. ปริภูมิย่อยเปิดใด ๆ ที่ไม่ใช่ $\{0\}$ ต้องมีบอลเปิดรอบ 0 (เพราะมีบอลรอบจุดหนึ่ง แล้วลบจุดนั้นด้วยความเป็นเชิงเส้น) และเมื่อมีบอลรอบ 0 ก็คูณขยายได้ทั้งปริภูมิ. ดังนั้น $T(X) = Y$. ในการใช้ทฤษฎีบทการส่งเปิด เราจึงมักตรวจ “ทั่วถึง” ก่อน แล้วได้ “เปิด” กลับมา.

ทฤษฎีบท 6.2.2: ทฤษฎีบทการส่งเปิด

ให้ X, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ เป็นการส่งทั่วถึง. แล้ว T เป็นการส่งเปิด.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้แบร์กับ $Y = \bigcup_n T(B_n(0))$ เพื่อให้ได้บอลเปิดในส่วนปิดของ $T(B_1(0))$. จากนั้นใช้ความบริบูรณ์ของ X เก็บเศษที่เหลือทีละครึ่ง เพื่อเปลี่ยน “ส่วนปิด” เป็น “ภาพจริง”.

1. **ขั้นที่หนึ่ง: บอลเปิดในส่วนปิด.** เพราะ T ทั่วถึง,

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T(B_n(0)).$$

ดังนั้น

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B_n(0))}.$$

แต่ละ $\overline{T(B_n(0))}$ เป็นเซตปิด. ตามทฤษฎีบทของแบร์ (ข้อ (ii)) มี $N \in \mathbb{N}$, $y_0 \in Y$ และ $r > 0$ ซึ่ง

$$B_r(y_0) \subset \overline{T(B_N(0))}.$$

เซต $T(B_N(0))$ สมมาตร เพราะ $B_N(0)$ สมมาตรและ T เชิงเส้น; ส่วนปิดของมันจึงสมมาตรด้วย. จึงได้ $B_r(-y_0) \subset \overline{T(B_N(0))}$. เซต $T(B_N(0))$ นูน เพราะ $B_N(0)$ นูน; ส่วนปิดของมันจึงนูน. สำหรับ $\|y\| < r$,

$$y = \frac{1}{2}\big((y_0 + y) + (-y_0 + y)\big) \in \overline{T(B_N(0))}.$$

ดังนั้น $B_r(0) \subset \overline{T(B_N(0))}$. เมื่อย่อขนาดด้วย $1/N$ ได้

$$B_{r/N}(0) \subset \overline{T(B_1(0))}.$$

ตั้ง $\varepsilon := r/N > 0$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2. **ขั้นที่สอง: เก็บเศษทีละครึ่ง.** เราจะแสดง

$$B_{\varepsilon/2}(0) \subset T(B_1(0)).$$

ให้ $\|y\| < \varepsilon/2$. เพราะ $B_\varepsilon(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$, เมื่อย่อขนาดด้วย $1/2$ ได้ $B_{\varepsilon/2}(0) \subset \overline{T(B_{1/2}(0))}$. เลือก $x_1 \in B_{1/2}(0)$ ซึ่ง

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

ตั้ง $y_1 := y - Tx_1$. โดยทั่วไป เมื่อได้ $x_1, \dots, x_m$ และ $y_m := y - \sum_{k=1}^{m} Tx_k$ ซึ่ง $\|y_m\| < \varepsilon/2^{m+1}$, ใช้การย่อขนาดของ $B_\varepsilon(0) \subset \overline{T(B_1(0))}$ ด้วย $1/2^{m+1}$ ได้

$$B_{\varepsilon/2^{m+1}}(0) \subset \overline{T(B_{1/2^{m+1}}(0))}.$$

เลือก $x_{m+1} \in B_{1/2^{m+1}}(0)$ ซึ่ง

$$\|y_m - Tx_{m+1}\| < \frac{\varepsilon}{2^{m+2}}.$$

3. **อนุกรมลู่เข้า.** เราได้

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1.$$

เพราะ X บริบูรณ์, อนุกรม $\sum_m x_m$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์; ตั้ง $x := \sum_{m=1}^{\infty} x_m$. แล้ว $\|x\| \le \sum_m \|x_m\| < 1$, ดังนั้น $x \in B_1(0)$.

4. **ภาพคือ y.** เพราะ T ต่อเนื่อง,

$$Tx = \lim_{m\to\infty} T\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k\Big) = \lim_{m\to\infty} (y - y_m) = y,$$

เพราะ $\|y_m\| < \varepsilon/2^{m+1} \to 0$. จึง $y \in T(B_1(0))$. เราได้ $B_{\varepsilon/2}(0) \subset T(B_1(0))$. ตามบทตั้ง 6.2.1, T เป็นการส่งเปิด.

สรุป: แบร์ให้บอลเปิดในส่วนปิดของภาพ; ความบริบูรณ์ของ X ให้เก็บเศษทีละครึ่งจนได้จุดจริงใน $T(B_1(0))$; เกณฑ์บอลจึงให้การส่งเปิด. □

บทแทรก 6.2.3: ตัวผกผันของการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงมีขอบเขต

ให้ X, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง. แล้ว $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** T เปิดตามทฤษฎีบทการส่งเปิด; เพราะ T ผกผันได้ ภาพผกผันของ T^{-1} คือภาพตรงของ T ดังนั้น T^{-1} จึงต่อเนื่อง.

T^{-1} เป็นเชิงเส้นเพราะ T เชิงเส้น. ตามทฤษฎีบท 6.2.2, T เป็นการส่งเปิด. สำหรับการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง, การส่งเปิดสมมูลกับ T^{-1} ต่อเนื่อง. ดังนั้น $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

สรุป: บนปริภูมิบานาค ตัวผกผันของการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงมีขอบเขตโดยอัตโนมัติ. □

ผลที่ได้ยังบอกว่า ถ้านอร์มสองตัวทำให้ปริภูมิเดียวกันบริบูรณ์ทั้งคู่ การเทียบกันได้ข้างเดียวก็เพียงพอ; ตัวอย่างถัดไปแสดงว่าความบริบูรณ์ของปลายทางจำเป็นต่อข้อสรุปเรื่องตัวผกผันมีขอบเขต.

ภัทรพงษ์ · Preprint · 2026-10-24

บทแทรก 6.2.4: นอร์มที่ทำให้บริบูรณ์และเทียบกันได้เป็นนอร์มสมมูล

ให้ $\|\cdot\|$ และ $\|\cdot\|_*$ เป็นสองนอร์มบนปริภูมิเวกเตอร์ X ซึ่งทำให้ X บริบูรณ์ทั้งสองแบบ. ถ้ามี $M > 0$ ซึ่ง

$$\|x\| \le M\|x\|_* \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X,$$

แล้วมี $C > 0$ ซึ่ง $\|x\|_* \le C\|x\|$ ทุก x; นอร์มทั้งสองสมมูลกัน.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ระหว่างสองนอร์มบน X; ตัวมันเองมีขอบเขต ผกผันได้ และปริภูมิทั้งสองบริบูรณ์.

ให้ $T : (X, \|\cdot\|_*) \to (X, \|\cdot\|)$, $Tx = x$. สมมติฐานบอกว่า T มีขอบเขต. T ผกผันได้เพราะเป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์. ตามบทแทรก 6.2.3, T^{-1} มีขอบเขต; นั่นคือมี $C > 0$ ซึ่ง $\|x\|_* \le C\|x\|$.

สรุป: ถ้านอร์มหนึ่งถูกคุมด้วยอีกนอร์มหนึ่ง และทั้งคู่ทำให้ปริภูมิบริบูรณ์ อสมการกลับกันได้ฟรี. □

ข้อควรระวัง: ความบริบูรณ์ของปลายทางจำเป็น

ให้ $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ และ $Y = (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ และ $T = \mathrm{Id}$. แล้ว T เป็นการส่งเชิงเส้นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง และ

$$\|Tf\|_1 = \|f\|_1 \le \|f\|_\infty,$$

ดังนั้น T มีขอบเขต. แต่ T^{-1} ไม่มีขอบเขต: สำหรับ $f_n(t) = t^n$,

$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

ถ้า T^{-1} มีขอบเขตด้วยค่าคงตัว C จะได้ $1 \le C/(n+1)$ ทุก n, ซึ่งเป็นไปไม่ได้. สำหรับ $n = 10$ ค่า $\|f_{10}\|_1 = 1/11 \approx 0.0909091$. ปริภูมิ Y ไม่บริบูรณ์ (การทำให้บริบูรณ์คือ $L^1[0,1]$, บทปริภูมิของฟังก์ชัน); นี่คือสมมติฐานที่หายไป.

นิยาม 6.2.2: กราฟและตัวดำเนินการปิด

ให้ X, Y เป็นปริภูมินอร์ม, $D \subset X$ เป็นปริภูมิย่อย และ $T : D \to Y$ เชิงเส้น. **กราฟ** (graph) ของ T คือ

$$\mathrm{gr}(T) := \{(x, Tx) : x \in D\} \subset X \times Y.$$

เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการปิด** (closed operator) ถ้า $\mathrm{gr}(T)$ เป็นเซตปิดใน $X \times Y$ พร้อมนอร์ม $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$. เราเขียน $X \oplus_1 Y$ แทน $X \times Y$ พร้อมนอร์มนี้.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

กราฟปิดหมายความว่า: ถ้าเรามีลำดับ $x_n \in D$ ซึ่ง $x_n \to x$ และ $Tx_n \to y$ พร้อมกัน แล้ว x ต้องอยู่ใน D และ $y = Tx$. พูดอีกแบบ: กราฟไม่มี “จุดลิมิตที่หลุดออกไป”. ตัวดำเนินการต่อเนื่องทุกตัวมีกราฟปิด (เพราะส่งลิมิต), แต่ตัวดำเนินการที่มีกราฟปิดไม่จำเป็นต้องต่อเนื่อง ถ้าโดเมนไม่บริบูรณ์หรือไม่ใช่ทั้งปริภูมิ. ทฤษฎีบทกราฟปิดจะบอกว่าเมื่อโดเมนเป็นปริภูมิบานาคทั้งก้อน ภาวะทั้งสองกลับเท่ากัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 6.2.5: กราฟเป็นปริภูมิย่อยและการปิด

ให้ X, Y, D, T ดังในนิยาม 6.2.2. แล้ว

(a) $\mathrm{gr}(T)$ เป็นปริภูมิย่อยของ $X \times Y$;

(b) T เป็นตัวดำเนินการปิด ก็ต่อเมื่อ $\mathrm{gr}(T)$ ปิดใน $X \oplus_1 Y$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ความเป็นเชิงเส้นของกราฟตามมาจากความเป็นเชิงเส้นของ T; ส่วน (b) เป็นเพียงการเขียนนิยามการปิดในหน่วยความจำของนอร์มผลบวก.

1. **(a)** ให้ $(x, Tx), (x', Tx') \in \mathrm{gr}(T)$ และ $\lambda \in \mathbb{K}$. แล้ว
$$(x, Tx) + \lambda(x', Tx') = (x + \lambda x', Tx + \lambda Tx') = (x + \lambda x', T(x + \lambda x')) \in \mathrm{gr}(T).$$
จึงเป็นปริภูมิย่อย.

2. **(b)** นอร์ม $\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|$ ให้การลู่เข้าทีละพิกัด: $(x_n, y_n) \to (x, y)$ ก็ต่อเมื่อ $x_n \to x$ และ $y_n \to y$. ดังนั้นกราฟปิดก็ต่อเมื่อ $x_n \to x$, $Tx_n \to y$ และ $(x_n, Tx_n) \in \mathrm{gr}(T)$ ทุก n บังคับ $x \in D$ และ $y = Tx$. นี่คือนิยามของตัวดำเนินการปิด.

สรุป: กราฟเป็นปริภูมิย่อยเสมอ; "ปิด" หมายถึงปิดในนอร์มผลบวกของคู่. □

ทฤษฎีบท 6.2.6: ทฤษฎีบทกราฟปิด

ให้ X, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $T : X \to Y$ เชิงเส้น ซึ่งนิยามบน X ทั้งหมด. แล้ว
$$\mathrm{gr}(T) \text{ ปิดใน } X \times Y \iff T \in \mathcal{L}(X, Y).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขาไป: กราฟปิดเป็นปริภูมิบานาค; การฉายไปที่พิกัดแรกเป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง มีขอบเขต จึงมีตัวผกผันมีขอบเขต; ประกอบกับการฉายที่สองได้ T. ขากลับ: ตัวดำเนินการต่อเนื่องส่งลำดับลู่เข้าไปลำดับลู่เข้า.

1. **ขาไป.** สมมติ $\mathrm{gr}(T)$ ปิดใน $X \times Y$. เพราะ X, Y บริบูรณ์, $X \oplus_1 Y$ บริบูรณ์ (ผลคูณของปริภูมิบานาคพร้อมนอร์มผลบวกเป็นบานาค; บทปริภูมิของฟังก์ชัน). เมื่อ $Z := \mathrm{gr}(T)$ ปิดอยู่ใน $X \oplus_1 Y$ และนอร์มที่สืบทอดมาทำให้มันบริบูรณ์, Z จึงเป็นปริภูมิบานาค. ให้
$$P_X : Z \to X, \quad P_X(x, Tx) = x, \qquad P_Y : Z \to Y, \quad P_Y(x, Tx) = Tx.$$
ทั้งสองเป็นเชิงเส้นและมีขอบเขต เพราะ
$$\|P_X(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \le \|(x, Tx)\|_1, \qquad \|P_Y(x, Tx)\|_Y \le \|(x, Tx)\|_1.$$
P_X เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง: ทุก $x \in X$ มีคู่ $(x, Tx) \in Z$, และถ้า $P_X(x, Tx) = 0$ แล้ว $x = 0$, จึง $(x, Tx) = (0, 0)$. ตามบทแทรก 6.2.3, $P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, Z)$. ดังนั้น
$$T = P_Y \circ P_X^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y).$$

2. **ขากลับ.** สมมติ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. ให้ $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ ใน $X \times Y$. แล้ว $x_n \to x$ และเพราะ T ต่อเนื่อง, $Tx_n \to Tx$. แต่ $Tx_n \to y$; ความเป็นเอกลักษณ์ของลิมิตให้ $y = Tx$. ดังนั้น $(x, y) \in \mathrm{gr}(T)$; กราฟปิด.

สรุป: กราฟปิดบังคับให้การฉายจากกราฟไปยัง X เป็นสมสัณฐาน; ประกอบกับการฉายที่สองจึงได้ T ต่อเนื่อง. □

สำนักงาน Preprint 2026-10-24

ข้อควรระวัง: โดเมนต้องเป็นทั้งปริภูมิบานาค

ให้ $D = C^1[0,1] \subset C[0,1]$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม และ $T : D \to C[0,1]$, $Tf = f'$. กราฟของ T เป็นเซตปิด: ถ้า $f_n \to f$ เอกรูปและ $f_n' \to g$ เอกรูป แล้วสำหรับทุก t,

$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(s)\,ds.$$

ส่งลิมิตเข้าไปได้ (ทั้งสองข้างลู่เข้าเอกรูป) จึง

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)\,ds.$$

ตามทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส, $f \in C^1[0,1]$ และ $f' = g$. ดังนั้นกราฟปิด. แต่ T ไม่มีขอบเขต: สำหรับ $p_n(t) = t^n$,

$$\|p_n\|_\infty = 1, \qquad \|p_n'\|_\infty = n.$$

สำหรับ $n = 7$ ได้ $\|p_7'\|_\infty = 7$. โดเมน D ไม่บริบูรณ์ในนอร์มซูพรีมัม และไม่ใช่ X ทั้งก้อน; ทฤษฎีบทกราฟปิดจึงใช้ไม่ได้. นี่แสดงว่า “กราฟปิด” ไม่ได้แปลว่า “ต่อเนื่อง” หากขาดสมมติฐานว่าโดเมนเป็นปริภูมิบานาคทั้งปริภูมิ.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทฤษฎีบทพิสัยปิด

สำหรับ X, Y บานาค และ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ทฤษฎีบทพิสัยปิด (Werner 2007, ทฤษฎีบท IV.5.1, หน้า 159) กล่าวว่า $\operatorname{ran} T$ ปิด ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{ran} T = (\ker T')_\perp$ ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{ran} T'$ ปิด. เราไม่ใช้ผลนี้ในบทนี้; การพิสูจน์ต้องใช้ฮาห์น–บานาคจากบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค. เราเก็บไว้เป็นสะพานไปบทตัวดำเนินการกระชับ เฟรดโฮล์ม และการคลายเบลอ.

สรุปใจความ

- การส่งเปิดคือการส่งที่ภาพของเซตเปิดทุกเซตเป็นเซตเปิด; สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้น ตรวจได้ที่บอลรอบศูนย์ลูกเดียว.
- ทฤษฎีบทการส่งเปิด: ตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่องที่ทั่วถึงระหว่างปริภูมิบานาคเป็นการส่งเปิด.
- ตัวผกผันของการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงระหว่างปริภูมิบานาคต่อเนื่องโดยอัตโนมัติ; นอร์มที่ทำให้บริบูรณ์และเทียบกันได้เป็นนอร์มสมมูล.
- กราฟปิดหมายถึง $x_n \to x$ และ $Tx_n \to y$ บังคับ $y = Tx$; บนปริภูมิบานาคและโดเมนทั้งก้อน ภาวะนี้เท่ากับความต่อเนื่อง.
- ตัวอย่าง $C \to L^1$ แสดงว่าปลายทางไม่บริบูรณ์อาจทำให้ตัวผกผันไม่มีขอบเขต; ตัวอย่างอนุพันธ์บน C^1 แสดงว่าทฤษฎีบทกราฟปิดต้องมีโดเมนทั้งปริภูมิและปริภูมิต้นทางกับปลายทางเป็นบานาค.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงพิสูจน์เกณฑ์บอลในบทตั้ง 6.2.1: สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้น $T : X \to Y$ ระหว่างปริภูมินอร์ม, T เป็นการส่งเปิดก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ซึ่ง $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$.

2. ให้ $T = \mathrm{Id} : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_1)$. จงแสดงว่า T มีขอบเขตและเป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง, แต่ T^{-1} ไม่มีขอบเขต. ใช้ $f_n(t) = t^n$ และคำนวณ $\|f_{10}\|_1$.

3. ให้ $D = C^1[0,1] \subset C[0,1]$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม และ $Tf = f'$. จงแสดงว่ากราฟของ T ปิด แต่ T ไม่มีขอบเขต. ใช้ $p_n(t) = t^n$ และรายงาน $\|p_7'\|_\infty$.

4. ให้ $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \dots)$. จงแสดงว่า T มีขอบเขตและเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่ทั่วถึง; แสดงว่าตัวผกผันบนพิสัยไม่มีขอบเขตโดยใช้ $y_n = e_n/n$ สำหรับทุก n. คำนวณ $\|Te_n\|_2$ และ $\|T^{-1}(e_n/n)\|_2$ เมื่อ $n = 10$.

5. บน $\mathbb{R}^2$ ให้ $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ และ $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. จงแสดงว่า
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$$
และค่าคงตัว $\sqrt{2}$ คม (มี $x \neq 0$ ที่ทำให้เป็นสมการ). อธิบายว่าทำไมนอร์มทั้งสองจึงสมมูลกันโดยไม่ต้องใช้ทฤษฎีบทการส่งเปิดในกรณีมิติจำกัด.

6. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน:
   (ก) ตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่องทุกตัวเป็นการส่งเปิด;
   (ข) ถ้า X, Y เป็นปริภูมิบานาค และตัวดำเนินการเชิงเส้น $T : X \to Y$ นิยามบน X ทั้งหมด มีกราฟปิด แล้ว T ต่อเนื่อง;
   (ค) ถ้าตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่องเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงระหว่างปริภูมิบานาค แล้วตัวผกผันต่อเนื่อง;
   (ง) ตัวดำเนินการที่มีขอบเขตทุกตัวมีกราฟปิด.

7. ใช้ฟังก์ชันใน `code/funkana/ch06.py`: `identity_inverse_gap(10)`, `derivative_unbounded_example(7)` และ `equivalent_norm_example()`. จงตรวจค่า $1/11$, 7 และ $\sqrt{2}$, แล้วอธิบายว่าค่าแต่ละตัวมาจากข้อใด.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ขาไป.** ถ้า T เปิด, $T(B_1(0))$ เปิดและบรรจุ 0; จึงมี $\delta > 0$ ซึ่ง $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$. **ขากลับ.** ให้ U เปิดและ $x \in U$. เลือก $r > 0$ ซึ่ง $B_r(x) \subset U$. จาก $B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ ได้ $B_{\delta r}(0) \subset T(B_r(0))$. แล้ว
$$Tx + B_{\delta r}(0) \subset Tx + T(B_r(0)) = T(x + B_r(0)) \subset T(U).$$
ทุกจุดของ $T(U)$ มีบอลเปิดรอบตัว; $T(U)$ เปิด.

ร่างต้น Preprint · 2026-10-24

2. สำหรับ $f \in C[0,1]$,
$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty.$$
ดังนั้น T มีขอบเขต. T เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เพราะเป็นตัวดำเนินการเอกลักษณ์บนเซตเดียวกัน. สำหรับ $f_n(t) = t^n$,
$$\|f_n\|_\infty = 1, \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}.$$
ถ้า T^{-1} มีขอบเขตด้วย C จะได้ $1 \le C/(n+1)$ ทุก n, ซึ่งเป็นไปไม่ได้เมื่อ $n > C$. สำหรับ $n = 10$, $\|f_{10}\|_1 = 1/11 \approx 0.0909091$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

3. ให้ $f_n \to f$ และ $f_n' \to g$ เอกรูป. สำหรับทุก t,
$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(s)\,ds.$$
เพราะ $f_n \to f$ และ $f_n' \to g$ เอกรูป, ส่งลิมิตได้:
$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)\,ds.$$
ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้และ $f' = g$; กราฟปิด. แต่ $p_n(t) = t^n$ มี $\|p_n\|_\infty = 1$ และ $\|p_n'\|_\infty = n$. สำหรับ $n = 7$, $\|p_7'\|_\infty = 7$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน. โดเมน $C^1[0,1]$ ไม่บริบูรณ์ในนอร์มซูพรีมัม; ทฤษฎีบทกราฟปิดจึงไม่ใช้.

4. สำหรับ $x \in \ell^2$,
$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2,$$
ดังนั้น $\|T\| \le 1$. ถ้า $Tx = 0$ แล้ว $x_n/n = 0$ ทุก n; จึง $x = 0$ และ T หนึ่งต่อหนึ่ง. T ไม่ทั่วถึง: ลำดับ $y = (1/n)_{n\ge1}$ อยู่ใน ℓ^2 แต่ถ้า $Tx = y$ แล้ว $x_n = n y_n = 1$ ทุก n, ซึ่งไม่ได้อยู่ใน ℓ^2. บนพิสัยให้ $y_n = e_n/n$. แล้ว $T^{-1}y_n = e_n$, ดังนั้น $\|T^{-1}y_n\|_2/\|y_n\|_2 = n$ สำหรับทุก n; อัตราส่วนนี้ไม่มีขอบเขต. เมื่อ $n = 10$, $\|Te_{10}\|_2 = 1/10$ และ $\|T^{-1}(e_{10}/10)\|_2 = 1$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

5. สำหรับ $x \in \mathbb{R}^2$,
$$\|x\|_\infty^2 = \max\{x_1^2, x_2^2\} \le x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2,$$
จึง $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$. อีกด้านหนึ่ง
$$\|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \le 2\max\{x_1^2, x_2^2\} = 2\|x\|_\infty^2,$$
จึง $\|x\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_\infty$. ใช้ $x = (1,1)$ ได้ $\|x\|_2 = \sqrt{2}$ และ $\|x\|_\infty = 1$; ค่าคงตัวจึงคม. ในมิติจำกัด นอร์มทุกตัวสมมูลกันเพราะบอลหนึ่งหน่วยกระชับ; เราไม่ต้องใช้ความบริบูรณ์หรือการส่งเปิด.

6. (ก) เท็จ: ตัวดำเนินการศูนย์ $T = 0$ บน $\mathbb{R}$ ไม่เปิด เพราะภาพของเซตเปิดคือ $\{0\}$ ซึ่งไม่เปิด. (ข) จริง: ทฤษฎีบท 6.2.6, เพราะโดเมนเป็น X ทั้งก้อนและ X, Y บานาค. (ค) จริง: บทแทรก 6.2.3. (ง) จริง: ถ้า T ต่อเนื่องและ $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ แล้ว $Tx_n \to Tx$; ความเป็นเอกลักษณ์ของลิมิตให้ $y = Tx$.

7. โค้ดให้ `l1_norm=1/11`, `dp_norm=7`, `ratio=sqrt(2)`. ค่าแรกมาจาก $\int_0^1 t^{10}dt = 1/11$; ค่าที่สองมาจาก $(t^7)' = 7t^6$ และ $\|7t^6\|_\infty = 7$; ค่าที่สามมาจาก $x = (1,1)$ ใน ℓ^2 ของ $\mathbb{R}^2$. แบบทดสอบยืนยันทั้งสามค่า.

ฉบับร่าง. Preprint 2026-10-24

อ่านต่อ

การส่งเปิดและกราฟปิดอธิบายว่าความบริบูรณ์ช่วยควบคุมตัวดำเนินการและตัวผกผันอย่างไร. §6.3 จะนำหลักการมีขอบเขตเอกรูปไปทดสอบผลบวกย่อยฟูเรียร์ แล้วเปรียบเทียบกับการเฉลี่ยแบบเฟเยร์.

6.3 การประยุกต์: อนุกรมฟูเรียร์ ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ และการฉาย

สถานการณ์สมมติ: ท่าทางตัวละครในเกม

สมมติว่าเกมแพลตฟอร์มหนึ่งวาดท่าวิ่งซ้ำเป็นคาบ และใช้ผลบวกย่อยฟูเรียร์แทนค่ามุมแขนในแต่ละเฟรม. ในแบบจำลองนี้มุมกระโดดทันทีตรงจุดวนรอบ. ทีมแอนิเมชันเพิ่มจำนวนความถี่เพื่อเก็บรายละเอียด แต่ใกล้จุดนั้นกลับเห็นริ้วเกินช่วงค่ามุมที่บันทึกไว้. ถ้าเฉลี่ยผลบวกย่อยหลายอันดับก่อนวาด ริ้วจะลดลงหรือไม่ และภาพจะเสียรายละเอียดแบบใด?
สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ; เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าเกมจริงใช้วิธีนี้. คำถามของสถานการณ์คือความสัมพันธ์ระหว่างการตัดความถี่ การแกว่งใกล้จุดกระโดด และการเฉลี่ยแบบเฟเยร์.

ภาพรวมก่อนอ่าน

ใน §6.1 เราใช้ทฤษฎีบทของแบร์พิสูจน์หลักการมีขอบเขตเอกรูป. ใน §6.2 เราใช้ความบริบูรณ์เดียวกันเพื่อได้การส่งเปิดและกราฟปิด. หัวข้อนี้ตอบคำถามจากสถานการณ์เปิดบท: ทำไมผลบวกย่อยฟูเรียร์ของสัญญาณที่มีคลิกจึงแกว่งเกินค่าจริง และทำไมค่าเฉลี่ยเฟเยร์จึงไม่แกว่ง.
เราจะทำสามอย่าง. อย่างแรก เขียนผลบวกย่อยเป็นตัวดำเนินการและวัดขนาดของมันด้วย*ค่าคงตัวเลอเบก*. อย่างที่สอง ใช้หลักการมีขอบเขตเอกรูปพิสูจน์ว่ามีฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งอนุกรมฟูเรียร์ลู่ออกที่จุดหนึ่ง. อย่างที่สาม แสดงว่าค่าเฉลี่ยเฟเยร์ลู่เข้าเอกรูปและไม่เกินค่า แล้วปิดด้วยการฉาย ซึ่งเป็นการส่งที่มีสมบัติ $P^2 = P$ และเชื่อมกับผลบวกย่อยโดยตรง.

6.3.1 ผลบวกย่อย ดีรีเคล และค่าคงตัวเลอเบก

ในบทฐานเชิงตั้งฉาก อนุกรมฟูเรียร์ และการบีบอัดเสียง เราใช้ระบบ $e_k(t) = e^{ikt}/\sqrt{2\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$ และเขียนสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ f เป็น

$$\widehat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

สำหรับ $f \in C_{2\pi}$ นิยามผลบวกย่อยอันดับ N โดย

$$(S_N f)(t) := \sum_{|k| \le N} \widehat{f}(k) e_k(t).$$

ปริภูมิ $C_{2\pi}$ คือฟังก์ชันต่อเนื่องที่เป็นคาบ 2π พร้อมนอร์มซูพรีมัม. มันเป็นปริภูมิบานาค เพราะเป็นปริภูมิย่อยปิดของ $C[-\pi, \pi]$ ซึ่งบริบูรณ์ตามบทปริภูมิของฟังก์ชัน (ทฤษฎีบทปริภูมิฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตกระชับเป็นปริภูมิบานาค). ความบริบูรณ์นี้จะถูกใช้อย่างจริงจังเมื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่ออกในหัวข้อถัดไป.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ผลบวกย่อยเก็บความถี่ตั้งแต่ $-N$ ถึง N. ที่จุดหนึ่ง ค่าที่ได้อาจขยายจากค่าของเสียงต้นฉบับ; ค่าคงตัวเลอเบกวัดการขยายสูงสุดนี้ และโตช้า ๆ แต่ไม่หยุดโต.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ข้อถัดไปเขียน $S_N f$ ใหม่ให้เห็นว่าเป็นการเฉลี่ยค่าของ f รอบจุด t ด้วยน้ำหนัก D_N. สูตรนี้ใช้คำนวณค่าคงตัวนี้ได้ และเป็นจุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์การแกว่งใกล้จุดกระโดด.

บทตั้ง 6.3.1: สูตรเคอร์เนลดีรีเคล

ให้ $D_N(s) := \sum_{|k|\le N} e^{iks}$. เรียก D_N ว่า**เคอร์เนลดีรีเคล** (Dirichlet kernel): ผลบวกของความถี่ทั้งหมดในช่วง $[-N, N]$. แล้ว

$$D_N(s) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(ks) = \frac{\sin\big((N+\tfrac{1}{2})s\big)}{\sin(s/2)} \qquad (s \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

และสำหรับ $f \in C_{2\pi}$,

$$(S_N f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) D_N(s)\, ds.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** รวมอนุกรมเรขาคณิต $e^{-iNs}, \dots, e^{iNs}$ แล้วใช้สูตรผลต่างของไซน์; จากนั้นแทนนิยามของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์และเปลี่ยนตัวแปร.

1. **ผลบวกของเลขชี้กำลัง.** สำหรับ $s \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$D_N(s) = e^{-iNs}\frac{e^{i(2N+1)s}-1}{e^{is}-1} = \frac{\sin((N+\tfrac{1}{2})s)}{\sin(s/2)}.$$

   การแยกส่วนจริงให้ $D_N(s) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(ks)$. ที่ $s = 0$ สูตรต่อเนื่องให้ $D_N(0) = 2N+1$.

2. **การแทนด้วยปริพันธ์.** แทน $\widehat{f}(k)$ แล้วใช้ $e_k(t)e^{-iks} = e^{ik(t-s)}/\sqrt{2\pi}$:

$$(S_N f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{|k|\le N} e^{ik(t-u)}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) D_N(s)\, ds.$$

   เมื่อแทน $u = t+s$, ผลรวมในอินทิกรัลเป็น $D_N(-s) = D_N(s)$ เพราะ $D_N(s) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(ks)$ เป็นฟังก์ชันคู่; การเปลี่ยนช่วงปริพันธ์ใช้ความเป็นคาบของ f และ D_N.

สรุป: เคอร์เนลดีรีเคลคือผลบวกของความถี่ทั้งหมดในช่วง $[-N, N]$; ผลบวกย่อยคือการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักค่าของ f รอบจุด t ด้วยเคอร์เนลนี้. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 6.3.1: ค่าคงตัวเลอเบก

ให้ $N \geq 0$. ค่าคงตัวเลอเบกอันดับ N คือ

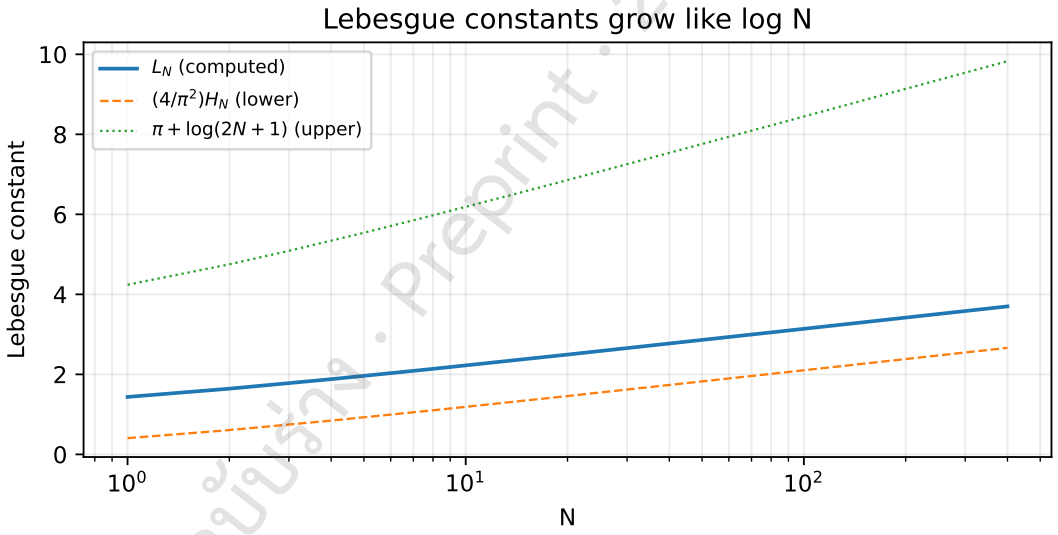
$$L_N := \big\| f \mapsto (S_N f)(0) \big\|_{C'_{2\pi}} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |(S_N f)(0)|.$$

จากสูตรเคอร์เนลดีรีเคลและความเป็นคู่ของ D_N,

$$L_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_N(s)| \, ds.$$

เพื่อให้เห็นว่าขอบเขตนี้เป็นค่านอร์มพอดี ให้ $g_\varepsilon(s) = D_N(s) / \sqrt{D_N(s)^2 + \varepsilon^2}$. ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องและ $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq 1$; เมื่อ $\varepsilon \downarrow 0$, ทฤษฎีบทลู่เข้าครอบงำให้ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_\varepsilon(s) D_N(s)\, ds \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(s)|\, ds$. จึงได้ขอบเขตล่างของนอร์มด้วยค่าปริพันธ์นี้; ขอบเขตบนตาม $|(S_N f)(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int |f(s)||D_N(s)|\, ds$.

L_N คือ “อัตราขยายที่แย่ที่สุด” ของการอ่านค่าที่จุดหนึ่งจากผลบวกย่อย: มันคือซูพรีมัมของ $|(S_N f)(0)|$ เมื่อ f วิ่งบนฟังก์ชันที่มีซูพรีมัมนอร์มไม่เกิน 1. ถ้า $L_N = 4$ แปลว่ามีสัญญาณที่ให้ค่า $|(S_N f)(0)|$ ใกล้ 4 ได้ตามต้องการ; เราไม่จำเป็นต้องมีสัญญาณที่ให้ค่าเท่ากับ 4 พอดี. ตัวเลขในรูปที่ 6.2 แสดงว่ามันโตช้าแต่ไม่หยุดโต. ในข้อถัดไปเราจะพิสูจน์ว่ามันโตอย่างน้อยเหมือน**ผลบวกฮาร์มอนิก** (harmonic sum) $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$.



รูปที่ 6.2: ค่าคงตัวเลอเบก L_N (เส้นทึบ) เทียบกับขอบเขตล่าง $(4/\pi^2)H_N$ (เส้นประ) และขอบเขตบน $\pi + \ln(2N+1)$ (เส้นจุด). แกนนอนเป็นลอการิทึม; กราฟจึงแสดงการโตแบบลอการิทึม. ตัวเลขที่ใช้: $L_1 = 1.4359911\ldots$, $L_{10} = 2.2233569\ldots$, $L_{100} = 3.1387801\ldots$, $L_{1000} = 4.0701636\ldots$ (สร้างจาก `code/funkana/ch06.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-05-24

บทตั้ง 6.3.2: ขอบเขตของค่าคงตัวเลอเบก

สำหรับ $N \geq 1$, ให้ $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$. แล้ว

$$\frac{4}{\pi^2} H_N \leq L_N \leq \pi + \ln(2N+1).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน L_N เป็นปริพันธ์ของ $|\sin(ms)|/\sin(s/2)$ โดย $m = N + \frac{1}{2}$. ขอบเขตล่างใช้ $\sin(s/2) \leq s/2$ แล้วแบ่งช่วงตามจำนวนเต็มเท่าของ π. ขอบเขตบนแยกช่วงเล็ก $[0, \pi/m]$ ออกจากช่วงที่เหลือ.

1. **ตั้งรูปปริพันธ์.** จากสูตรเคอร์เนลและความเป็นคู่,
$$L_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(ms)|}{\sin(s/2)}\, ds, \qquad m = N + \frac{1}{2}.$$

2. **ขอบเขตล่าง.** เพราะ $\sin(s/2) \leq s/2$ สำหรับ $0 \leq s \leq \pi$,
$$L_N \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(ms)|}{s}\, ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du.$$
สำหรับ $k = 1, \ldots, N$ ช่วง $[(k-1)\pi, k\pi]$ อยู่ใน $[0, m\pi]$ และบนช่วงนี้ $1/u \geq 1/(k\pi)$. เพราะ $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u|\, du = 2$,
$$L_N \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k\pi} = \frac{4}{\pi^2} H_N.$$

3. **ขอบเขตบน.** แยก $[0, \pi] = [0, \pi/m] \cup [\pi/m, \pi]$. บนช่วงแรก $|\sin(ms)| \leq ms$ และ $\sin(s/2) \geq s/\pi$; จึง
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/m} \frac{|\sin(ms)|}{\sin(s/2)}\, ds \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{m} \cdot \pi m = \pi.$$
บนช่วงที่เหลือ ใช้ $\sin(s/2) \geq s/\pi$ อีกครั้ง:
$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/m}^{\pi} \frac{|\sin(ms)|}{\sin(s/2)}\, ds \leq \int_{\pi/m}^{\pi} \frac{|\sin(ms)|}{s}\, ds = \int_{\pi}^{m\pi} \frac{|\sin u|}{u}\, du \leq \ln m.$$
ดังนั้น $L_N \leq \pi + \ln m \leq \pi + \ln(2N+1)$ เพราะ $m = N + \frac{1}{2} \leq 2N + 1$.

สรุป: ขอบเขตล่างมาจากผลบวกฮาร์มอนิก; ขอบเขตบนมาจากการแยกช่วงเล็กที่ $\sin(ms)$ ยังเล็ก. ทั้งสองข้างโตแบบลอการิทึม. □

บทแทรก 6.3.3: ค่าคงตัวเลอเบกไม่มีขอบเขต

$$L_N \to \infty \qquad (N \to \infty).$$

โดยเฉพาะ $\sup_{N \geq 0} L_N = \infty$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ขอบเขตล่างและความจริงว่าผลบวกฮาร์มอนิกมีค่าไม่จำกัด; จัดกลุ่มพจน์เพื่อเห็นการโต.

จากบทตั้ง 6.3.2, $L_N \geq \frac{4}{\pi^2} H_N$. สำหรับ H_N ให้สังเกตว่า

$$H_{2^j} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j}\right) \geq 1 + \frac{j}{2},$$

เพราะแต่ละกลุ่มมี 2^{r-1} พจน์ และแต่ละพจน์มีค่าไม่น้อยกว่า $1/2^r$. ดังนั้น $H_N \to \infty$ และ $L_N \to \infty$.

สรุป: ผลบวกฮาร์มอนิกไม่มีขอบเขต; ขอบเขตล่างจึงบังคับให้ค่าคงตัวเลอเบกไม่มีขอบเขตด้วย. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.3.4: การลู่เข้าเอกรูปของอนุกรมฟูเรียร์สำหรับ C^1

ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ เป็นคาบ 2π และหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง. แล้ว $S_N f \to f$ เอกรูปบน $\mathbb{R}$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เริ่มจากสูตรที่เขียน $S_N f - f$ เป็นปริพันธ์ของ $(f(t+s)-f(t))D_N(s)$. แบ่งช่วงเป็นสองส่วน: รอบ $s=0$ ใช้ความเรียบของ f; ส่วนที่เหลือแยกส่วนเพื่อให้ได้ตัวประกอบ $1/(N+\frac{1}{2})$.

1. **สูตรความคลาดเคลื่อน.** เพราะ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(s)\,ds = 1$,

$$(S_N f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t+s)-f(t)\big)D_N(s)\,ds.$$

   ให้ $\varepsilon>0$, $m = N+\frac{1}{2}$ และเลือก $0<\delta<\pi$ ซึ่ง $\|f'\|_\infty \delta \le \varepsilon$.

2. **ใกล้ศูนย์.** เมื่อ $|s|\le\delta$, ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัสให้ $f(t+s)-f(t) = \int_0^s f'(t+u)\,du$ (ใช้ได้กับ f ค่าเชิงซ้อน) จึง $|f(t+s)-f(t)| \le \|f'\|_\infty |s|$. นอกจากนี้ $\sin(|s|/2) \ge |s|/\pi$ ทำให้ $|D_N(s)| \le \pi/|s|$. ดังนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|s|\le\delta} |f(t+s)-f(t)|\,|D_N(s)|\,ds \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\delta\cdot\pi\|f'\|_\infty = \delta\|f'\|_\infty \le \varepsilon.$$

3. **ไกลศูนย์และการสรุป.** บน $\delta\le|s|\le\pi$ ตั้ง $g_t(s) = (f(t+s)-f(t))/\sin(s/2)$. แล้ว $(f(t+s)-f(t))D_N(s) = g_t(s)\sin(ms)$. ฟังก์ชัน g_t และ g_t' มีขอบเขตเอกรูปบนช่วงนี้ เพราะ $\sin(s/2)\ge\sin(\delta/2)>0$; การแยกส่วนให้ $\left|\int g_t(s)\sin(ms)\,ds\right| \le C/m$, โดย C ขึ้นกับ f,δ แต่ไม่ขึ้นกับ t,N. เลือก N ใหญ่พอให้ $C/(2\pi m)<\varepsilon$. รวมสองช่วงได้ $|(S_N f)(t)-f(t)|\le 2\varepsilon$ ทุก t; ดังนั้น $S_N f\to f$ เอกรูป.

สรุป: ความเรียบของ f ทำให้เทอมใกล้ศูนย์เล็ก; การแยกส่วนทำให้เทอมไกลศูนย์เล็กแบบ $1/N$. □

6.3.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องที่อนุกรมฟูเรียร์ลู่ออก

ภาพรวมก่อนอ่าน

ทฤษฎีบทก่อนหน้าบอกว่า $f\in C^1$ ให้อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้าเอกรูป. คำถามธรรมชาติคือ: ถ้า f เพียงต่อเนื่อง แต่ไม่เรียบพอ จะเกิดอะไรขึ้น. คำตอบคือ “อาจลู่ออกที่จุดหนึ่ง” และเครื่องมือที่พิสูจน์คือหลักการมีขอบเขตเอกรูปจาก §6.1. ภาพที่ต้องจำ: ถ้าผลบวกย่อยลู่เข้าทุกฟังก์ชันที่จุดหนึ่ง นอร์มของมันต้องมีขอบเขตพร้อมกัน; แต่ค่าคงตัวเลอเบกไม่มีขอบเขต.

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.3.5: อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อเนื่องอาจลู่ออกที่จุดหนึ่ง

มีฟังก์ชัน $f \in C_{2\pi}$ ซึ่งลำดับ $(S_N f)(0)$ ไม่ลู่เข้า. กล่าวอีกแบบ: อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องลู่เข้าที่ทุกจุด; มีอย่างน้อยหนึ่งจุดที่มันลู่ออก.

พิสูจน์. **แนวคิด.** สมมติว่าลู่เข้าทุกฟังก์ชันที่จุด 0. ฟังก์ชันนัล $\Lambda_N(f) = (S_N f)(0)$ มีขอบเขตทีละจุด; หลักการมีขอบเขตเอกรูปจึงให้ $\sup_N \|\Lambda_N\| < \infty$. แต่นอร์มนั้นคือ L_N ซึ่งไม่มีขอบเขต.

1. **ตั้งฟังก์ชันนัล.** สำหรับ $N \geq 0$ ให้ $\Lambda_N : C_{2\pi} \to \mathbb{C}$, $\Lambda_N(f) = (S_N f)(0)$. จากสูตรเคอร์เนล,

$$|\Lambda_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|\,|D_N(s)|\,ds \leq L_N \|f\|_\infty.$$

   ดังนั้น Λ_N เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง และ $\|\Lambda_N\| = L_N$ ตามนิยามของค่าคงตัวเลอเบก.

2. **สมมติฐานเพื่อหาข้อขัดแย้ง.** สมมติว่า $\Lambda_N(f)$ ลู่เข้าสำหรับทุก $f \in C_{2\pi}$. แล้ว $\sup_N |\Lambda_N(f)| < \infty$ ทุก f. ปริภูมิ $C_{2\pi}$ เป็นบานาค (บทปริภูมิของฟังก์ชัน), ดังนั้นทฤษฎีบท 6.1.4 ให้ $\sup_N \|\Lambda_N\| < \infty$. แต่ $\|\Lambda_N\| = L_N$ และบทแทรก 6.3.3 ให้ $L_N \to \infty$. ขัดแย้ง.

3. **ข้อสรุป.** ดังนั้นมี $f \in C_{2\pi}$ ซึ่ง $\Lambda_N(f)$ ไม่ลู่เข้า; นั่นคือ $(S_N f)(0)$ ไม่ลู่เข้า. ถ้าอนุกรมลู่เข้าทุกจุดสำหรับทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยเฉพาะมันต้องลู่เข้าที่ 0 ซึ่งขัดแย้ง. จึงมีฟังก์ชันต่อเนื่องที่อนุกรมฟูเรียร์ลู่ออกที่จุด 0 และไม่ลู่เข้าที่ทุกจุด.

สรุป: ขอบเขตทีละจุดบังคับขอบเขตเอกรูป; ค่าคงตัวเลอเบกที่โตไม่จำกัดจึงหักล้างสมมติฐานว่าลู่เข้าทุกฟังก์ชัน. ความบริบูรณ์ของ $C_{2\pi}$ คือสมมติฐานที่ทำให้ใช้แบร์ได้. □

ข้อควรระวัง: “ลู่เข้าที่จุดหนึ่ง” กับ “ลู่เข้าทุกจุด”

ทฤษฎีบทนี้ยืนยันเพียงว่ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง*อย่างน้อยหนึ่งตัว*ที่ลู่ออกอย่างน้อยหนึ่งจุด ไม่ได้บอกว่าทุกฟังก์ชันต่อเนื่องลู่ออก. สำหรับ $f \in C^1$ เราได้การลู่เข้าเอกรูปแล้ว; การเลือกจุด 0 ในบทพิสูจน์เป็นเพียงความสะดวก เพราะเคอร์เนลเลื่อนที่ได้.

6.3.3 ค่าเฉลี่ยเฟเยร์และการแกว่งใกล้จุดกระโดด

ภาพรวมก่อนอ่าน

ผลบวกย่อยเก็บความถี่ที่สูงขึ้นเรื่อย ๆ แต่ไม่เคย “เฉลี่ย” ความผิดพลาด. ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ใช้ค่าเฉลี่ยของผลบวกย่อยหลายตัว. เคอร์เนลของมันไม่ติดลบและมีปริพันธ์หนึ่ง; สมบัติสองข้อนี้ทำให้การประมาณเสถียรและไม่แกว่งเกิน. ส่วนเกินใกล้จุดกระโดดนี้เรียกว่า**ปรากฏการณ์กิบส์** (Gibbs phenomenon); สำหรับสัญญาณที่มีคลิก ค่าเฉลี่ยจะทำให้ขอบคมกลายเป็นขอบที่นุ่มลง แทนที่จะสร้างลอนเกินค่า.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 6.3.2: ค่าเฉลี่ยเฟเยร์และเคอร์เนล

สำหรับ $N \geq 1$ นิยามค่าเฉลี่ยเฟเยร์อันดับ N ของ $f \in C_{2\pi}$ โดย

$$(\sigma_N f)(t) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (S_k f)(t).$$

เคอร์เนลเฟเยร์ (Fejér kernel) คือ

$$F_N(s) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(s) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Ns/2)}{\sin^2(s/2)} \qquad (s \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

และ $F_N(0) = N$. แล้ว

$$(\sigma_N f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) F_N(s)\, ds.$$

σ_N คือค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักเท่า ๆ ของ $S_0, \dots, S_{N-1}$; การเฉลี่ยทำให้ลอนที่กลับทิศหักล้างกัน. เพราะ $F_N \geq 0$ และ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N = 1$, สำหรับฟังก์ชันเชิงซ้อนมี $\|\sigma_N f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$; ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะได้เพิ่มว่า $\min f \leq \sigma_N f \leq \max f$.

บทตั้ง 6.3.6: สมบัติของเคอร์เนลเฟเยร์

สำหรับ $N \geq 1$:

(a) $F_N(s) \geq 0$ สำหรับทุก s;

(b) $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)\, ds = 1$;

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)\, ds = 2\pi$ และ $F_N(0) = N$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้เอกลักษณ์ผลบวกของไซน์และความไม่เป็นลบของกำลังสอง; ปริพันธ์ตามมาจากปริพันธ์ของ D_k แต่ละตัว.

1. **เอกลักษณ์.** จาก $\sum_{k=0}^{N-1} \sin((k+\frac{1}{2})s) = \sin^2(Ns/2)/\sin(s/2)$ และ $D_k(s) = \sin((k+\frac{1}{2})s)/\sin(s/2)$,
$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(s) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Ns/2)}{\sin^2(s/2)}.$$

2. **ไม่ติดลบ.** กำลังสองทั้งเศษและส่วนไม่ติดลบ; ที่ $s = 0$ ใช้ค่าต่อเนื่อง $F_N(0) = N$.

3. **ปริพันธ์.** เพราะ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s)\, ds = 1$ สำหรับทุก k,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)\, ds = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 1 = 1.$$
คูณด้วย 2π ได้ $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)\, ds = 2\pi$.

สรุป: เคอร์เนลเฟเยร์เป็นค่าเฉลี่ยของเคอร์เนลดีรีเคล; มันไม่ติดลบและมีมวลรวมหนึ่ง. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.3.7: ทฤษฎีบทของเฟเยร์

สำหรับ $f \in C_{2\pi}$,

$$\|\sigma_N f - f\|_\infty \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เพราะ $F_N \geq 0$ และมีปริพันธ์หนึ่ง ความคลาดเคลื่อนคือค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของ $f(t+s) - f(t)$. ใกล้ $s = 0$ ความต่อเนื่องสม่ำเสมอทำให้เล็ก; ไกลจาก 0 มวลของ F_N เล็กเพราะตัวส่วน $\sin^2(s/2)$ และตัวเศษมีขอบเขต.

1. **ความต่อเนื่องสม่ำเสมอ.** ให้ $\varepsilon > 0$. เพราะ f ต่อเนื่องเป็นคาบบนช่วงปิด จึงต่อเนื่องสม่ำเสมอ; มี $\delta > 0$ ซึ่ง $|s| < \delta$ บังคับ $|f(t+s) - f(t)| < \varepsilon$ ทุก t.
2. **เขียนความคลาดเคลื่อน.** จาก $\frac{1}{2\pi}\int F_N = 1$, $(\sigma_N f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t+s) - f(t))F_N(s)\,ds$.
3. **ช่วงใกล้ศูนย์.** เพราะ $F_N \geq 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|s|<\delta} |f(t+s) - f(t)|F_N(s)\,ds \leq \varepsilon\frac{1}{2\pi}\int F_N = \varepsilon.$$

4. **ช่วงไกลศูนย์.** สำหรับ $\delta \leq |s| \leq \pi$, $F_N(s) \leq 1/(N\sin^2(\delta/2))$ เพราะ $\sin^2(Ns/2) \leq 1$. ดังนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|s|\leq\pi} |f(t+s) - f(t)|F_N(s)\,ds \leq \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)}.$$

   เลือก N ใหญ่พอให้เทอมนี้ $< \varepsilon$. รวมสองช่วงได้ $|(\sigma_N f)(t) - f(t)| < 2\varepsilon$ ทุก t.

สรุป: ความไม่เป็นลบของ F_N ทำให้ช่วงใกล้ศูนย์เล็กตามความต่อเนื่อง; มวลที่เหลือเล็กเพราะ $F_N = O(1/N)$ ไกลศูนย์. การลู่เข้าจึงเอกรูป. □

บทแทรก 6.3.8: พหุนามตรีโกณมิติหนาแน่นใน $C_{2\pi}$

พหุนามตรีโกณมิติ (trigonometric polynomial) หนาแน่นใน $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$: สำหรับทุก $f \in C_{2\pi}$ และทุก $\varepsilon > 0$ มีพหุนามตรีโกณมิติ p ซึ่ง $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** $\sigma_N f$ เป็นผลรวมจำกัดของผลบวกย่อย ซึ่งแต่ละตัวเป็นพหุนามตรีโกณมิติ; ทฤษฎีบทของเฟเยร์บอกว่ามันลู่เข้า f เอกรูป.

สำหรับ $f \in C_{2\pi}$ แต่ละ $S_k f$ เป็นผลรวมจำกัดของ e^{ikt} จึงเป็นพหุนามตรีโกณมิติ. เมื่อเฉลี่ยผลบวกย่อยหลายตัวด้วยน้ำหนักเท่ากัน ผลที่ได้จึงยังเป็นพหุนามตรีโกณมิติ. ตามทฤษฎีบท 6.3.7, $\|\sigma_N f - f\|_\infty \to 0$. นี่แปลว่าสำหรับ f ใด ๆ และ $\varepsilon > 0$ มีพหุนามตรีโกณมิติที่อยู่ห่างจาก f ไม่เกิน ε ในนอร์มซูพรีมัม.

สรุป: ทฤษฎีบทของเฟเยร์ให้ทั้งการลู่เข้าเอกรูปและความหนาแน่นของพหุนามตรีโกณมิติในที่เดียว. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-12-24

นิยาม 6.3.3: ตัวอย่างฟังก์ชันคาบที่มีจุดกระโดด

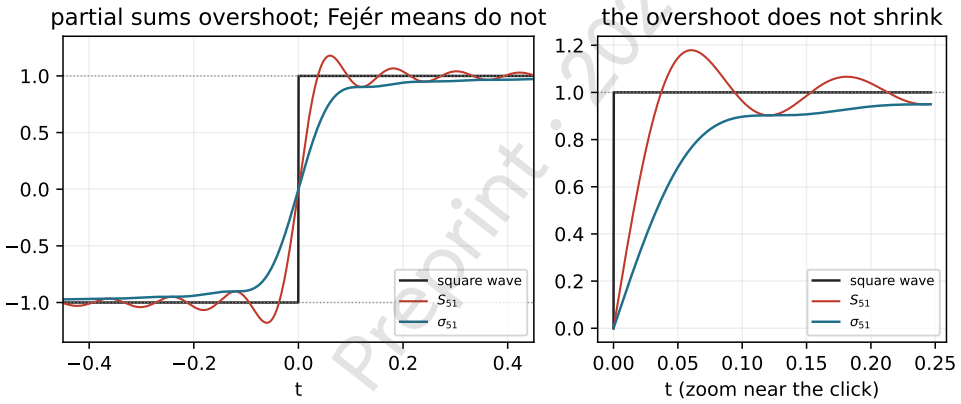
ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคาบ 2π ซึ่ง

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\pi,\\ -1, & -\pi<t<0,\\ 0, & t\in\pi\mathbb{Z}.\end{cases}$$

อนุกรมฟูเรียร์ของมันคือ

$$f(t)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin((2j+1)t)}{2j+1}.$$

มันเป็นแบบจำลองของ “คลิก” ในสถานการณ์เปิดบท และเป็นตัวอย่างของ**คลื่นสี่เหลี่ยม** (square wave). สัมประสิทธิ์มีเฉพาะความถี่คี่และขนาดลดลงเหมือน $1/k$; การตัดที่ N พจน์จึงยังเหลือลอนใกล้จุดกระโดดเสมอ. ภาพตัวอย่างอยู่ในรูปที่ 6.3.



รูปที่ 6.3: คลื่นสี่เหลี่ยมเทียบกับ S_{51} และ σ_{51} (ซ้าย) และภาพขยายใกล้จุดกระโดด (ขวา). ผลบวกย่อยแกว่งเกินค่า 1 ประมาณ 9% ของการกระโดด และลอนไม่หดหายเมื่อ N โต; ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ไม่เกิน 1. ที่ $N=1001$: $S_{1001}(\pi/1002)=1.1789800764\ldots$, ส่วนเกิน $0.0894900382\ldots$ ของการกระโดดขนาด 2 (ค่าลิมิต $0.0894898722\ldots$), และ $\max\sigma_{1001}=0.9993646484\ldots$ (สร้างจาก `code/funkana/ch06.py`).

บทตั้ง 6.3.9: ยอดแรกของผลบวกย่อยคลื่นสี่เหลี่ยม

ให้ $N=2m-1$ เป็นจำนวนคี่ และ

$$S_N(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{\sin((2j+1)t)}{2j+1}.$$

แล้ว S_N มีค่าสูงสุดเฉพาะที่ที่ $t_N=\pi/(N+1)$ และ

$$S_N(t_N)\longrightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du=1.1789797444\ldots$$

เมื่อ $N\to\infty$ ผ่านจำนวนคี่.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** หาอนุพันธ์ด้วยเอกลักษณ์ผลบวกของโคไซน์; เครื่องหมายบอกตำแหน่งยอดแรก. แล้วแทน t_N และให้ N โต ผ่านจำนวนคี่.

1. **อนุพันธ์.** สำหรับ $t \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_N'(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{m-1}\cos((2j+1)t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin((N+1)t)}{\sin t},$$

   เพราะ $\sum_{j=0}^{m-1}\cos((2j+1)t) = \sin(2mt)/(2\sin t)$ และ $2m = N+1$.

2. **ตำแหน่งยอดแรก.** บน $(0,\pi)$, $\sin t > 0$; เครื่องหมายของ S_N' จึงเหมือน $\sin((N+1)t)$. มันเป็นบวกบน $(0, t_N)$ และลบบน $(t_N, 2t_N)$. เพราะ $S_N(0) = 0$ และ S_N เพิ่มก่อน t_N, จุด t_N เป็นค่าสูงสุดเฉพาะที่.

3. **ลิมิต.** เพราะ $S_N(0) = 0$ และเปลี่ยนตัวแปร $u = (N+1)s$,

$$S_N(t_N) = \frac{2}{\pi}\int_0^{t_N}\frac{\sin((N+1)s)}{\sin s}\,ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{(N+1)\sin(u/(N+1))}\,du.$$

   บน $[0,\pi]$, $(N+1)\sin(u/(N+1)) \to u$ เอกรูป และสำหรับ $0 < u \le \pi$ ตัวส่วนอยู่ระหว่าง $2u/\pi$ กับ u; ดังนั้นตัวถูกปริพันธ์ถูกคุมด้วยค่าคงตัว $\pi/2$. ตามทฤษฎีบทลู่เข้าครอบงำ (บทปริภูมิของฟังก์ชัน) เราจึงส่งลิมิตเข้าปริพันธ์ได้.

สรุป: อนุพันธ์เป็นศูนย์ครั้งแรกที่ $t = \pi/(N+1)$; ค่ายอดมีลิมิตเป็นปริพันธ์ของ $\sin u/u$ ซึ่งมากกว่า 1. □

กลับไปที่สถานการณ์เปิดบท

คลิกคือจุดที่ฟังก์ชันกระโดด. ผลบวกย่อยฟูเรียร์แกว่งเกินค่าจริงประมาณ 8.95% ของขนาดการกระโดด และยอดนี้ไม่หดหายเมื่อ N โต; นี่คือปรากฏการณ์กิบส์. ค่าคงตัวเลอเบก L_N โตแบบลอการิทึมและไม่มีขอบเขต; โดยหลักการมีขอบเขตเอกรูป มีสัญญาณต่อเนื่องซึ่งอนุกรมฟูเรียร์ลู่ออกที่จุดหนึ่ง. ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ใช้เคอร์เนลที่ไม่ติดลบและมีมวลรวมหนึ่ง จึงลู่เข้าเอกรูปสำหรับสัญญาณต่อเนื่อง และไม่เกิน 1 สำหรับคลื่นสี่เหลี่ยม. แอปที่ใช้ผลบวกย่อยไม่ได้ “เสีย”: มันใช้การตัดอนุกรมซึ่งมีกิบส์; ถ้าต้องการรูปคลื่นที่เสถียรกว่าควรใช้ค่าเฉลี่ยหรือตัวกรอง.

กลับไปที่สถานการณ์สมมติ: ท่าทางตัวละคร

ในแบบจำลองนี้ S_N เป็นการฉายเพราะ $S_N^2 = S_N$, แต่ $\|S_N\| = L_N$ โตไม่จำกัด จึงไม่เสถียรร่วมกันในนอร์มซูพรีมัม; ใกล้จุดกระโดดเกิดลอนแบบกิบส์. ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ใช้เคอร์เนลไม่ติดลบที่มีมวลหนึ่ง จึงไม่เกินช่วงค่าของสัญญาณจริง; สำหรับสัญญาณต่อเนื่องยังลู่เข้าเอกรูป. ดังนั้นการเฉลี่ยลดลอนเกินค่าในแบบจำลองนี้ แต่ทำให้การเปลี่ยนท่าที่กระโดดดูนุ่มลง.

6.3.4 การฉายและการแยกผลบวกตรง

ภาพรวมก่อนอ่าน

ผลบวกย่อย S_N มีสมบัติ $S_N^2 = S_N$: ถ้าเราตัดความถี่แล้วตัดซ้ำ ก็ไม่เปลี่ยนอะไร. การส่งที่มีสมบัติ $P^2 = P$ เรียกว่าการฉาย; มันแยกปริภูมิออกเป็นสองส่วน คือสิ่งที่ถูกตรึงไว้กับสิ่งที่ถูกส่งเป็นศูนย์. ในหัวข้อนี้เรารวบรวมสมบัติพื้นฐานของการฉายต่อเนื่อง และหาว่าเมื่อใดปริภูมิย่อยปิดมีปริภูมิย่อยปิดอีกตัวที่ทำให้ผลบวกตรงได้.

อ่านร่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 6.3.4: การฉายและการแยกผลบวกตรง

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม. การส่งเชิงเส้นต่อเนื่อง $P\colon X \to X$ ที่ $P^2 = P$ เรียกว่า**การฉาย** (projection). เราเขียน $\ker P$ แทน**เคอร์เนล** (kernel) ของ P ซึ่งคือเซตของ x ที่ $Px = 0$ (รู้จักแล้วในบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค). ปริภูมิย่อยปิด $U \subset X$ เรียกว่า**ปริภูมิย่อยที่มีส่วนเติมเต็ม** (complemented subspace) ถ้ามีปริภูมิย่อยปิด $V \subset X$ ซึ่งเรียกว่า**ส่วนเติมเต็มปิด** (closed complement) ของ U และ

$$U \cap V = \{0\}, \qquad U + V = X.$$

เขียน $X = U \oplus V$; นั่นคือทุก $x \in X$ เขียนเป็น $u + v$ ได้เพียงแบบเดียว.

บน $\mathbb{R}^2$ พร้อมนอร์มแบบยุคลิด ตัวอย่าง $P(x, y) = (x - y, 0)$ มี $P^2 = P$ และ $\|P\| = \sqrt{2} > 1$: การฉายเฉียงไม่ได้มีนอร์มหนึ่ง.

บทตั้ง 6.3.10: สมบัติของการฉายต่อเนื่อง

ให้ $P \neq 0$ เป็นการฉายต่อเนื่องบนปริภูมินอร์ม X. แล้ว

(a) $\|P\| \geq 1$;

(b) $\ker P$ และ $\operatorname{ran} P$ เป็นปริภูมิย่อยปิด;

(c) $X = \ker P \oplus \operatorname{ran} P$ ในความหมายเชิงทอพอโลยี.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ $P^2 = P$: เวกเตอร์ในพิสัยถูกตรึงไว้; เวกเตอร์ในเคอร์เนลถูกส่งเป็นศูนย์; ทุกเวกเตอร์แยกเป็น $(I-P)x + Px$.

1. **(a)** เพราะ $P \neq 0$ มี x กับ $Px \neq 0$. ให้ $y = Px$; แล้ว $Py = P^2x = Px = y$, ดังนั้น $\|P\| \geq \|Py\|/\|y\| = 1$.
2. **(b)** $\ker P = P^{-1}(\{0\})$ ปิด เพราะ P ต่อเนื่อง; $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$ และ $I - P$ ต่อเนื่อง; จึงปิด.
3. **(c)** เขียน $x = (I - P)x + Px$. เทอมแรกอยู่ใน $\ker P$ เพราะ $P(I - P) = 0$; เทอมที่สองอยู่ใน $\operatorname{ran} P$. ถ้า $y \in \ker P \cap \operatorname{ran} P$ แล้ว $y = Px$ และ $Py = 0$; แต่ $Py = P^2x = y$, ดังนั้น $y = 0$. การส่ง $(u, v) \mapsto u + v$ จาก $\ker P \oplus_1 \operatorname{ran} P$ ไปยัง X เป็นการส่งต่อเนื่องที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง และตัวผกผัน $x \mapsto ((I - P)x, Px)$ ต่อเนื่องเพราะเขียนได้ด้วย P และ $I - P$; จึงเป็นสมสัณฐานเชิงทอพอโลยี.

สรุป: การฉายที่ไม่เป็นศูนย์มีนอร์มอย่างน้อยหนึ่ง; เคอร์เนลและพิสัยปิด; ทั้งสองเป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยีของ X. □

ร่างเรียง · preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 6.3.11: ปริภูมิย่อยปิดที่มีส่วนเติมเต็ม

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ U, V เป็นปริภูมิย่อยปิดซึ่ง $X = U \oplus V$ (ผลบวกตรงเชิงพีชคณิต). แล้ว

(a) X สมสัณฐานเชิงทอพอโลยีกับ $U \oplus_1 V$;

(b) มีการฉายต่อเนื่องจาก X ไปยัง U;

(c) $V \simeq X/U$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** การส่ง $(u, v) \mapsto u + v$ เป็นการส่งต่อเนื่องที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงระหว่างปริภูมิบานาค; ตัวผกผันมีขอบเขตตามทฤษฎีบทการส่งผกผัน. แล้วอ่านการฉายและผลหารจากสมสัณฐานนี้.

1. **(a)** ให้ $S\colon U \oplus_1 V \to X$, $S(u, v) = u + v$. มันเป็นการส่งต่อเนื่องที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง; และ $U \oplus_1 V$ บริบูรณ์เพราะ U, V ปิดใน X จึงเป็นบานาค. ตามบทแทรก 6.2.3, S^{-1} ต่อเนื่อง; S เป็นสมสัณฐาน.
2. **(b)** ให้ $\pi_U(u, v) = u$ และ $P := \pi_U \circ S^{-1}$. องค์ประกอบของการส่งต่อเนื่องย่อมต่อเนื่อง; และ $P^2 = P$ เพราะ π_U เลือกพิกัด U. จึงได้การฉายต่อเนื่องบน U.
3. **(c)** ให้ $q\colon X \to X/U$ เป็นการส่งผลหาร. การจำกัด $q|_V$ ต่อเนื่อง. มันทั่วถึง: ทุกคลาส $[x]$ มีตัวแทนใน V เพราะเขียน $x = u + v$ ได้แล้ว $[x] = [v]$. และตัวแทนนี้มีเพียงตัวเดียว: จาก $X = U \oplus V$ ได้ $U \cap V = \{0\}$; ถ้า $v, w \in V$ และ $[v] = [w]$, แล้ว $v - w \in U \cap V = \{0\}$; ดังนั้น $v = w$ และการจำกัดนี้เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง. ปริภูมิ X/U บริบูรณ์เพราะ U ปิดในปริภูมิบานาค X (บทปริภูมิของฟังก์ชัน). ใช้บทแทรก 6.2.3 กับการส่งนี้; ตัวผกผันต่อเนื่องและ $V \simeq X/U$.

สรุป: ผลบวกตรงของปริภูมิย่อยปิดในปริภูมิบานาคเป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยี; การฉายและผลหารจึงต่อเนื่องโดยอัตโนมัติ. □

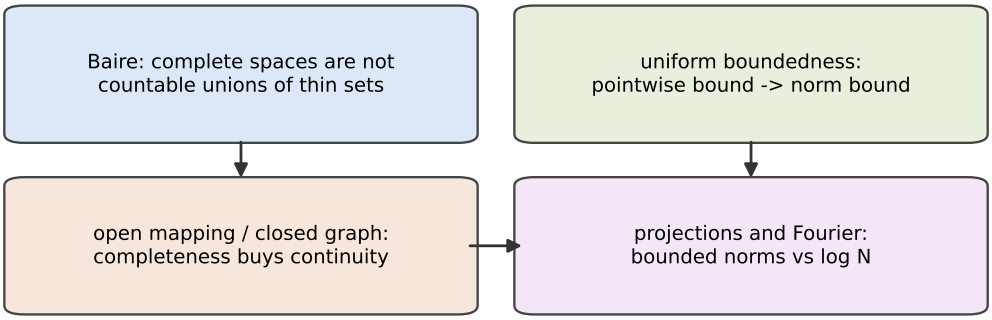
เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): มิติจำกัดและส่วนเติมเต็มปิด

ในมิติจำกัด ทุกปริภูมิย่อยปิดมีส่วนเติมเต็มปิด และมีการฉายต่อเนื่อง P ที่มีนอร์มไม่เกินมิติของ U, คือ $\|P\| \le \dim U$ (Werner 2007, ทฤษฎีบท IV.6.2; ใช้**ฐานออเออร์บัค** (Auerbach basis) ซึ่งเวกเตอร์ฐานและฟังก์ชันนัลคู่มีนอร์มหนึ่งทั้งคู่; ทฤษฎีบทนี้ไม่พิสูจน์ในบทนี้). ในฮิลเบิร์ตก็มีส่วนเติมเต็มปิดเสมอ (บทเรขาคณิตของฮิลเบิร์ต); แต่ในบานาคทั่วไปไม่จริง: $c_0 \subset \ell^\infty$ ไม่มีส่วนเติมเต็มปิด (Werner 2007, ทฤษฎีบท IV.6.5; ทฤษฎีบทนี้ไม่พิสูจน์ในบทนี้). สมมติฐาน “มี V ปิด” ในทฤษฎีบท 6.3.11 จึงไม่ได้มาฟรี ๆ.

สรุปใจความ

- $L_N = \|\Lambda_N\|$ วัดการขยายของผลบวกย่อย และ $\frac{4}{\pi^2} H_N \le L_N \le \pi + \ln(2N+1)$; ดังนั้น $L_N \to \infty$.
- หลักการมีขอบเขตเอกรูปให้ $f \in C_{2\pi}$ ซึ่ง $(S_N f)(0)$ ไม่ลู่เข้า.
- ถ้า $f \in C^1$, $S_N f \to f$ เอกรูป; ถ้า f ต่อเนื่อง, $\sigma_N f \to f$ เอกรูป.
- คลื่นสี่เหลี่ยมมีปรากฏการณ์กิบส์: ส่วนเกินประมาณ 8.95% ของการกระโดดและไม่หายเมื่อ N โต.
- การฉายต่อเนื่องที่ไม่เป็นศูนย์มีนอร์มอย่างน้อยหนึ่ง; ปริภูมิย่อยปิดที่มีส่วนเติมเต็มปิดมีการฉายต่อเนื่อง.

ฉบับร่าง Preprint 2026-04-24



รูปที่ 6.4: แผนผังปิดบทนี้: ทฤษฎีบทของแบร์นำไปสู่หลักการมีขอบเขตเอกรูป; การส่งเปิดให้ตัวผกผันมีขอบเขต; และในกรณีอนุกรมฟูเรียร์ ขอบเขตของค่าคงตัวเลอเบกแยกผลบวกย่อยออกจากค่าเฉลี่ยเฟเยร์ (สร้างจาก `code/funkana/ch06.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงคำนวณ L_0, L_1, L_2 จากนิยาม และตรวจว่าตรงกับ 1, $1.4359911\ldots$, $1.6421884\ldots$. อธิบายว่า $L_N \geq 1$ ทุก N.

2. จงแสดงว่า $S_N^2 = S_N$ และ $\|S_N\| = L_N$; ตรวจว่า $L_{10} = 2.2233569\ldots \geq \frac{4}{\pi^2} H_{10} = 1.1870661\ldots$.

3. จงพิสูจน์ $F_N \geq 0$, $\frac{1}{2\pi}\int F_N = 1$, $F_N(0) = N$; ตรวจค่า $\sigma_{1001}(1/1001)$ และ $\sigma_{1001}(\pi/1001)$ กับตัวเลขในบท.

4. สำหรับคลื่นสี่เหลี่ยม $N = 1001$ จงรายงานยอดแรก ส่วนเกิน และสัดส่วนของการกระโดด; ตรวจ $\max \sigma_{1001} = 0.9993646484\ldots \leq 1$ และอธิบายความต่าง.

5. ให้ $P(x, y) = (x - y, 0)$ บน $\mathbb{R}^2$ พร้อมนอร์มแบบยุคลิด. จงหา P^2, $\ker P$, $\operatorname{ran} P$, $\|P\|$ และอธิบายว่าทำไมนอร์มเกิน 1 ได้.

6. ให้ $U = \operatorname{span}\{(1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ พร้อมนอร์มซูพรีมัม. จงสร้างการฉาย P ลงบน U ที่ $\|P\| = 1$ และตรวจ $P^2 = P$.

7. จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน:

   (ก) ตัวดำเนินการต่อเนื่องที่มี $P^2 = P$ มี $\|P\| \geq 1$ หรือ $P = 0$;

   (ข) ทุกปริภูมิย่อยปิดของปริภูมิบานาคมีส่วนเติมเต็มปิด;

   (ค) สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นคาบ ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ลู่เข้าเอกรูป;

   (ง) ถ้าอนุกรมฟูเรียร์ของ $f \in C_{2\pi}$ ลู่เข้าที่จุด 0 แล้ว L_N มีขอบเขต.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. $L_N = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin((N+\frac{1}{2})s)|/\sin(s/2)\,ds$. สำหรับ $N=0$, $D_0 \equiv 1$ จึง $L_0 = 1$; สำหรับ $N = 1, 2$ การคำนวณให้ $L_1 = 1.4359911\ldots$ และ $L_2 = 1.6421884\ldots$. เพราะ $S_N 1 = 1$ และ $\|1\|_\infty = 1$, จึง $L_N \geq 1$ ทุก N.

2. $S_N f$ มีสัมประสิทธิ์ $\widehat{f}(k)$ เมื่อ $|k| \leq N$ และเป็นศูนย์นอกช่วงนั้น; สัมประสิทธิ์ของ $S_N(S_N f)$ จึงเท่ากับของ $S_N f$ และ $S_N^2 = S_N$. สำหรับทุก t ตั้ง $g_t(s) = f(t+s)$. แล้ว $\|g_t\|_\infty = \|f\|_\infty$ และจากสูตรเคอร์เนล $(S_N g_t)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)D_N(s)\,ds = (S_N f)(t)$. การส่ง $f \mapsto g_t$ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงของลูกบอลหน่วยในตัวมันเอง (ผกผันคือการเลื่อนด้วย $-t$) ดังนั้น

$$\|S_N\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1,\, t\in[-\pi,\pi]} |(S_N f)(t)| = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} |(S_N g)(0)| = L_N.$$

   สำหรับ $N = 10$, $H_{10} = 2.9289682\ldots$ และ $\frac{4}{\pi^2}H_{10} = 1.1870661\ldots \leq L_{10} = 2.2233569\ldots$.

3. เอกลักษณ์ $\sum_{k=0}^{N-1} D_k(s) = \sin^2(Ns/2)/\sin^2(s/2)$ ให้สูตร F_N; เศษและส่วนเป็นกำลังสอง จึง $F_N \geq 0$. ปริพันธ์ของ D_k คือ 2π; เฉลี่ยได้ $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi = 2\pi$. ที่ $s = 0$, $F_N(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) = N$. สำหรับ $N = 1001$ การคำนวณให้ $\sigma_{1001}(1/1001) = 0.3096422634\ldots$ และ $\sigma_{1001}(\pi/1001) = 0.7736946772\ldots$; ตัวเลขทั้งสองมีแบบทดสอบยืนยัน.

4. เพราะ $S_N'(t) = \frac{2}{\pi}\sin((N+1)t)/\sin t$, อนุพันธ์เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบที่ $t_N = \pi/(N+1)$; นี่คือยอดแรก. ค่าที่คำนวณได้คือ $1.1789800764\ldots$; ส่วนเกิน $0.1789800764\ldots$; สัดส่วน $0.0894900382\ldots$. $\max \sigma_{1001} = 0.9993646484\ldots \leq 1$. ผลบวกย่อยแกว่งเพราะ D_N มีเครื่องหมาย; เคอร์เนลเฟยร์ไม่ติดลบจึงไม่แกว่ง.

5. $P^2(x,y) = P(x-y,0) = P(x,y)$. $\ker P = \{(x,y) : x = y\} = \operatorname{span}\{(1,1)\}$; $\operatorname{ran} P = \operatorname{span}\{(1,0)\}$. สำหรับ $x = (1,-1)$, $\|x\|_2 = \sqrt{2}$ และ $\|Px\|_2 = 2$; โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซ $|x_1 - x_2| \leq \sqrt{2}\|x\|_2$ และสมการเกิดที่ $x = (1,-1)$. จึง $\|P\| = \sqrt{2}$.

6. ให้ $P(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$. แล้ว P เชิงเส้น, $P^2 = P$ และพิสัยคือ U เพราะ $P(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1)$. สำหรับ $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$, $|(x+y)/2| \leq 1$; จึง $\|P\| \leq 1$, และ $P(1,1) = (1,1)$ ให้ $\|P\| = 1$.

7. (ก) จริง ตามบทตั้ง 6.3.10. (ข) เท็จ: ให้ $U = c_0 \subset \ell^\infty$. ปริภูมิย่อยนี้ปิด: ถ้า $x^{(m)} \in c_0$ และ $x^{(m)} \to x$ ในนอร์มซูพรีมัม, สำหรับ $\varepsilon > 0$ เลือก m ให้ $\|x - x^{(m)}\|_\infty < \varepsilon/2$ แล้วเลือก N ให้ $|x_n^{(m)}| < \varepsilon/2$ เมื่อ $n \geq N$; จึง $|x_n| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N$. แต่ไม่มีปริภูมิย่อยปิด V ที่ทำให้ $\ell^\infty = U \oplus V$; Werner 2007, ทฤษฎีบท IV.6.5 ให้ข้อเท็จจริงนี้ และเราไม่พิสูจน์ในบทนี้. ดังนั้น (ข) เป็นเท็จ. (ค) จริง ตามทฤษฎีบทของเฟยร์. (ง) เท็จ: การลู่เข้าที่จุด 0 ของฟังก์ชันหนึ่งตัวไม่ได้บังคับให้ L_N มีขอบเขต; ต้องลู่เข้าที่จุด 0 สำหรับ*ทุก* $f \in C_{2\pi}$.

ร่างปริญ Preprint · 2026-10-24

อ่านต่อ

เราเห็นว่าความไม่ติดลบและมวลหนึ่งของเคอร์เนลเฟเยร์ให้การประมาณที่เสถียร ขณะที่นอร์มของผลบวกย่อยโตไม่จำกัด. บทการลู่เข้าแบบอ่อน ความสะท้อนกลับ และค่าต่ำสุดจะเปลี่ยนคำถามจากการควบคุมตัวดำเนินการไปสู่การลู่เข้าของลำดับและการบรรลุค่าต่ำสุด.

ตัวเลขทุกตัวในเฉลยนี้ตรวจซ้ำได้ด้วยฟังก์ชันใน `code/funkana/ch06.py` และแบบทดสอบใน `code/tests/test_ch06.py`.

สูตรสรุป

- แบร์: ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ที่ไม่ว่างไม่เป็นการรวมกันนับได้ของเซตปิดที่มีภายในว่าง; จุดตัดของเซตเปิดหนาแน่นนับได้จึงยังหนาแน่น.
- หลักการมีขอบเขตเอกรูป: ถ้า X บานาคและ $\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty$ สำหรับทุก $x \in X$, แล้ว $\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty$.
- การส่งเปิดและกราฟปิด: ถ้า X, Y บานาค, $T : X \to Y$ ต่อเนื่องและทั่วถึงเป็นการส่งเปิด; ถ้าเป็นหนึ่งต่อหนึ่งด้วย T^{-1} ต่อเนื่อง. กราฟปิดสมมูลกับความต่อเนื่องเมื่อโดเมนคือ X ทั้งปริภูมิ.
- อนุกรมฟูเรียร์: $\frac{4}{\pi^2}H_N \le L_N \le \pi + \ln(2N+1)$; $\sigma_N f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)F_N(s)\,ds$, โดย $F_N \ge 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} F_N = 2\pi$ และ $\|\sigma_N f\|_\infty \le \|f\|_\infty$; ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริง, $\min f \le \sigma_N f \le \max f$.
- การฉาย: $P^2 = P$ ก็ต่อเมื่อ P เป็นการฉาย; ถ้า $P \neq 0$ แล้ว $\|P\| \ge 1$, และ $X = \ker P \oplus \operatorname{ran} P$ โดยทั้งสองปริภูมิย่อยปิด.

ทบทวนศัพท์ใหม่

- **ทุกที่ไม่หนาแน่น**: ส่วนปิดมีภายในว่าง; **เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง/ที่สอง**: การรวมของเซตทุกที่ไม่หนาแน่นนับได้ / เซตที่ไม่เป็นหมวดหมู่ที่หนึ่ง.
- **ผลบวกย่อย**: การตัดอนุกรมฟูเรียร์ไว้ที่ความถี่ไม่เกิน N; **ค่าเฉลี่ยเฟเยร์**: ค่าเฉลี่ยของ $S_0, \dots, S_{N-1}$.
- **ค่าคงตัวเลอเบก**: นอร์มของการอ่านผลบวกย่อยที่จุดหนึ่ง; **ปรากฏการณ์กิบส์**: ยอดเกินใกล้จุดกระโดดที่ไม่หดหาย; **คลื่นสี่เหลี่ยม**: ฟังก์ชันที่สลับระหว่าง -1 กับ 1.
- **ปริภูมิย่อยที่มีส่วนเติมเต็ม**: ปริภูมิย่อยปิด $U \subset X$ ที่มีปริภูมิย่อยปิด V ซึ่ง $U \cap V = \{0\}$ และ $U + V = X$; V เรียกว่าส่วนเติมเต็มปิดของ U และสมมูลกับการเป็นพิสัยของการฉายต่อเนื่อง. คำว่า ส่วนเติมเต็ม ของเซต $X \setminus M$ เป็นอีกความหมายหนึ่ง.
- **ฐานออเออร์บัค**: ฐานที่เวกเตอร์ฐานและฟังก์ชันนัลพิกัดมีนอร์มหนึ่ง; ใช้ในผลที่อ้างไว้โดยไม่พิสูจน์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ภาค III

เครื่องมืออ่อนและสเปกตรัม

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 7

การลู่เข้าแบบอ่อน ความสะท้อนกลับ และค่าต่ำสุด

สถานการณ์สมมติ: ความเร็วจากผลต่างของเฟรม

สมมติว่าเรามีคลิปวิดีโอสั้น ๆ ของวัตถุที่เคลื่อนที่ผ่านกล้อง. เพื่อประมาณความเร็ว ณ เวลา t เราอาจดูภาพสองเฟรมที่อยู่ก่อนและหลัง t แล้วใช้ผลต่างของความสว่าง:

$$v_h(t) := \frac{I(t+h) - I(t-h)}{2h}.$$

ถ้าภาพเรียบและ h เล็ก คำตอบก็ใกล้ความเร็วจริง. แต่ภาพจากกล้องมี**สัญญาณรบกวน** (noise) ความถี่สูงปนอยู่เสมอ. การหารด้วย $2h$ ทำให้ความถี่สูงนั้นถูกขยายแรงขึ้นเมื่อ h เล็กลง. ผลคือลำดับของค่าประมาณอาจแกว่งแรงมาก แม้ “ค่าเฉลี่ย” ของมันจะนิ่งและลู่เข้าสู่ค่าที่ต้องการ.

สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่ากล้องหรือแอปใดใช้สูตรนี้จริง. เราใช้มันเพื่อแยกคำถามสองคำถามที่มักปะปนกัน: ลำดับ v_h ลู่เข้าในความหมายใด, และเมื่อใดที่การลู่เข้าแบบอ่อนยังให้ข้อมูลพอจะสรุปเรื่องค่าต่ำสุดได้. คำถามแรกนำไปสู่การลู่เข้าแบบอ่อนและแบบอ่อน-ดาวใน §7.1. คำถามที่สองนำไปสู่ความสะท้อนกลับใน §7.2 และวิธีตรงของแคลคูลัสของการแปรผันใน §7.3.

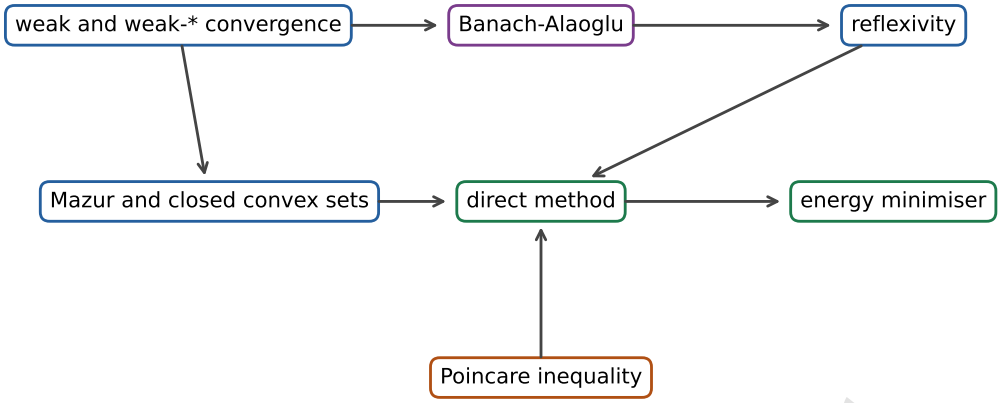
ตัวเลขทุกตัวที่อ้างว่ามาจากการคำนวณในบทนี้ผลิตโดย `code/funkana/ch07.py` และมีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch07.py`. ตัวเลขจากการจำลองจึงเป็นตัวเลขของแบบจำลองเรา ไม่ใช่การวัดจากกล้องจริง.

ภาพรวมบท

ในมิติอนันต์ ลูกบอลหนึ่งหน่วยไม่กระชับตามนอร์ม. ลำดับที่มีขอบเขตจึงอาจไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าตามนอร์ม. การลู่เข้าแบบอ่อนลดข้อเรียกร้องลง: เราไม่บังคับให้ระยะระหว่างพจน์เล็ก แต่บังคับเพียงให้ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องทุกตัวอ่านค่าได้ใกล้กัน. ข้อเรียกร้องที่อ่อนลงนี้พอจะกู้ความกระชับในปริภูมิสะท้อนกลับ และพอจะรักษาเซตนูนปิดกับค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนัลคอนเวกซ์.

เส้นทางของบทมีสามขั้น. ขั้นแรก นิยามการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบอ่อน-ดาว พร้อมสมบัติที่ใช้บ่อย. ขั้นที่สอง แสดงว่าปริภูมิสะท้อนกลับมีลำดับย่อยแบบอ่อนเสมอ และเซตนูนปิดปิดแบบอ่อน. ขั้นที่สาม ใช้สองอย่างนี้พิสูจน์ว่าฟังก์ชันนัลพลังงานมีค่าต่ำสุดจริง ไม่ใช่เพียงมีค่าต่ำสุดที่เข้าใกล้ได้.

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 7.1: แผนผังการพึ่งพาของบทนี้: การลู่เข้าแบบอ่อนและบทตั้งของมาซูร์นำไปสู่ความสะท้อนกลับและวิธีตรง; อสมการปวงกาเรให้การควบคุมขนาดที่ทำให้ฟังก์ชันนัลพลังงานมีขอบเขตด้านล่าง (สร้างจาก `code/funkana/ch07.py`).

7.1 การลู่เข้าแบบอ่อนและอ่อน-ดาว: ภาพรวม

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพว่าเราไม่สามารถเห็นเวกเตอร์ทั้งตัว แต่มีเครื่องวัดเชิงเส้นหลายเครื่องที่อ่านค่าเวกเตอร์นั้นได้ทีละตัวเลข. การลู่เข้าแบบอ่อนหมายความว่าเครื่องวัดทุกเครื่องเห็นค่าลู่เข้า แม้เวกเตอร์อาจไม่เข้าใกล้กันตามนอร์ม. ตัวอย่างที่ชัดที่สุดคือ $\sin(nx)$ ใน $L^2(0, 2\pi)$: ความถี่สูงขึ้นเรื่อย ๆ แต่ขนาดยังเท่าเดิม. ทุกฟังก์ชันทดสอบที่เรียบเห็นค่าเฉลี่ยของมันเข้าใกล้ศูนย์ ขณะที่ระยะระหว่างสองพจน์ไม่หดลง.

คำถามของหัวข้อนี้คือ: อะไรคือข้อเรียกร้องที่อ่อนลงนี้, สมบัติใดยังคงอยู่, และเมื่อใดที่เราสามารถดึงลำดับย่อยลู่เข้าออกมาได้. คำตอบข้อสุดท้ายคือทฤษฎีบทบานาค–อาลาโอกลูในรูปเชิงลำดับ ซึ่งต้องใช้ความแยกกันได้ของปริภูมิต้นทาง.

7.1.1 นิยามและตัวอย่างแรก

นิยาม 7.1.1: การทดสอบการลู่เข้าผ่านฟังก์ชันนัล

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค.

(1) สำหรับลำดับใน X และ $x \in X$ เราเรียก (x_k) ว่า**ลู่เข้าแบบอ่อน** (weakly convergent) สู่ x เมื่อ

$$\langle x_k, x' \rangle_X \longrightarrow \langle x, x' \rangle_X \qquad \text{สำหรับทุก } x' \in X'.$$

เราเขียน $x_k \rightharpoonup x$.

(2) ในทางเดียวกัน ลำดับ $(x'_k) \subset X'$ **ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาว** (weak-* convergent) สู่ $x' \in X'$ เมื่อ

$$\langle x, x'_k \rangle_X \longrightarrow \langle x, x' \rangle_X \qquad \text{สำหรับทุก } x \in X.$$

เราเขียน $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$.

ฉบับร่าง preprint · 2026-10-24

(3) ลำดับ (x_k) เป็น**ลำดับโคชีแบบอ่อน** (weak Cauchy sequence) ถ้า $(\langle x_k, x'\rangle_X)_k$ เป็นลำดับโคชีใน $\mathbb{K}$ สำหรับทุก $x' \in X'$. ลำดับใน X' เป็นลำดับโคชีแบบอ่อน-ดาว ถ้า $(\langle x, x'_k\rangle_X)_k$ เป็นลำดับโคชีสำหรับทุก $x \in X$.

(4) เซต $M \subset X$ **กระชับเชิงลำดับแบบอ่อน** (weakly sequentially compact) ถ้าทุกลำดับใน M มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนและลิมิตอยู่ใน M. ความหมายแบบอ่อน-ดาวใน X' นิยามในทำนองเดียวกัน.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

"อ่อน" ไม่ได้หมายถึงข้อสรุปอ่อนแค่ในภาษาพูด แต่หมายถึงข้อเรียกร้องน้อยลง: เราไม่ตรวจระยะ $\|x_k - x\|$ แต่ตรวจเฉพาะตัวเลข $\langle x_k, x'\rangle$ ทุกตัว. เพราะ X' มีมากพอที่จะแยกจุดของ X ลิมิตแบบอ่อนจึงยังมีได้เพียงตัวเดียว.
ตัวอย่างที่ควรจำคือ $x_k = e_k$ ใน ℓ^2. สำหรับ $y = (y_j) \in \ell^2$, $\langle e_k, y\rangle = y_k \to 0$ เพราะอนุกรม $\sum |y_j|^2$ ลู่เข้า. ดังนั้น $e_k \rightharpoonup 0$ แต่ $\|e_k\|_2 = 1$ ทุก k. ขนาดไม่หายไปพร้อมกับลิมิตแบบอ่อน.

ตัวอย่างปริภูมิสะท้อนกลับที่ใช้บ่อยคือ ℓ^p และ $L^p(\Omega, \mu)$ เมื่อ $1 < p < \infty$. สำหรับ ℓ^p ให้มองเป็น L^p บนปริภูมินับได้ที่มีมาตรานับ; ในทั้งสองกรณีใช้การแทนปริภูมิคู่ด้วย $L^{p'}$. ผลนี้เป็นตัวอย่างมาตรฐานของ Alt 2012, ตัวอย่าง 6.11(2); ไม่พิสูจน์ในบทนี้.

ทฤษฎีบท 7.1.1: การฝังตัวในปริภูมิไบดูอัลคือการส่งสมมิติ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $X'' := (X')'$ เป็น**ปริภูมิไบดูอัล** (bidual space). นิยาม

$$\langle x', J_X x\rangle_{X'} := \langle x, x'\rangle_X \qquad (x \in X,\ x' \in X').$$

แล้ว $J_X : X \to X''$ เป็นการส่งเชิงเส้นสมมิติ. ยิ่งกว่านั้น

$$x_k \rightharpoonup x \text{ ใน } X \iff J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x \text{ ใน } X''.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** การเป็นสมมิติมาจากอสมการนิยามของนอร์มและฮาห์น–บานาคที่ให้ฟังก์ชันนัลที่บรรลุค่าของ x. ส่วนการสมมูลมาจากการอ่านนิยามทั้งสองข้างที่จุด x' เดียวกัน.

1. **เชิงเส้นและมีขอบเขต.** สำหรับ $x \in X$ และ $x' \in X'$,
$$|(J_X x)(x')| = |\langle x, x'\rangle_X| \le \|x\|_X \|x'\|_{X'}.$$
ดังนั้น $\|J_X x\|_{X''} \le \|x\|_X$.

2. **รักษาระยะ.** ถ้า $x \neq 0$ ตามทฤษฎีบทฮาห์น–บานาคในบทว่าด้วยตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค มี $x' \in X'$ ซึ่ง $\|x'\|_{X'} = 1$ และ $\langle x, x'\rangle_X = \|x\|_X$. จึง
$$\|J_X x\|_{X''} = \sup_{\|x'\|_{X'} \le 1} |(J_X x)(x')| \ge |(J_X x)(x')| = \|x\|_X.$$
รวมกับขั้นที่ 1 ได้ $\|J_X x\|_{X''} = \|x\|_X$. กรณี $x = 0$ ชัดเจน.

3. **สมมูลกับการลู่เข้าแบบอ่อน.** การลู่เข้าแบบอ่อน-ดาว $J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x$ ใน X'' หมายความว่า
$$(J_X x_k)(x') \longrightarrow (J_X x)(x') \qquad \text{สำหรับทุก } x' \in X'.$$
โดยนิยามของ J_X นี่คือ $\langle x_k, x'\rangle_X \to \langle x, x'\rangle_X$ ทุก x' ซึ่งคือ $x_k \rightharpoonup x$ พอดี.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุป: J_X เก็บทั้งการบวกและระยะทาง; เมื่ออ่านผ่าน J_X เงื่อนไขทั้งสองแบบทดสอบค่าเดียวกัน จึงเป็นการเขียนข้อความเดียวกันด้วยสองภาษา. □

ทฤษฎีบท 7.1.2: สมบัติพื้นฐานของการลู่เข้าแบบอ่อนและแบบอ่อน-ดาว

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค.

(a) ลิมิตแบบอ่อนและลิมิตแบบอ่อน-ดาวมีเพียงตัวเดียว.

(b) ถ้า $x_k \to x$ ตามนอร์ม แล้ว $x_k \rightharpoonup x$; ถ้า $x'_k \to x'$ ตามนอร์มใน X' แล้ว $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ และ $x'_k \rightharpoonup x'$ ใน X'.

(c) ถ้า $x_k \rightharpoonup x$ แล้ว

$$\|x\|_X \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X.$$

ถ้า $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ แล้ว $\|x'\|_{X'} \le \liminf_k \|x'_k\|_{X'}$.

(d) ลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนและลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวมีขอบเขต.

(e) ถ้า $x_k \to x$ ตามนอร์ม และ $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ แล้ว $\langle x_k, x'_k\rangle_X \to \langle x, x'\rangle_X$. ข้อความเดียวกันเป็นจริงเมื่อ $x_k \rightharpoonup x$ และ $x'_k \to x'$ ตามนอร์ม.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทุกข้ออ่านนิยามแล้วใช้ตัวเลขจริงหนึ่งตัวคุมค่า: ฟังก์ชันนัลที่บรรลุนอร์มสำหรับ (c), หลักการมีขอบเขตเอกรูปสำหรับ (d), และการบวก–ลบเทอมกลางสำหรับ (e).

1. **(a) ความเป็นหนึ่งเดียว.** ถ้า $x_k \rightharpoonup x$ และ $x_k \rightharpoonup y$ แล้ว $\langle x - y, x'\rangle_X = 0$ ทุก $x' \in X'$. เพราะ X' แยกจุดของ X (ผลจากฮาห์น–บานาค) จึง $x = y$. กรณีอ่อน-ดาวชัดกว่า: ค่าทุก $x \in X$ ถูกกำหนดโดยลิมิตเดียว.

2. **(b) เข้มให้อ่อน.** สำหรับ $x' \in X'$,

$$|\langle x_k - x, x'\rangle_X| \le \|x_k - x\|_X \|x'\|_{X'} \longrightarrow 0.$$

กรณีลำดับใน X' ถ้า $x'_k \to x'$ ตามนอร์ม แล้วสำหรับทุก $x'' \in X''$,

$$|x''(x'_k - x')| \le \|x''\|_{X''} \|x'_k - x'\|_{X'} \to 0.$$

จึง $x'_k \rightharpoonup x'$; เมื่อทดสอบที่แต่ละ $x \in X$ อสมการ $|\langle x, x'_k - x'\rangle_X| \le \|x\|_X \|x'_k - x'\|_{X'} \to 0$ ยังให้ $x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x'$.

3. **(c) สมบัติกึ่งต่อเนื่องล่าง (lower semicontinuous)ของนอร์ม.** ให้ $x \neq 0$. เลือก $x' \in X'$ ที่ $\|x'\| = 1$ และ $\langle x, x'\rangle = \|x\|$. แล้ว

$$\|x\| = |\langle x, x'\rangle| = \lim_k |\langle x_k, x'\rangle| \le \liminf_k \|x_k\|.$$

กรณี $x = 0$ ชัดเจน. สำหรับกรณีอ่อน-ดาว ให้ $\varepsilon > 0$. จากนิยามนอร์มเลือก $x \in X$ ที่ $\|x\|_X \le 1$ และ

$$\|x'\|_{X'} - \varepsilon < |\langle x, x'\rangle_X| = \lim_k |\langle x, x'_k\rangle_X| \le \liminf_k \|x'_k\|_{X'}.$$

ให้ $\varepsilon \downarrow 0$ ได้ข้อสรุป.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. **(d) มีขอบเขต.** สมมติ $x_k \rightharpoonup x$. แล้ว $J_X x_k \overset{*}{\rightharpoonup} J_X x$ ใน X''. สำหรับแต่ละ $x' \in X'$ ลำดับของจำนวน $(J_X x_k)(x')$ ลู่เข้าจึงมีขอบเขต. ใช้หลักการมีขอบเขตเอกรูป (ทฤษฎีบทบานาค–ชไตน์เฮาส์จากบทว่าด้วยทฤษฎีบทหลักสามข้อ) กับตระกูล $\{J_X x_k\}$ ใน $\mathcal{L}(X', \mathbb{K})$ ได้

$$\sup_k \|J_X x_k\|_{X''} < \infty.$$

เพราะ J_X เป็นสมมิติ $\sup_k \|x_k\|_X < \infty$. กรณีอ่อน-ดาวใช้หลักการเดียวกันโดยตรงกับ $x'_k \in X'$.

5. **(e) เทอมผสม.** ให้ $M := \sup_k \|x'_k\|_{X'} < \infty$ ตามข้อ (d). แล้ว

$$\begin{aligned} |\langle x_k, x'_k\rangle - \langle x, x'\rangle| &\le |\langle x_k - x, x'_k\rangle| + |\langle x, x'_k - x'\rangle| \\ &\le M\|x_k - x\|_X + |\langle x, x'_k - x'\rangle| \to 0. \end{aligned}$$

กรณี $x_k \rightharpoonup x$ และ $x'_k \to x'$ ให้ $C := \sup_k \|x_k\|_X < \infty$ ตามข้อ (d). แล้ว

$$|\langle x_k, x'_k\rangle - \langle x, x'\rangle| \le |\langle x_k - x, x'\rangle| + C\|x'_k - x'\|_{X'} \to 0,$$

เพราะพจน์แรกใช้การลู่เข้าแบบอ่อนที่ x' และพจน์ที่สองใช้การลู่เข้าแบบนอร์ม.

สรุป: ในลิมิตแบบอ่อน ขนาดของนอร์มไม่เพิ่มขึ้น; ลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนมีตัวคุมนอร์มร่วม; และเทอมผสมลู่เข้าเมื่อมีด้านหนึ่งลู่เข้าแบบเข้ม. □

ข้อควรระวัง: ลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนต้องมีขอบเขต

หลักการมีขอบเขตเอกรูปใช้กับ $J_X x_k \in X''$ ซึ่งอยู่ในปริภูมิบานาค X''; ไม่ต้องสมมติว่า X เป็นบานาค เพราะ X' และ X'' บริบูรณ์สำหรับทุกปริภูมินอร์ม X. ดังนั้นข้อ (d) ใช้ได้ตามที่กล่าว. ในการตรวจว่า “ไม่ลู่เข้าแบบอ่อน” เราใช้ข้อ (d) ได้ทันทีเมื่อลำดับไม่มีขอบเขต; แต่การมีขอบเขตเป็นเพียงเงื่อนไขจำเป็น ไม่ใช่เงื่อนไขพอเพียง: ลำดับ $(-1)^k e_1$ ใน ℓ^2 มีขอบเขตและไม่ลู่เข้าแบบอ่อน เพราะค่าที่อ่านได้แกว่งระหว่าง -1 และ 1.

7.1.2 ทฤษฎีบทบานาค–อาลาโอกลูในรูปเชิงลำดับ

ทฤษฎีบท 7.1.3: บอลหนึ่งหน่วยของปริภูมิคู่มีลำดับย่อยอ่อน-ดาว

ให้ X เป็นปริภูมินอร์มที่แยกกันได้. แล้วบอลปิดหนึ่งหน่วย

$$B_{X'} := \{x' \in X' : \|x'\|_{X'} \le 1\}$$

เป็นเซตกระชับเชิงลำดับแบบอ่อน-ดาว: ทุกลำดับใน $B_{X'}$ มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวสู่สมาชิกของ $B_{X'}$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือกเซตนับได้ที่หนาแน่นใน X; ใช้โบลซาโน–ไวเออร์สตราสส์ทีละจุดและวิธีทแยงมุมให้ทุกจุดลู่พร้อมกัน; แล้วขยายค่าลิมิตจากเซตหนาแน่นไปทั้ง X ด้วยความต่อเนื่องสม่ำเสมอ.

1. **เลือกเซตหนาแน่น.** ความแยกกันได้ของ X ให้ลำดับ (x_n) ซึ่งส่วนปิดของเซตนี้คือ X ทั้งหมด.

2. **ทุกพิกัดมีขอบเขต.** ให้ (x'_k) เป็นลำดับใน $B_{X'}$. สำหรับแต่ละ n,

$$|\langle x_n, x'_k\rangle| \le \|x_n\|_X \|x'_k\|_{X'} \le \|x_n\|_X.$$

ลำดับของจำนวนนี้มีขอบเขตใน $\mathbb{K}$ จึงมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าโดยโบลซาโน–ไวเออร์สตราสส์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. **วิธีทแยงมุม.** ใช้ขั้นที่ 2 ซ้ำกับ $x_1, x_2, \dots$ และเลือกดัชนีซ้อนกันเป็นลำดับ $k_1 < k_2 < \cdots$ ซึ่ง $\langle x_n, x'_{k_j}\rangle$ ลู่เข้าสำหรับทุก n เมื่อ $j \to \infty$. เขียน $z'_j := x'_{k_j}$.

4. **นิยามฟังก์ชันนัลบนผลการแผ่เชิงเส้น.** ให้ $Y := \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. สำหรับ $y = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n$ นิยาม

$$L(y) := \lim_{j\to\infty} \langle y, z'_j\rangle = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \lim_{j\to\infty} \langle x_n, z'_j\rangle.$$

   ค่านี้ไม่ขึ้นกับวิธีเขียน y เพราะแต่ละ z'_j เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น และ L เป็นเชิงเส้น. ถ้า $\|y\|_X \le 1$ แล้ว $|L(y)| \le 1$ เพราะ $\|z'_j\|_{X'} \le 1$ ทุก j.

5. **ขยายไปทั้ง X.** สำหรับ $y \in Y$ อสมการเดียวกันให้ $|L(y)| \le \|y\|_X$. จึงขยาย L อย่างต่อเนื่องไปยัง X และได้ $x' \in X'$ กับ $\|x'\|_{X'} \le 1$.

6. **ตรวจการลู่เข้าที่ทุก x.** จากขั้นที่ 4, $\|x'\|_{X'} \le 1$, และ $\|z'_j\|_{X'} \le 1$ จึง $\|z'_j - x'\|_{X'} \le 2$. ให้ $x \in X$ และ $\varepsilon > 0$. เลือก x_n จากเซตหนาแน่นที่ $\|x - x_n\|_X < \varepsilon$. แล้ว

$$|\langle x, z'_j - x'\rangle| \le |\langle x - x_n, z'_j - x'\rangle| + |\langle x_n, z'_j - x'\rangle| \le 2\varepsilon + |\langle x_n, z'_j - x'\rangle|.$$

   เทอมหลังเข้าใกล้ 0 เมื่อ $j \to \infty$ เพราะ z'_j ลู่เข้าที่ x_n. ดังนั้น $z'_j \overset{*}{\rightharpoonup} x'$. ขั้นที่ 4 ให้ $x' \in B_{X'}$.

สรุป: ความแยกกันได้ให้เซตทดสอบนับได้; วิธีทแยงมุมสร้างลิมิตบนเซตนั้น; ความมีขอบเขตเอกรูปขยายลิมิตไปทุกจุดโดยไม่ทำให้ค่าลิมิตเกินหนึ่ง. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): กระชับกับกระชับเชิงลำดับ

ทฤษฎีบทบานาค–อาลาโอกลูฉบับทอพอโลยีกล่าวว่า $B_{X'}$ กระชับใน**ทอพอโลยีอ่อน-ดาว** (weak-* topology) โดยไม่ต้องให้ X แยกกันได้ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VIII.3.11; ไม่พิสูจน์ในบทนี้, อาศัยทฤษฎีบทไทโคนอฟ). ผลนี้เป็นความกระชับเชิงทอพอโลยี; ข้อสรุปเรื่องลำดับย่อยต้องใช้สมมติฐานเพิ่ม. เราใช้เฉพาะรูปเชิงลำดับภายใต้สมมติฐาน “X แยกกันได้”.

7.1.3 ตัวอย่างในปริภูมิฟังก์ชัน

ใน L^p การลู่เข้าแบบอ่อนตรวจได้ด้วยฟังก์ชันทดสอบจาก $L^{p'}$: ถ้า $1 < p < \infty$ และ $1/p + 1/p' = 1$ แล้ว

$$f_k \rightharpoonup f \text{ ใน } L^p(\mu) \iff \int f_k \bar{g}\, d\mu \to \int f \bar{g}\, d\mu \quad \text{สำหรับทุก } g \in L^{p'}(\mu).$$

นี่ตามมาจากเกณฑ์การทดสอบการลู่เข้าแบบอ่อนใน L^p ซึ่งอาศัยการแทนปริภูมิคู่ด้วย $L^{p'}$ (Alt 2012, ตัวอย่าง 6.4(1); ไม่พิสูจน์ในบทนี้). ใน $C^0(S)$ ใช้การวัดเรกูลาร์เป็นฟังก์ชันทดสอบ และใน $W^{m,p}$ การลู่เข้าแบบอ่อนสมมูลกับการลู่เข้าแบบอ่อนของอนุพันธ์อ่อนทุกตัวที่มีอันดับไม่เกิน m.

ข้อควรระวัง: จำนวนจริงกับจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ (c) ของทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐานเป็นการเปรียบเทียบ “ขนาด” ของนอร์ม ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ไม่ติดลบ. เราไม่เขียน $\max$ หรือ $\min$ ของค่าฟังก์ชันเชิงซ้อน และไม่อ้างว่าลำดับของจำนวนเชิงซ้อน “เพิ่มขึ้น” หรือ “ลดลง”. การลู่เข้าและขอบเขตทุกข้อในบทนี้ใช้ค่าสัมบูรณ์หรือนอร์มเท่านั้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

7.1.4 คำถามเปิดบท: สัญญาณที่สั่นขึ้นแต่ไม่เล็กลง

ภาพรวมก่อนอ่าน

ให้ $u_n(x) = \sin(nx)$ บนช่วง $(0, 2\pi)$. เมื่อ n โตขึ้น กราฟสั่นถี่ขึ้น แต่พื้นที่ใต้กราฟกำลังสองยังเท่าเดิม. เราจะพิสูจน์ว่าทุกฟังก์ชันทดสอบ $g \in L^2$ เห็นค่าเฉลี่ยของ u_n เข้าใกล้ศูนย์. นี่คือตัวอย่างที่ทำให้เห็นชัดว่าการลู่เข้าแบบอ่อนไม่ใช่การลู่เข้าตามนอร์ม. จากนั้นการเฉลี่ยพจน์แรก N พจน์จะทำให้ขนาดหดลงจริงในอัตรา $1/\sqrt{N}$.

บทตั้ง 7.1.4: บทตั้งรีมันน์–เลอเบกสำหรับ $L^2(0, 2\pi; \mathbb{R})$

สำหรับทุก $g \in L^2(0, 2\pi; \mathbb{R})$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) g(x)\, dx \longrightarrow 0 \qquad \text{เมื่อ } n \to \infty.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิสูจน์ก่อนสำหรับ g เรียบและเป็นคาบ โดยแยกส่วนแล้วได้ตัวประกอบ $1/n$; จากนั้นใช้ความหนาแน่นของฟังก์ชันเรียบใน L^2.

1. **กรณีเรียบ.** ให้ g เป็นฟังก์ชัน C^1 และเป็นคาบคาบ 2π. แยกส่วน:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) g(x)\, dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n} g(x) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nx) g'(x)\, dx.$$

   เทอมขอบเขตหายเพราะ $g(0) = g(2\pi)$. ดังนั้นค่าสัมบูรณ์ไม่เกิน $\|g'\|_{L^1}/n \to 0$.

2. **ประมาณ g ทั่วไป.** ให้ $\varepsilon > 0$. ฟังก์ชัน C^1 คาบ 2π หนาแน่นใน $L^2(0, 2\pi)$; เลือก h เช่นนั้นที่ $\|g - h\|_{L^2} < \varepsilon/2$. แล้ว

$$\left| \int \sin(nx) g(x)\, dx \right| \le \left| \int \sin(nx) h(x)\, dx \right| + \|\sin(n\cdot)\|_{L^2} \|g - h\|_{L^2}.$$

   นอร์มของ $\sin(n\cdot)$ เท่ากับ $\sqrt{\pi}$ จึงทำให้พจน์ที่สองไม่เกิน $\sqrt{\pi}\,\varepsilon/2$. เมื่อ n ใหญ่พอ พจน์แรกก็ไม่เกิน $\sqrt{\pi}\,\varepsilon/2$, จึงได้ขอบเขต $\sqrt{\pi}\,\varepsilon$. เพราะ ε ใด ๆ ก็ได้ ลิมิตจึงเป็นศูนย์.

สรุป: การแยกส่วนให้ $1/n$ สำหรับฟังก์ชันเรียบ และความหนาแน่นของฟังก์ชันเรียบพาค่าประมาณไปยัง L^2 ทั้งปริภูมิ. □

ทฤษฎีบท 7.1.5: $\sin(nx)$ ลู่เข้าแบบอ่อนแต่ไม่ลู่เข้าตามนอร์มใน L^2 จริง

ในปริภูมิบานาคจริง $L^2(0, 2\pi; \mathbb{R})$ ให้ $u_n(x) = \sin(nx)$. แล้ว

(a) $u_n \rightharpoonup 0$;

(b) $\|u_n\|_{L^2} = \sqrt{\pi}$ สำหรับทุก n;

(c) u_n ไม่ลู่เข้าสู่ 0 ตามนอร์ม และไม่มีลำดับย่อยใดลู่เข้าตามนอร์ม;

(d) ค่าเฉลี่ยเซซาโร

$$A_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u_n$$

มี $\|A_N\|_{L^2} = \sqrt{\pi/N}$ และ $A_N \to 0$ ตามนอร์ม.

ร่างเรียบเรียง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** (a) คือบทตั้งรีมันน์–เลอเบก. (b) คำนวณกำลังสองของนอร์มตรง ๆ. (c) ระยะระหว่างสองพจน์ไม่เคยเล็กกว่า $\sqrt{2\pi}$. (d) ใช้ระบบตั้งฉากของ $\sin(nx)$ และสูตรผลบวกตรง ๆ.

1. **(a)** ใช้บทตั้งกับ $g \in L^2(0,2\pi;\mathbb{R})$: $\langle u_n, g\rangle = \int \sin(nx)g(x)\,dx \to 0$.
2. **(b)** เพราะ $\int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$ ทุก $n \geq 1$.
3. **(c)** ถ้า $n \neq m$ แล้ว
$$\|u_n - u_m\|_{L^2}^2 = \int_0^{2\pi} (\sin(nx) - \sin(mx))^2\,dx = \pi + \pi = 2\pi.$$
ทุกลำดับย่อยมีพจน์สองตัวที่ดัชนีไม่เท่ากัน จึงห่างกัน $\sqrt{2\pi}$; ดังนั้นไม่มีลำดับย่อยใดเป็นลำดับโคชีหรือจะลู่เข้าตามนอร์มได้. โดยเฉพาะลำดับเดิมไม่ลู่เข้าตามนอร์ม แม้ลิมิตแบบอ่อนคือ 0.
4. **(d)** ผลคูณภายในจริงของ $\sin(nx)$ กับ $\sin(mx)$ เป็นศูนย์เมื่อ $n \neq m$ และเป็น π เมื่อ $n = m$. ดังนั้น
$$\|A_N\|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n,m=1}^{N} \int \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{N\pi}{N^2} = \frac{\pi}{N}.$$
จึง $\|A_N\| = \sqrt{\pi/N} \to 0$.

สรุป: การลู่เข้าแบบอ่อนเห็นเฉพาะค่าเฉลี่ยกับฟังก์ชันทดสอบ; ขนาด $\sqrt{\pi}$ ไม่ลดลง. การเฉลี่ยพจน์แรก N พจน์บังคับให้ขนาดลดลงจริง. □

ปริมาณ	ดัชนี 10	ดัชนี 100	ดัชนี 1000
$\langle u_n, g\rangle$ กับ $g(x)=x$	-0.6283	-0.0628	—
$\|u_n\|_{L^2}$	1.7725	1.7725	1.7725
$\|A_N\|_{L^2}$	0.5605	0.1772	0.05605

ตัวเลขในตารางคำนวณจากสูตร $-2\pi/n$, $\sqrt{\pi}$ และ $\sqrt{\pi/N}$ พร้อมตรวจซ้ำด้วยปริพันธ์เชิงตัวเลข. แบบทดสอบยืนยันค่าถึงหลักที่พิมพ์. เมื่อ $n = 10$ และ 100, $\langle u_n, x\rangle = -2\pi/n$; เครื่องหมายลบไม่สำคัญต่อการลู่เข้า แต่บอกทิศของค่าที่อ่านได้.

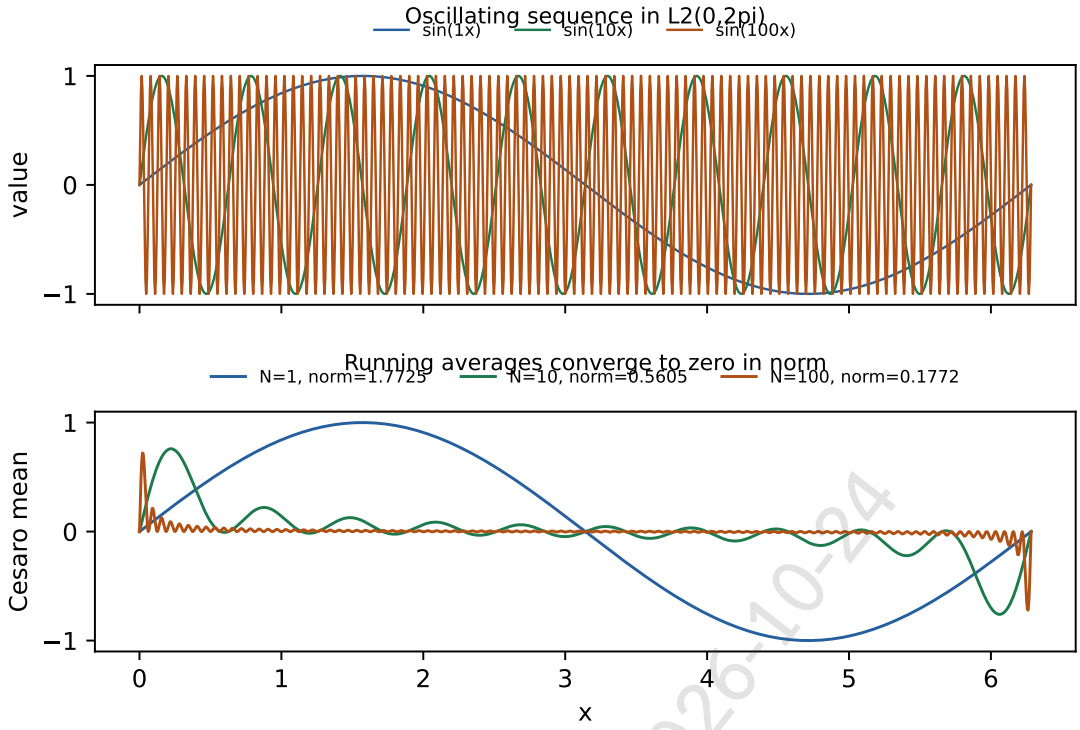
ข้อควรระวัง: อ่อนไม่ใช่เข้ม และค่าเฉลี่ยไม่ใช่ลำดับเดิม

$u_n \rightharpoonup 0$ ไม่ได้แปลว่า $u_n \to 0$ ตามนอร์ม. ข้อ (c) แสดงว่าแม้แต่ลำดับย่อยก็ไม่ลู่เข้าตามนอร์ม. ในทางกลับกัน ข้อ (d) แสดงว่าค่าเฉลี่ยของพจน์แรก N พจน์ลู่เข้าแบบเข้ม. นี่เป็นตัวอย่างของบทตั้งของมาซูร์ที่เราจะพบใน §7.2: ลิมิตแบบอ่อนอยู่ในส่วนปิดของส่วนนูนของลำดับ และในกรณีนี้การเฉลี่ยสร้างลำดับที่ลู่เข้าแบบเข้ม.

สรุปใจความ

- การลู่เข้าแบบอ่อนตรวจค่าผ่านฟังก์ชันนัลทุกตัว; การลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวตรวจผ่านสมาชิกของปริภูมิต้นทางทุกตัว.
- การฝังตัว J_X เป็นสมมิติ; การลู่เข้าแบบอ่อนใน X เท่ากับการลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวของภาพใน X''.
- นอร์มเป็นกึ่งต่อเนื่องล่างแบบอ่อน และลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนต้องมีขอบเขต; ส่วนกลับไม่จริง.
- ถ้า X แยกกันได้ บอลหนึ่งหน่วยของ X' กระชับเชิงลำดับแบบอ่อน-ดาว.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 7.2: ด้านบน: $\sin(nx)$ สำหรับ $n = 1, 10, 100$ ใน $L^2(0, 2\pi)$; ขนาดไม่เปลี่ยนเมื่อ n โตขึ้น. ด้านล่าง: ค่าเฉลี่ยเซซาโร A_N สำหรับ $N = 1, 10, 100$ ซึ่งลู่เข้าสู่ศูนย์ตามนอร์ม (สร้างจาก `code/funkana/ch07.py`).

- $\sin(nx) \rightharpoonup 0$ ใน $L^2(0, 2\pi)$ แต่ $\|\sin(nx)\| = \sqrt{\pi}$; ค่าเฉลี่ยเซซาโรมีนอร์ม $\sqrt{\pi/N} \to 0$.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ e_n เป็นเวกเตอร์หน่วยมาตรฐานใน ℓ^2. จงแสดงว่า $e_n \rightharpoonup 0$ แต่ $e_n \not\to 0$ ตามนอร์ม. อธิบายว่าข้อความนี้บอกอะไรเกี่ยวกับลูกบอลหนึ่งหน่วยใน ℓ^2.

2. ใช้ตัวเลขจาก §7.1.4: จงหาค่า $\langle \sin(nx), x \rangle$ สำหรับ $n = 10, 100$, ระยะกำลังสองระหว่าง $\sin(3x)$ กับ $\sin(4x)$ และนอร์มของค่าเฉลี่ยเซซาโรเมื่อ $N = 10, 100$. ตรวจคำตอบด้วยสูตรและด้วยการคำนวณเชิงตัวเลข.

3. ใน ℓ^1 ให้ e_n เป็นเวกเตอร์หน่วยมาตรฐาน. จงพิสูจน์ว่าลำดับนี้ไม่ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิกใดใน ℓ^1: ถ้ามีลิมิต y, ใช้ตัวอ่านพิกัด $\delta_j(z) = z_j \in (\ell^1)'$ เพื่อแสดงว่า $y = 0$, แล้วใช้ $x'(z) = \sum_j z_j \in \ell^\infty$ ขัดแย้ง.

4. บน $C[0, 1]$ ให้ $f_n(t) = t^n$. จงแสดงว่าลำดับนี้ไม่ลู่เข้าแบบอ่อน. (คำใบ้: ใช้การวัดมวลจุด δ_1 และ $\delta_{1/2}$.)

5. จงหาข้อความเท็จและแก้ให้ถูก: “ถ้า $x_n \rightharpoonup x$ แล้ว $\|x_n\| \to \|x\|$” และ “ถ้า $\|x_n\|$ มีขอบเขต แล้ว x_n มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนในทุกปริภูมิบานาค”. ให้ตัวอย่างค้านที่เป็นลำดับทั้งลำดับ ไม่ใช่เวกเตอร์เดียว.

6. ใช้ฟังก์ชัน `sine_pairing`, `sine_distance_sq` และ `cesaro_norm` ใน `code/funkana/ch07.py`. จงตรวจค่าที่ปรากฏใน §7.1.4 และอธิบายว่าการคำนวณเชิงตัวเลขยืนยันสูตรใดบ้าง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สำหรับ $y = (y_j) \in \ell^2$, $\langle e_n, y\rangle = y_n \to 0$ เพราะอนุกรม $\sum_j |y_j|^2$ ลู่เข้าจึงพจน์ทั่วไปลู่เข้าศูนย์. ฟังก์ชันนัลทุกตัวบน ℓ^2 อยู่ในรูป $\langle \cdot, y\rangle$ ตามทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ ดังนั้น $e_n \rightharpoonup 0$. แต่ $\|e_n - 0\|_2 = 1$ ทุก n จึงไม่ลู่เข้าตามนอร์ม. ลูกบอลหนึ่งหน่วยที่ปิดจึงไม่กระชับตามนอร์มในมิติอนันต์; ความกระชับที่เราจะได้ใน §7.2 เป็นความกระชับแบบอ่อน.

2. สูตรคือ $\langle \sin(nx), x\rangle = -2\pi/n$. ที่ $n = 10$ ได้ -0.6283 และที่ $n = 100$ ได้ -0.0628. ระยะกำลังสองคือ $2\pi \approx 6.2832$. ค่าเฉลี่ยเซซาโรมีนอร์ม $\sqrt{\pi/N}$: ที่ $N = 10$ ได้ 0.5605 และที่ $N = 100$ ได้ 0.1772. การคำนวณเชิงตัวเลขของปริพันธ์ให้ค่าเดียวกันถึงหลักที่พิมพ์.

3. สมมติ $e_n \rightharpoonup y$ ใน ℓ^1. สำหรับแต่ละ j, ให้ $\delta_j(z) := z_j$ เป็นตัวอ่านพิกัด ซึ่งอยู่ใน $(\ell^1)' = \ell^\infty$; และ $\delta_j(e_n) \to 0$. ดังนั้น $\delta_j(y) = 0$ ทุก j และ $y = 0$. แต่ $x'(z) := \sum_j z_j$ เป็นสมาชิกของ ℓ^∞ และต่อเนื่องเพราะ $|x'(z)| \le \|z\|_1$, โดย $x'(e_n) = 1 \not\to 0 = x'(y)$. ขัดแย้ง จึงไม่มีลิมิตแบบอ่อนใน ℓ^1.

4. ให้ $x' = \delta_1$. แล้ว $x'(f_n) = f_n(1) = 1$ ทุก n. ให้ $y' = \delta_{1/2}$. แล้ว $y'(f_n) = (1/2)^n \to 0$. ถ้า f_n ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ f ต้องมี $f(1) = 1$ และ $f(1/2) = 0$. สำหรับ $t < 1$, $f_n(t) = t^n \to 0$ และการใช้ δ_t ให้ $f(t) = 0$. ดังนั้น f เป็น 0 บน $[0, 1)$ แต่เป็น 1 ที่ 1 จึงไม่ต่อเนื่อง ขัดกับ $f \in C[0,1]$. ลำดับทั้งลำดับจึงไม่ลู่เข้าแบบอ่อน.

5. ข้อความแรกเท็จ: $e_n \rightharpoonup 0$ ใน ℓ^2 แต่ $\|e_n\| = 1$ ไม่ลู่เข้าสู่ 0. ข้อความที่ถูกคือ $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$. ข้อความที่สองเท็จ: ใน $X = C[0,1]$ ลำดับ $f_n(t) = t^n$ มีขอบเขต $\|f_n\|_\infty = 1$ แต่ไม่มีลำดับย่อยใดลู่เข้าแบบอ่อน เพราะลิมิตแบบอ่อนของลำดับย่อยใด ๆ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องเหมือนในข้อ 4. เมื่อเพิ่มสมมติฐาน “X สะท้อนกลับ” ข้อสรุปนี้จึงเป็นจริงตามทฤษฎีบท.

6. ฟังก์ชันทั้งสามคำนวณปริพันธ์ด้วยสูตรและด้วยการประมาณเชิงตัวเลขแยกกัน. ค่าที่ได้ตรงกับตารางใน §7.1.4: $\langle \sin(10x), x\rangle = -0.6283$, $\langle \sin(100x), x\rangle = -0.0628$, $\|\sin(3x) - \sin(4x)\|^2 = 2\pi$, $\|A_{10}\| = 0.5605$ และ $\|A_{100}\| = 0.1772$. การตรงกันของสองวิธีไม่ได้พิสูจน์ทฤษฎีบท แต่ตรวจว่าตัวเลขที่พิมพ์ไม่ได้มาจากการปัดผิดหรือสูตรที่พิมพ์ผิด.

อ่านต่อ

ใน §7.1 เราเห็นแล้วว่าการลู่เข้าแบบอ่อนอ่านข้อมูลผ่านฟังก์ชันนัลทุกตัว จึงไม่เห็นการสั่นที่ขนาดยังคงเดิม. คำถามต่อไปคือ: ในปริภูมิแบบใดที่ทุกลำดับมีขอบเขตจะมีลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อนได้เสมอ. คำตอบคือปริภูมิสะท้อนกลับ ซึ่งจะทำให้เราดึงค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนัลพลังงานได้ใน §7.3.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

7.2 ความสะท้อนกลับและเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน

ภาพรวมก่อนอ่าน

ใน §7.1 เราเห็นว่าลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนต้องมีขอบเขต แต่การมีขอบเขตไม่ได้ประกันว่าจะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน. ในมิติอนันต์ ลูกบอลหนึ่งหน่วยอาจมีลำดับที่ “หนีออกไปทุกทิศ” โดยไม่มีทิศใดเป็นลิมิต. หัวข้อนี้ถามว่าเมื่อใดลูกบอลหนึ่งหน่วยจึงไม่หนี: เมื่อใดทุกลำดับที่มีขอบเขตมีลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อน.
คำตอบคือปริภูมิสะท้อนกลับ. คำว่า “สะท้อนกลับ” หมายความว่าการฝังตัว X ลงใน X'' ไม่ได้เหลือที่ว่าง: ทุกฟังก์ชันนัลบน X' มาจากสมาชิกของ X ตัวหนึ่ง. เงื่อนไขนี้ดูเป็นเรื่องของปริภูมิคู่ แต่ผลลัพธ์กลับเป็นเรื่องของลำดับ: มันทำให้เราดึงลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อนได้ และทำให้เซตนูนปิดมีจุดที่ทำให้ระยะทางต่ำสุดจริง.

7.2.1 นิยามและสมบัติที่สืบทอด

นิยาม 7.2.1: ปริภูมิสะท้อนกลับ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $J_X : X \to X''$ เป็นการฝังตัวสมมิติจาก §7.1. เราเรียก X ว่า**ปริภูมิสะท้อนกลับ** (reflexive space) ถ้า J_X ทั่วถึง. ในกรณีนี้ เราระบุ X กับ X'' ผ่าน J_X และเขียน $X = X''$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

การสะท้อนกลับไม่ได้บอกว่า X กับ X'' “หน้าตาเหมือนกัน” ในความหมายกว้าง แต่บอกว่าไม่มีฟังก์ชันนัลบน X' ตัวใดที่อยู่นอกเหนือการอ่านค่าจากเวกเตอร์ของ X. ทุกเครื่องวัดบนเครื่องวัด มาจากเวกเตอร์จริงหนึ่งตัว.
ปริภูมิมิติจำกัดสะท้อนกลับเสมอ เพราะ $\dim X = \dim X''$ และ J_X เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง. ตัวอย่างที่ต้องระวังคือ c_0: คู่ของมันคือ ℓ^1 และคู่ที่สองคือ ℓ^∞. ลำดับคงที่ $(1, 1, 1, \dots)$ เป็นฟังก์ชันนัลบน ℓ^1 แต่ไม่ใช่ภาพของลำดับใน c_0 เพราะลำดับใน c_0 ต้องลู่เข้าศูนย์. ดังนั้น c_0 ไม่สะท้อนกลับ.

ทฤษฎีบท 7.2.1: สมบัติพื้นฐานของปริภูมิสะท้อนกลับ

ให้ X, Y เป็นปริภูมิบานาค.

(a) ถ้า $\dim X < \infty$ แล้ว X สะท้อนกลับ.

(b) ถ้า X สะท้อนกลับ แล้วใน X' การลู่เข้าแบบอ่อนและการลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวของลำดับเป็นอย่างเดียวกัน.

(c) ถ้า X สะท้อนกลับ และ $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยปิด แล้ว Y สะท้อนกลับ.

(d) ถ้า $T : X \to Y$ เป็นสมสัณฐาน แล้ว X สะท้อนกลับก็ต่อเมื่อ Y สะท้อนกลับ.

(e) X สะท้อนกลับก็ต่อเมื่อ X' สะท้อนกลับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** (a) ใช้มิติเท่ากัน. (b) ใช้ความทั่วถึงของ J_X เพื่อลดการทดสอบกับ X'' ทั้งหมดเหลือการทดสอบกับภาพของ X. (c) สร้างฟังก์ชันนัลบน X' จากการทดสอบบน Y' แล้วใช้ฮาห์น–บานาคแสดงว่าตัวแทนอยู่ใน Y. (d) ส่งฟังก์ชันนัลผ่านสมสัณฐานและตัวผกผัน. (e) ใช้ (c) กับภาพ $J_X(X) \subset X''$ และใช้ (d) กับ J_X.

1. **(a)** เพราะ $\dim X' = \dim X$ และ $\dim X'' = \dim X'$ จึง $\dim X'' = \dim X < \infty$. การส่ง J_X เป็นหนึ่งต่อหนึ่งและเชิงเส้นระหว่างปริภูมิที่มีมิติเท่ากันจึงทั่วถึง.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

2. (b) ถ้า $x'_k \rightharpoonup x'$ ใน X' แล้ว $x''(x'_k) \to x''(x')$ สำหรับทุก $x'' \in X''$; โดยเฉพาะสำหรับ $x'' = J_X x$ ทุก $x \in X$ จึง $x'_k \xrightarrow{*} x'$. กลับกัน ถ้า $x'_k \xrightarrow{*} x'$ และ $x'' \in X''$ แล้วเพราะ J_X ทั่วถึง มี $x \in X$ ที่ $x'' = J_X x$. ดังนั้น
$$x''(x'_k) = \langle x, x'_k\rangle_X \longrightarrow \langle x, x'\rangle_X = x''(x').$$
จึง $x'_k \rightharpoonup x'$.

3. (c) ให้ $y'' \in Y''$. นิยาม $\Phi(y'') \in X''$ โดย
$$\Phi(y'')(x') := y''(x'|_Y) \qquad (x' \in X').$$
การส่งนี้เป็นเชิงเส้นและ $\|\Phi(y'')\| \le \|y''\|$. เพราะ X สะท้อนกลับ มี $x \in X$ ที่ $\Phi(y'') = J_X x$. ถ้า $x' \in X'$ และ $x'|_Y = 0$ แล้ว $x'(x) = J_X x(x') = \Phi(y'')(x') = 0$. ดังนั้น x ตั้งฉากกับ $Y^\perp$. เพราะ Y ปิด ในปริภูมิสะท้อนกลับ (หรือในปริภูมิบานาคใด ๆ) $(Y^\perp)^\perp = Y$; เราจึงได้ $x \in Y$.

ให้ $y' \in Y'$. ตามฮาห์น–บานาค เลือกส่วนขยาย $x' \in X'$ ที่ $x'|_Y = y'$ และ $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$. แล้ว
$$(J_Y x)(y') = y'(x) = x'(x) = \Phi(y'')(x') = y''(x'|_Y) = y''(y').$$
ดังนั้น $J_Y x = y''$ และ J_Y ทั่วถึง.

4. (d) ให้ $T : X \to Y$ เป็นสมสัณฐาน. สมมติ X สะท้อนกลับ และให้ $y'' \in Y''$. นิยาม $x'' \in X''$ โดย
$$x''(x') := y''(x' \circ T^{-1}) \qquad (x' \in X').$$
เพราะ T^{-1} มีขอบเขต x'' เป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่อง. มี $x \in X$ ที่ $J_X x = x''$. ให้ $y := Tx$. สำหรับ $y' \in Y'$ ฟังก์ชันนัล $x' := y' \circ T$ อยู่ใน X' เพราะ T มีขอบเขต. จึง
$$(J_Y y)(y') = y'(Tx) = x'(x) = J_X x(x') = y''(x' \circ T^{-1}) = y''(y').$$
ดังนั้น J_Y ทั่วถึง. ทิศกลับได้จากการใช้ T^{-1} แทน T.

5. (e) สมมติ X สะท้อนกลับ. แล้ว $J_X : X \to X''$ เป็นสมสัณฐานแบบสมมิติ. ตัวดำเนินการผูกพัน $(J_X)' : X''' \to X'$ จึงเป็นสมสัณฐานแบบสมมิติด้วย. สำหรับ $x' \in X'$ และ $x \in X$,
$$\big((J_X)' \circ J_{X'}\big)x'(x) = (J_{X'}x')(J_X x) = \langle x, x'\rangle_X = x'(x).$$
ดังนั้น $(J_X)' \circ J_{X'} = I_{X'}$. เพราะ $(J_X)'$ เป็นสมสัณฐาน จึงได้ $J_{X'} = ((J_X)')^{-1}$ และ $J_{X'}$ ทั่วถึง. นั่นคือ X' สะท้อนกลับ.

กลับกัน ถ้า X' สะท้อนกลับ ใช้ข้อสรุปที่เพิ่งพิสูจน์กับ X' ได้ว่า X'' สะท้อนกลับ. ภาพ $J_X(X)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ X'' เพราะ X บริบูรณ์และ J_X เป็นสมมิติ. ตามข้อ (c), $J_X(X)$ สะท้อนกลับ. ตามข้อ (d) กับสมสัณฐาน $J_X : X \to J_X(X)$ จึงได้ X สะท้อนกลับ.

สรุป: ความสะท้อนกลับสืบทอดถึงปริภูมิย่อยปิด ปริภูมิคู่ และปริภูมิที่สมสัณฐานกัน; ในปริภูมิสะท้อนกลับ คำว่า “อ่อน” กับ “อ่อน-ดาว” ในปริภูมิคู่จึงเป็นคำเดียวกัน. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ข้อควรระวัง: สมมติ “ปิด” และ “บริบูรณ์”

ข้อ (c) ต้องมี Y ปิด. ปริภูมิย่อยที่ไม่ปิดอาจไม่บริบูรณ์ จึงไม่เป็นปริภูมิบานาคและไม่มีสิทธิ์พูดถึงความสะท้อนกลับตามนิยามนี้. การพิสูจน์ยังใช้ $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$ ซึ่งเป็นจริงเพราะ Y ปิด. ถ้า Y ไม่ปิด ข้อสรุปอาจล้ม.
ข้อ (e) ไม่ได้บอกว่าทุกปริภูมิที่แยกกันได้มีคู่ที่แยกกันได้. ตัวอย่าง ℓ^1 แยกกันได้ แต่คู่ของมันคือ ℓ^∞ ซึ่งไม่แยกกันได้. ความสะท้อนกลับคือสมมติฐานที่ทำให้สองสมบัตินี้ไปด้วยกัน.

7.2.2 จากขอบเขตสู่ลำดับย่อย

บทตั้ง 7.2.2: คู่ที่แยกกันได้ทำให้ปริภูมิต้นทางแยกกันได้

ถ้า X เป็นปริภูมินอร์มและ X' แยกกันได้ แล้ว X แยกกันได้.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เลือกฟังก์ชันนัลที่หนาแน่น และเลือกเวกเตอร์ที่เกือบบรรลุนอร์มของแต่ละตัว. ถ้าผลรวมเชิงเส้นตรรกยะของเวกเตอร์เหล่านี้ไม่หนาแน่น ฮาห์น–บานาคจะสร้างฟังก์ชันนัลที่หายบนเวกเตอร์ทั้งหมด แต่ใกล้ฟังก์ชันนัลตัวหนึ่งที่ทำค่ามากบนเวกเตอร์คู่ของมัน ซึ่งขัดกัน.

1. **เลือกจุด ทดสอบ.** เพราะ X' แยกกันได้ มีลำดับหนาแน่น (x'_n) ใน X'. สำหรับแต่ละ n ที่ $x'_n \neq 0$ เลือก $x_n \in X$ ที่ $\|x_n\|_X = 1$ และ
$$|x'_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|_{X'}.$$
ถ้า $x'_n = 0$ กำหนด $x_n = 0$.

2. **สมมติว่าผลรวมเชิงเส้นไม่หนาแน่น.** ให้ D ประกอบด้วยผลรวมเชิงเส้นแบบจำกัดของ $x_1, x_2, \ldots$ โดยใช้สัมประสิทธิ์จาก $\mathbb{Q}$ เมื่อ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ และจาก $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ เมื่อ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. เพราะสัมประสิทธิ์เหล่านี้หนาแน่นใน $\mathbb{K}$, $\overline{D}$ เป็นปริภูมิย่อยเชิงเส้นเหนือ $\mathbb{K}$. สมมติ $\overline{D} \neq X$. ตามฮาห์น–บานาค มี $x' \in X'$ ที่ $\|x'\|_{X'} = 1$ และ $x' = 0$ บน $\overline{D}$; โดยเฉพาะ $x'(x_n) = 0$ ทุก n.

3. **หาข้อขัดแย้ง.** เพราะลำดับ (x'_n) หนาแน่นใน X' และ $\|x'\|_{X'} = 1$, มี n ที่ $\|x'_n - x'\|_{X'} < 1/4$. แล้ว
$$|x'_n(x_n)| \leq |(x'_n - x')(x_n)| + |x'(x_n)| \leq \|x'_n - x'\|_{X'} < 1/4.$$
แต่ $\|x'_n\|_{X'} \geq \|x'\|_{X'} - \|x'_n - x'\|_{X'} > 3/4$ ดังนั้น $|x'_n(x_n)| \geq 3/8$, ขัดแย้ง.

สรุป: ฟังก์ชันนัลที่หนาแน่นบังคับให้มีเวกเตอร์จำนวนนับได้ที่ “เห็น” ฟังก์ชันนัลทุกตัว; ถ้าเวกเตอร์เหล่านั้นไม่หนาแน่น ฮาห์น–บานาคจะสร้างฟังก์ชันนัลที่มองไม่เห็นพวกมัน แต่ยังต้องใกล้สมาชิกของลำดับหนาแน่น ซึ่งเป็นไปไม่ได้. □

ฉบับร่าง · Preprint 2026-10-24

ทฤษฎีบท 7.2.3: ทุกลำดับมีขอบเขตมีลำดับย่อยอ่อนเมื่อปริภูมิสะท้อนกลับ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อนกลับ. แล้วทุกลำดับที่มีขอบเขตใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนใน X.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ลดลงไปยังปริภูมิย่อยปิดที่แยกกันได้ซึ่งหุ้มลำดับไว้; ปริภูมิย่อยนั้นสะท้อนกลับและมีคู่แยกกันได้; ใช้วิธีทแยงมุมบนฟังก์ชันนัลที่หนาแน่น แล้วใช้ความสะท้อนกลับเปลี่ยนลิมิตใน Y'' ให้เป็นสมาชิกของ Y.

1. **ลดขนาดปริภูมิ.** ให้ (x_k) มีขอบเขต และ $Y := \overline{\operatorname{lin}}\{x_1, x_2, \dots\}$. แล้ว Y เป็นปริภูมิย่อยปิดที่แยกกันได้ของ X และตามทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐาน Y สะท้อนกลับ.

2. **คู่ของ Y แยกกันได้.** เพราะ Y สะท้อนกลับ $Y'' = J_Y(Y)$. ปริภูมิ Y แยกกันได้ จึง Y'' แยกกันได้ในฐานะภาพสมมิติของ Y. ใช้บทตั้งก่อนหน้ากับปริภูมิ Y' ซึ่งมีคู่เป็น Y'' ได้ว่า Y' แยกกันได้.

3. **วิธีทแยงมุม.** เลือกเซตนับได้หนาแน่น $\{y'_1, y'_2, \dots\}$ ใน Y'. เพราะ $\|x_k\|_Y \le M$ สำหรับบาง M ทุกพิกัด $\langle x_k, y'_r\rangle$ มีขอบเขต. ใช้โบลซาโน–ไวเออร์สตราสส์ซ้ำและวิธีทแยงมุมเหมือนการพิสูจน์ทฤษฎีบทบานาค–อาลาโอกลู ได้ลำดับย่อย x_{k_j} ซึ่งสำหรับทุกดัชนีทดสอบคงที่ r, $\langle x_{k_j}, y'_r\rangle$ ลู่เข้าเมื่อ $j \to \infty$.

4. **ขยายการลู่เข้าไปทุกฟังก์ชันนัล.** นิยาม

$$L(y') := \lim_{j\to\infty} \langle x_{k_j}, y'\rangle_Y .$$

   ขั้นที่ 3 ให้ลิมิตบนเซตหนาแน่น; ความมีขอบเขต $\|x_{k_j}\|_Y \le M$ และการประมาณ y' ด้วยสมาชิกของเซตหนาแน่นให้ลิมิตสำหรับทุก $y' \in Y'$. นอกจากนี้ $|L(y')| \le M\|y'\|_{Y'}$ จึง $L \in Y''$.

5. **ใช้ความสะท้อนกลับ.** เพราะ Y สะท้อนกลับ มี $y \in Y$ ที่ $J_Y y = L$. นั่นคือ

$$\langle x_{k_j}, y'\rangle_Y \longrightarrow \langle y, y'\rangle_Y \qquad \text{สำหรับทุก } y' \in Y'.$$

   ให้ $x' \in X'$. การจำกัด $x'|_Y$ อยู่ใน Y' ดังนั้น $\langle x_{k_j}, x'\rangle_X \to \langle y, x'\rangle_X$. จึง $x_{k_j} \rightharpoonup y$ ใน X.

สรุป: ความแยกกันได้ช่วยให้เลือกดัชนีได้ ความสะท้อนกลับช่วยให้ลิมิตที่สร้างจากฟังก์ชันนัลเป็นเวกเตอร์จริงในปริภูมิ. □

ทฤษฎีบท 7.2.4: ทฤษฎีบทเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(a) X สะท้อนกลับ;

(b) ทุกลำดับที่มีขอบเขตใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน;

(c) บอลปิดหนึ่งหน่วย B_X กระชับเชิงลำดับแบบอ่อน.

เราได้พิสูจน์ (a)⇒(b) ข้างต้นแล้ว. ทิศกลับ (b)⇒(a) และความสมมูล (b)⇔(c) เป็นทฤษฎีบทเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียนที่เราไม่พิสูจน์ในบทนี้; Werner 2007 กล่าวถึงผลนี้ในหมายเหตุหลัง §III.7 และ §VIII.7.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ข้อควรระวัง: กระชับกับกระชับเชิงลำดับ

ในทอพอโลยีทั่วไป ความกระชับเชิงทอพอโลยีและความกระชับเชิงลำดับไม่จำเป็นต้องสมมูลกัน. ทฤษฎีบทเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียนให้ผลนี้สำหรับบอลหนึ่งหน่วยในทอพอโลยีอ่อนของปริภูมิบานาค; ส่วนนี้เราอ้างอิงแต่ไม่พิสูจน์. Werner 2007 กล่าวถึงผลนี้ในหมายเหตุหลัง §III.7 และ §VIII.7.

7.2.3 เซตนูนปิด มาซูร์ และระยะทางต่ำสุด

ทฤษฎีบท 7.2.5: เซตนูนปิดปิดเชิงลำดับแบบอ่อน

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $M \subset X$ ไม่ว่าง คอนเวกซ์ และปิด. ถ้า $x_k \in M$ ทุก k และ $x_k \rightharpoonup x$ แล้ว $x \in M$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า x อยู่นอก M ทฤษฎีบทการแยกให้ฟังก์ชันนัลที่แยก x ออกจาก M; ค่าของฟังก์ชันนัลบน x_k ต้องไม่เกินระดับแยก แต่ลิมิตต้องเกินระดับนั้น.

สมมติ $x \notin M$. ตามทฤษฎีบทการแยกสำหรับเซตนูนปิดในบทว่าด้วยตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค มี $x' \in X'$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ ที่

$$\operatorname{Re}\langle y, x'\rangle \le \alpha \quad (y \in M), \qquad \operatorname{Re}\langle x, x'\rangle > \alpha.$$

เพราะ $x_k \in M$ จึง $\operatorname{Re}\langle x_k, x'\rangle \le \alpha$ ทุก k. แต่ $x_k \rightharpoonup x$ ให้ $\langle x_k, x'\rangle \to \langle x, x'\rangle$ และส่วนจริงลู่เข้าด้วย. ลิมิตของลำดับที่ไม่เกิน α ต้องไม่เกิน α; จึง $\operatorname{Re}\langle x, x'\rangle \le \alpha$, ขัดแย้ง. ดังนั้น $x \in M$. $\square$

บทตั้ง 7.2.6: บทตั้งของมาซูร์

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม และ $x_k \rightharpoonup x$ ใน X. แล้ว x อยู่ในส่วนปิดของส่วนนูนของ $\{x_1, x_2, \dots\}$. ยิ่งกว่านั้น สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีผลรวมนูนจำกัดของ x_k ที่อยู่ห่างจาก x ไม่เกิน ε.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ให้ C เป็นส่วนปิดของส่วนนูน. ถ้า $x \notin C$ การแยกจะให้ฟังก์ชันนัลที่แยก x ออกจาก C; แต่ทุก x_k อยู่ใน C จึงเกิดข้อขัดแย้งกับลิมิต.

ให้

$$C := \overline{\operatorname{conv}}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

สมมติ $x \notin C$. ตามทฤษฎีบทการแยก มี $x' \in X'$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ ที่

$$\operatorname{Re}\langle y, x'\rangle \le \alpha \quad (y \in C), \qquad \operatorname{Re}\langle x, x'\rangle > \alpha.$$

เพราะ $x_k \in C$ ทุก k จึง $\operatorname{Re}\langle x_k, x'\rangle \le \alpha$. การลู่เข้าแบบอ่อนให้ลิมิต $\operatorname{Re}\langle x, x'\rangle \le \alpha$ ขัดแย้ง. ดังนั้น $x \in C$.

ข้อความที่สองตามจากนิยามของส่วนปิด: ถ้า $x \in C$ ทุก $\varepsilon > 0$ มีสมาชิกของ $\operatorname{conv}\{x_k\}$ ที่อยู่ห่างจาก x ไม่เกิน ε. สมาชิกนั้นเขียนได้เป็นผลรวมนูนจำกัด. $\square$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 7.2.7: การบรรลุระยะทางในปริภูมิสะท้อนกลับ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อนกลับ, $M \subset X$ ไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์, และ $x_0 \in X$. แล้วมี $m \in M$ ที่

$$\|x_0 - m\|_X = \operatorname{dist}(x_0, M) := \inf_{y \in M} \|x_0 - y\|_X.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** สร้างลำดับใน M ซึ่งค่าระยะทางลดลงเข้าหา d; ลำดับนี้มีขอบเขต; ความสะท้อนกลับให้ลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อน; เซตนูนปิดเก็บลิมิตไว้ และนอร์มเป็นกึ่งต่อเนื่องล่างจึงไม่ทำให้ระยะทางโตขึ้น.

1. **ลำดับมุ่งต่ำสุด (minimising sequence).** ให้ $d := \operatorname{dist}(x_0, M)$. สำหรับแต่ละ k เลือก $y_k \in M$ ที่
$$d \le \|x_0 - y_k\|_X < d + \frac{1}{k}.$$

2. **มีขอบเขต.** โดยอสมการสามเหลี่ยม
$$\|y_k\|_X \le \|y_k - x_0\|_X + \|x_0\|_X \le d + 1 + \|x_0\|_X.$$

3. **ลิมิตแบบอ่อน.** ตามทฤษฎีบทลำดับย่อยแบบอ่อน มีลำดับย่อย $y_{k_j} \rightharpoonup y$ ใน X. เพราะ M คอนเวกซ์และปิด ตามทฤษฎีก่อนหน้า $y \in M$.

4. **ระยะทางที่ลิมิต.** ลำดับ $y_{k_j} - x_0$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ $y - x_0$. นอร์มไม่เพิ่มขึ้นในลิมิต:
$$\|y - x_0\|_X \le \liminf_{j \to \infty} \|y_{k_j} - x_0\|_X = d.$$
ฝั่งกลับมาจากความหมายของระยะทางต่ำสุด เพราะ $y \in M$ จึง $\|y - x_0\|_X \ge d$. จึงเท่ากัน.

สรุป: ลำดับมุ่งต่ำสุดถูกกักไว้ในบอลที่มีขอบเขต; ความสะท้อนกลับให้ลิมิตแบบอ่อน; ความนูนปิดและความกึ่งต่อเนื่องล่างทำหน้าที่ที่เหลือ. □

ตัวอย่าง: ระยะทางถึงบอลหนึ่งหน่วย

ใน $\mathbb{R}^2$ ให้ $M = \{y : \|y\|_2 \le 1\}$ และ $x_0 = (3, 4)$. แล้ว $\|x_0\|_2 = 5$ และ

$$\operatorname{dist}(x_0, M) = 5 - 1 = 4.$$

จุดที่บรรลุคือการฉายในแนวรัศมี

$$m = \frac{x_0}{\|x_0\|_2} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

ซึ่งมี $\|m\|_2 = 1$ และ $\|x_0 - m\|_2 = 4$. ตัวเลขเหล่านี้คำนวณใน `code/funkana/ch07.py` และตรวจในแบบทดสอบ.

ข้อควรระวัง: ความสะท้อนกลับขาดไม่ได้

ให้ $\varphi : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$\varphi(f) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(1/n) - f(0).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แล้ว $|\varphi(f)| \le 2\|f\|_\infty$. ฟังก์ชัน $f_N(t) := \min\{1, 2Nt-1\}$ มีนอร์ม 1. สำหรับ n คงที่ เมื่อ $N \ge n$ จะได้ $f_N(1/n) = 1$; และ $|f_N(1/n)| \le 1$. เพราะ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$, การลู่เข้าภายใต้เครื่องหมายอนุกรมให้ $\varphi(f_N) \to 2$, จึง $\|\varphi\| = 2$. นอร์มนี้ไม่บรรลุ: ถ้า $\|f\|_\infty \le 1$ และ $|\varphi(f)| = 2$, ทุกพจน์ในผลรวมต้องมีเครื่องหมายเดียวกันและมีขนาด 1; จึงได้ $f(1/n) = \pm 1$ สำหรับทุก n แต่ $f(0) = \mp 1$, ขัดกับความต่อเนื่องที่ 0. พิจารณา $x(t) = t$ และเซตปิดนูน $M := \ker \varphi$. อสมการ $|\varphi(x-g)| \le \|\varphi\|\|x-g\|_\infty$ สำหรับ $g \in M$ ให้

$$\|x - g\|_\infty \ge \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \frac{\ln 2}{2}.$$

ขอบล่างนี้เป็นอินฟิมัม: เมื่อ N ใหญ่พอ $\varphi(f_N) > 0$. กำหนด $g_N := x - \frac{\ln 2}{\varphi(f_N)} f_N$; แล้ว

$$\varphi(g_N) = \varphi(x) - \frac{\ln 2}{\varphi(f_N)}\varphi(f_N) = 0, \qquad \|x - g_N\|_\infty = \frac{\ln 2}{\varphi(f_N)} \to \frac{\ln 2}{2}.$$

ถ้ามี $g \in M$ บรรลุระยะนี้ ฟังก์ชัน $(x-g)/(\ln 2/2)$ จะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำให้ φ บรรลุนอร์ม 2, ซึ่งพิสูจน์แล้วว่าเป็นไปไม่ได้. ดังนั้นระยะทางถึงเซตปิดนูน M มีอินฟิมัมที่ไม่บรรลุ. ตัวอย่างนี้แสดงว่าความปิดและความนูนอย่างเดียวไม่พอ; ทฤษฎีบทก่อนหน้าต้องอาศัยความสะท้อนกลับ.

สรุปใจความ

- X สะท้อนกลับเมื่อ J_X ทั่วถึง; สมบัตินี้สืบทอดถึงปริภูมิย่อยปิด ปริภูมิคู่ และภาพภายใต้สมสัณฐาน.
- ในปริภูมิสะท้อนกลับ การลู่เข้าแบบอ่อนและแบบอ่อน-ดาวในปริภูมิคู่เป็นอย่างเดียวกัน.
- ทุกลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิสะท้อนกลับมีลำดับย่อยลู่เข้าแบบอ่อน; นี่คือทิศที่เราใช้ของเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน.
- เซตนูนปิดปิดเชิงลำดับแบบอ่อน และบทตั้งของมาซูร์วางลิมิตแบบอ่อนไว้ในส่วนปิดของส่วนนูน.
- เซตนูนปิดไม่ว่างในปริภูมิสะท้อนกลับมีจุดที่ทำให้ระยะทางถึงจุดหนึ่งต่ำสุดจริง.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ c_0 เป็นปริภูมิของลำดับที่ลู่เข้าศูนย์พร้อมนอร์มสูงสุด. จงแสดงว่า c_0 ไม่สะท้อนกลับ โดยใช้ลำดับ $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ ที่มีหนึ่ง n ตัว. จงแสดงว่าลำดับทั้งลำดับไม่มีลำดับย่อยใดลู่เข้าแบบอ่อนใน c_0.

2. ให้ X สะท้อนกลับ และ $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยปิด. จงแสดงว่า X/Y พร้อมนอร์มผลหารสะท้อนกลับ.

3. ให้ $X = \ell^1$. จงแสดงว่าลำดับ e_n ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวสู่ 0 ในฐานะสมาชิกของ $(c_0)'$ แต่ไม่ลู่เข้าแบบอ่อนสู่ 0 ใน ℓ^1. อธิบายว่าทำไมตัวอย่างนี้ไม่ขัดกับข้อ (b) ของทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐานของปริภูมิสะท้อนกลับ.

4. ให้ X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อนกลับ และ $x_k \rightharpoonup x$. จงใช้บทตั้งของมาซูร์แสดงว่ามีลำดับของผลรวมนูนจำกัด

$$z_j = \sum_{k \in F_j} \lambda_{j,k} x_k, \qquad F_j \subset \mathbb{N} \text{ เป็นเซตจำกัด}, \quad \lambda_{j,k} \ge 0, \quad \sum_{k \in F_j} \lambda_{j,k} = 1,$$

ที่ $z_j \to x$ ตามนอร์ม.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-21

5. ใน $\mathbb{R}^2$ จงหาจุดในบอลปิดหนึ่งหน่วยที่ทำให้ระยะทางจาก $(3,4)$ ต่ำสุด และตรวจค่าตัวเลขด้วยสูตรระยะทาง.

6. ให้ $u_n(x) = \sin(nx)$ ใน $L^2(0,2\pi)$. จงใช้บทตั้งของมาซูร์กับค่าเฉลี่ยเซซาโรเพื่ออธิบายว่าทำไมจึงมีลำดับของผลรวมนูนที่ลู่เข้าสู่ 0 ตามนอร์ม. ค่าเฉลี่ยเซซาโรให้อัตราการลู่เข้าอะไร?

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. คู่ของ c_0 คือ ℓ^1 ผ่าน $\langle x,y\rangle = \sum_j x_j y_j$ และคู่ที่สองคือ ℓ^∞. ถ้า c_0 สะท้อนกลับ ทุก $z \in \ell^\infty$ ต้องเป็นภาพของลำดับใน c_0. แต่ลำดับคงที่ $z = (1,1,\dots)$ ไม่ได้มาจากลำดับใดใน c_0: ถ้า $J_{c_0}x = z$ แล้ว $x_j = z(e_j) = 1$ ทุก j จึง $x \notin c_0$. ดังนั้น c_0 ไม่สะท้อนกลับ.

   สำหรับ x_n ที่มีหนึ่ง n ตัว และ $y = (y_j) \in \ell^1$,

$$\langle x_n, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} y_j.$$

   ถ้ามีลำดับย่อย $x_{n_j} \rightharpoonup x$ ใน c_0 แล้วสำหรับทุก $y \in \ell^1$ ต้องมี $\langle x,y\rangle = \sum_j y_j$. นี่บังคับให้ $x = (1,1,1,\dots)$ ซึ่งไม่อยู่ใน c_0. จึงไม่มีลำดับย่อยใดลู่เข้าแบบอ่อนใน c_0. ข้อนี้ใช้ทั้งลำดับ ไม่ได้ใช้เพียงเวกเตอร์เดียว.

2. ให้ $q : X \to Z := X/Y$ เป็นการส่งผลหาร และสมมติ X สะท้อนกลับ. สำหรับ $z'' \in Z''$ นิยาม $L(q^*z') := z''(z')$ บน $q^*(Z') \subset X'$, เมื่อ $q^*z' = z' \circ q$. การส่งผลหารมีตัวผูกพัน $q^* : Z' \to X'$ เป็นสมมิติ จึง L นิยามได้ดีและ $\|L\| = \|z''\|$. ตามฮาห์น–บานาคขยาย L เป็น $x'' \in X''$ โดย $\|x''\| = \|L\|$. เพราะ X สะท้อนกลับ มี $x \in X$ ที่ $J_X x = x''$. ให้ $z = q(x)$. สำหรับ $z' \in Z'$,

$$(J_Z z)(z') = z'(q(x)) = (z' \circ q)(x) = x''(z' \circ q) = z''(z').$$

   จึง J_Z ทั่วถึง. (อีกวิธีคือใช้ทฤษฎีบทการส่งเปิดและสมสัณฐาน $X/\ker q \cong X/Y$.)

3. ใน $\ell^1 = (c_0)'$ การลู่เข้าแบบอ่อน-ดาวทดสอบกับ $y \in c_0$: $\langle e_n, y\rangle = y_n \to 0$. แต่การลู่เข้าแบบอ่อนใน ℓ^1 ทดสอบกับ $y \in \ell^\infty$; เลือก $y = (1,1,\dots)$ ได้ $\langle e_n, y\rangle = 1$ ทุก n จึงไม่ลู่เข้าสู่ 0. ตัวอย่างนี้ไม่ขัดกับข้อ (b) เพราะข้อ (b) ต้องการให้ c_0 สะท้อนกลับ ซึ่งไม่เป็นจริง.

4. ตามบทตั้งของมาซูร์ x อยู่ในส่วนปิดของส่วนนูนของ $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. สำหรับแต่ละ j เลือกผลรวมนูนจำกัด z_j ที่ $\|z_j - x\| < 1/j$. ดัชนีที่ปรากฏในผลรวมมีจำนวนจำกัด จึงเขียนเป็นเซต F_j ตามที่โจทย์กำหนด; และ $\|z_j - x\| \to 0$.

5. ให้ $x_0 = (3,4)$. ทุกจุดในบอลหนึ่งหน่วยมีนอร์มไม่เกิน 1 และโดยอสมการสามเหลี่ยมระยะทางอย่างน้อย $\|x_0\| - 1 = 4$. จุด $m = (3/5, 4/5)$ อยู่ในบอลและ

$$\|x_0 - m\|_2 = \left\| \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) \right\|_2 = \frac{20}{5} = 4.$$

   จึงเป็นจุดที่บรรลุ. ตัวเลข 4 และพิกัดข้างต้นตรงกับผลของ `exercise_projection_distance()`.

6. ตามทฤษฎีบท $\sin(nx) \rightharpoonup 0$; บทตั้งของมาซูร์จึงให้ผลรวมนูนของ u_n ที่ลู่เข้าสู่ 0 ตามนอร์ม. ค่าเฉลี่ยเซซาโร A_N เป็นผลรวมนูนแบบเฉพาะ และเราพิสูจน์ใน §7.1 ว่า $\|A_N\|_2 = \sqrt{\pi/N}$. ดังนั้นอัตราการลู่เข้าคือ $1/\sqrt{N}$. ข้อนี้แสดงให้เห็นว่าแม้ลำดับเดิมไม่ลู่เข้าตามนอร์ม ลำดับของค่าเฉลี่ยที่สร้างจากมันอาจลู่เข้าได้.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

อ่านต่อ

ความสะท้อนกลับให้ลำดับย่อยแบบอ่อน แต่ยังไม่ได้บอกว่าฟังก์ชันนัลที่เราสนใจมีค่าต่ำสุดที่จุดใด. ใน §7.3 เราจะรวมสามส่วนประกอบ: ความมีขอบเขตของลำดับมุ่งต่ำสุด, ความสะท้อนกลับเพื่อดึงลำดับย่อย, และความกึ่งต่อเนื่องล่างของฟังก์ชันนัลพลังงานเพื่อส่งขอบเขตค่าลงไปยังลิมิต. ผลลัพธ์คือวิธีตรงสำหรับปัญหาค่าต่ำสุด.
ในหน่วยถัดไป เราใช้ $W_0^{1,2}(0,1)$ เป็นตัวอย่างหลัก เพราะอสมการปวงกาเรให้ขอบเขตที่ชัดเจน และความสะท้อนกลับของปริภูมิฮิลเบิร์ตให้ลำดับย่อยที่ต้องการ. เราจะเห็นว่าค่าต่ำสุดมีจริง ไม่ใช่เพียงขอบล่างที่เข้าใกล้ได้.

7.3 วิธีตรง อสมการปวงกาเร และการมีอยู่ของค่าต่ำสุด

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในสองหัวข้อก่อน เราเรียนรู้ว่าจะดึงลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนได้เมื่อใด และเซตนูนปิดเก็บลิมิตแบบอ่อนไว้อย่างไร. หัวข้อนี้ประกอบชิ้นส่วนเหล่านี้เป็น วิธีการ หนึ่ง: เลือกลำดับที่ค่าของฟังก์ชันนัลลดลงใกล้ค่าต่ำสุด, ใช้ความมีขอบเขตและความสะท้อนกลับดึงลำดับย่อย, แล้วใช้ความกึ่งต่อเนื่องล่างเพื่อบอกว่าลิมิตมีค่าไม่มากกว่าค่าต่ำสุดที่เข้าใกล้. ถ้าค่าที่เข้าใกล้คือขอบล่างมากสุด ลิมิตก็ต้องบรรลุค่านั้น.
หัวใจทางเทคนิคมีสองข้อ. ข้อแรกคือ**อสมการปวงกาเร** (Poincaré inequality): นอร์มของฟังก์ชันถูกคุมด้วยนอร์มของอนุพันธ์เมื่อฟังก์ชันไม่สามารถเพิ่มค่าคงตัวได้. ข้อที่สองคือ**วิธีตรงของแคลคูลัสของการแปรผัน** (direct method of the calculus of variations): เปลี่ยนการมีอยู่ของคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์เป็นการถามเรื่องการบรรลุค่าต่ำสุดของ**ฟังก์ชันนัลพลังงาน** (energy functional).

7.3.1 อสมการปวงกาเรและพลังงาน

อ่านแบบเข้าใจง่าย: ปริภูมิที่เราจะใช้

ให้ $W_0^{1,2}(0,1)$ เป็นส่วนปิดในปริภูมิของฟังก์ชัน $u \in L^2(0,1)$ ที่มีอนุพันธ์อ่อน $u' \in L^2(0,1)$ ของฟังก์ชันเรียบที่หายเป็นศูนย์ในย่านใกล้จุดปลายทั้งสอง, ภายใต้นอร์ม

$$\|u\|_{W^{1,2}} := \left(\int_0^1 |u|^2 + |u'|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

ปริภูมินี้เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตที่บริบูรณ์ และเป็นปริภูมิสะท้อนกลับเพราะเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต. ฟังก์ชันใน $W_0^{1,2}$ มีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบในความหมายของการประมาณด้วยฟังก์ชันที่หายใกล้ขอบ. รายละเอียดของอนุพันธ์อ่อนอยู่ในบทว่าด้วยดิสทริบิวชันและโซโบเลฟ; ในบทนี้เราใช้เฉพาะสมบัติที่ระบุไว้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 7.3.1: อสมการปวงกาเรหนึ่งมิติและค่าคงตัวที่แหลม

สำหรับ $u \in W_0^{1,2}(0,1)$,

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \le \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2(0,1)}.$$

ถ้า $\int_0^1 u\,dx = 0$ อสมการเดียวกันยังเป็นจริงสำหรับ $u \in W^{1,2}(0,1)$. ค่าคงตัว $1/\pi$ เป็นค่าที่ดีที่สุด: ในกรณีแรกมีสมการเมื่อ $u(x) = c\sin(\pi x)$ และในกรณีค่าเฉลี่ยศูนย์มีสมการเมื่อ $u(x) = c\cos(\pi x)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขยาย u ในฐานตั้งฉากของไซน์หรือโคไซน์; การหาอนุพันธ์คูณสัมประสิทธิ์ที่ k ด้วย $k\pi$; เพราะ $k \ge 1$ ตัวคูณจึงมีขนาดอย่างน้อย π. พาร์เซวัลเปลี่ยนอสมการระหว่างฟังก์ชันกับอนุพันธ์เป็นอสมการของอนุกรมจำนวน.

1. **กรณีขอบศูนย์.** ให้ $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ สำหรับ $k \ge 1$. ระบบนี้เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(0,1)$. การขยายฟูเรียร์ของ u และ u' ลู่เข้าใน L^2; สำหรับ $u \in W_0^{1,2}$ การขยายเดียวกันลู่เข้าใน $W^{1,2}$ เพราะสามารถประมาณ u ด้วยฟังก์ชันเรียบที่หายใกล้ขอบและผ่านลิมิต. เขียน

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k, \qquad u' = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi\, b_k\, \widetilde{\varphi}_k,$$

โดย $\widetilde{\varphi}_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x)$. พาร์เซวัลให้

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2, \qquad \|u'\|_{L^2}^2 = \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |b_k|^2.$$

เพราะ $k^2 \ge 1$ จึง $\|u\|_{L^2}^2 \le \pi^{-2}\|u'\|_{L^2}^2$.

2. **กรณีค่าเฉลี่ยศูนย์.** ใช้ฐาน $\{1, \sqrt{2}\cos(k\pi x) : k \ge 1\}$. พจน์คงที่หายเพราะค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และการหาอนุพันธ์ให้ตัวคูณ $k\pi$ กับพจน์ที่ k เช่นเดิม. อสมการจึงตามมาด้วยเหตุผลเดียวกัน.

3. **ความแหลม.** สำหรับ $u = c\sin(\pi x)$,

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{|c|^2}{2}, \qquad \|u'\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2|c|^2}{2},$$

จึงได้สมการ. สำหรับ $u = c\cos(\pi x)$ ค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์และได้อัตราส่วนเดียวกัน. ไม่มีค่าคงตัวที่เล็กกว่า $1/\pi$ ที่ใช้ได้กับทุกฟังก์ชัน เพราะฟังก์ชันเหล่านี้บรรลุสมการ.

สรุป: การหาอนุพันธ์ในฐานฟูเรียร์คูณสัมประสิทธิ์ด้วย $k\pi$; พจน์แรกจึงเล็กที่สุดเมื่อเทียบกับอนุพันธ์ และให้ค่าคงตัว $1/\pi$. □

ข้อควรระวัง: ต้องมีเงื่อนไขตัดค่าคงตัว

ถ้าไม่มีเงื่อนไขขอบหรือค่าเฉลี่ยศูนย์ ฟังก์ชันคงที่ $u \equiv c$ มี $u' = 0$ แต่ $\|u\|_{L^2} = |c| > 0$. อสมการจึงเป็นไปไม่ได้. คำว่า “ปวงกาเร” ในที่นี้จึงมาพร้อมเงื่อนไขที่กำจัดทิศค่าคงตัวเสมอ. เราไม่เขียน $\|u\| \le C\|u'\|$ โดยไม่ตรวจเงื่อนไขนี้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 7.3.2: อสมการปวงกาเรทั่วไป (ใช้โดยไม่พิสูจน์)

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด มีขอบเขต เชื่อมโยง และมี**ขอบลิพชิทซ์** (Lipschitz boundary) (ขอบที่มองใกล้ ๆ เป็นกราฟของฟังก์ชันลิพชิทซ์), ให้ $1 < p < \infty$ และ $M \subset W^{1,p}(\Omega)$ ไม่ว่าง คอนเวกซ์ และปิด. สำหรับ $u_0 \in M$ ข้อความสองข้อต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) มี $C_0 < \infty$ ที่สำหรับทุก $\xi \in \mathbb{R}$, ถ้า $u_0 + \xi \in M$ แล้ว $|\xi| \le C_0$;

(ii) มี $C < \infty$ ที่ $\|u\|_{L^p} \le C(\|\nabla u\|_{L^p} + 1)$ สำหรับทุก $u \in M$.

ถ้า M เป็น**กรวยที่มียอดที่** 0 (cone with apex 0) (เซตที่ปิดภายใต้การคูณด้วยจำนวนจริงไม่ติดลบ) ด้วย อสมการใน (ii) ใช้ได้ในรูป $\|u\|_{L^p} \le C\|\nabla u\|_{L^p}$ โดยไม่มี $+1$. เราใช้ทฤษฎีบทนี้เป็นผลจาก Alt 2012, ทฤษฎีบท 6.16 และไม่พิสูจน์ในบทนี้; กรณีหนึ่งมิติที่มีค่าคงตัวชัดเจนพิสูจน์แล้วข้างต้น.

ทฤษฎีบทนี้ใช้ได้กับเซต M ที่ไม่ใช่กรวยด้วย โดยจ่ายราคาเป็นพจน์ $+1$; ในตัวอย่างหนึ่งมิติของเรา เราใช้รูปที่แหลมกว่าซึ่งไม่ต้องมี $+1$.

นิยาม 7.3.1: ฟังก์ชันนัลพลังงานและวิธีตรง

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด มีขอบเขต เชื่อมโยง และมีขอบลิพชิทซ์; เราทำงานเหนือจำนวนจริง. ให้ $A(x) = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกวัดได้ สมมาตร และเป็นเชิงวงรีเอกรูป: มี $c_0 > 0$ ที่

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0|\xi|^2 \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n, \text{ เกือบทุก } x),$$

และให้ $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$. นิยามฟังก์ชันนัลพลังงานบน $W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R})$ โดย

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i u\,\partial_j u\,dx + \int_\Omega f u\,dx, \qquad u \in W^{1,2}(\Omega;\mathbb{R}).$$

การหาค่าต่ำสุดของ E บนเซต M ที่กำหนด เรียกว่าวิธีตรง: แสดงว่ามีลำดับมุ่งต่ำสุด, ดึงลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน, แล้วพิสูจน์ว่าลิมิตบรรลุค่าต่ำสุด.

7.3.2 การมีอยู่ของค่าต่ำสุด

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทตั้ง 7.3.3: ฟังก์ชันนูนต่อเนื่องเป็นกึ่งต่อเนื่องล่างแบบอ่อน

ให้ V เป็นปริภูมินอร์ม และ $q : V \to \mathbb{R}$ ต่อเนื่องและนูน. ถ้า $v_k \rightharpoonup v$ แล้ว

$$q(v) \le \liminf_{k\to\infty} q(v_k).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ให้ $c < q(v)$. เซต $\{q \le c\}$ ปิดและนูน จึงแยกจาก v ได้ด้วยฟังก์ชันนัล; ลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนจึงต้องอยู่นอกเซตนี้ในที่สุด.

ให้ $c < q(v)$. เพราะ q ต่อเนื่อง เซต $C := \{w : q(w) \le c\}$ ปิด และเพราะ q นูน C คอนเวกซ์. ถ้า $C = \varnothing$ แล้ว $q(v_k) > c$ ทุก k อยู่แล้ว จึงได้ข้อสรุปทันที. สมมติต่อไปว่า $C \neq \varnothing$. จุด v อยู่นอก C. ตามทฤษฎีบทการแยก มี $v' \in V'$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ ที่

$$\operatorname{Re}\langle w, v'\rangle \le \alpha \quad (w \in C), \qquad \operatorname{Re}\langle v, v'\rangle > \alpha.$$

เพราะ $v_k \rightharpoonup v$ จึง $\operatorname{Re}\langle v_k, v'\rangle \to \operatorname{Re}\langle v, v'\rangle > \alpha$. สำหรับ k ใหญ่พอ $\operatorname{Re}\langle v_k, v'\rangle > \alpha$; ดังนั้น $v_k \notin C$ และ $q(v_k) > c$. เพราะ $c < q(v)$ ใด ๆ ก็ได้ จึง $q(v) \le \liminf q(v_k)$. □

บทตั้งนี้เป็นชิ้นส่วนที่เปลี่ยนขอบเขตของค่าพลังงานให้เป็นขอบเขตของค่าที่ลิมิต: เราจะใช้มันกับ $q = E$ ในทฤษฎีบทถัดไป. เงื่อนไขที่เหลือมีเพียง M ปิดและคอนเวกซ์ กับความสะท้อนกลับของปริภูมิ.

ทฤษฎีบท 7.3.4: วิธีตรงสำหรับฟังก์ชันนัลพลังงาน

ให้ Ω, A, f เป็นดังในนิยามฟังก์ชันนัลพลังงาน และ $M \subset W^{1,2}(\Omega)$ ไม่ว่าง ปิด คอนเวกซ์ และมี $u_0 \in M$ ที่ทำให้สมบัติปวงกาเร (i) ของทฤษฎีบทปวงกาเรทั่วไปเป็นจริง. แล้ว E มีค่าต่ำสุดบน M: มี $u \in M$ ที่ $E(u) \le E(v)$ สำหรับทุก $v \in M$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ความเชิงวงรีให้พจน์กำลังสองคุมอนุพันธ์ และปวงกาเรคุมนอร์มทั้งหมด; ลำดับมุ่งต่ำสุดจึงมีขอบเขต. ความสะท้อนกลับของ $W^{1,2}$ ให้ลำดับย่อยแบบอ่อน; ความนูนปิดของ M เก็บลิมิต; ความกึ่งต่อเนื่องล่างของพลังงานส่งขอบเขตค่าลงไปยังลิมิต.

1. **ความบังคับให้มีขอบเขต.** ให้ $t := \|\nabla u\|_{L^2}$ และ C เป็นค่าคงตัวจากปวงกาเร. จากสมบัติเชิงวงรีและอสมการปวงกาเร
$$E(u) \ge \frac{c_0}{2}t^2 - \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \ge \frac{c_0}{2}t^2 - \|f\|_{L^2}C(t+1).$$
พจน์ขวาลู่เข้าสู่ $+\infty$ เมื่อ $t \to \infty$.

2. **ลำดับมุ่งต่ำสุด.** ให้ $m := \inf_{v\in M} E(v)$. เพราะ $M \neq \varnothing$ และ E มีค่าจริงบน M, $m < \infty$; จากขอบเขตล่างในขั้นที่ 1, $m > -\infty$. เลือก $u_k \in M$ ที่ $m \le E(u_k) < m + 1/k$, จึง $E(u_k) \to m$ และมีขอบเขต. จากขั้นที่ 1, $t_k = \|\nabla u_k\|$ มีขอบเขต; จากปวงกาเร, $\|u_k\|_{W^{1,2}}$ มีขอบเขต.

3. **ลิมิตแบบอ่อน.** เพราะ $W^{1,2}(\Omega)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต จึงสะท้อนกลับ. ตามทฤษฎีบทลำดับย่อยแบบอ่อน มีลำดับย่อย $u_{k_j} \rightharpoonup u$ ใน $W^{1,2}$. เพราะ M คอนเวกซ์และปิด ตามทฤษฎีบทเซตนูนปิดปิดเชิงลำดับแบบอ่อน $u \in M$.

4. **กึ่งต่อเนื่องล่าง.** พจน์กำลังสอง $q(u) = \frac{1}{2}\int \sum a_{ij}\partial_i u \partial_j u$ เป็นฟังก์ชันนูนต่อเนื่องของ u ใน $W^{1,2}$; พจน์เชิงเส้น $\ell(u) = \int fu$ เป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องเพราะ $f \in L^2$. ตามบทตั้งก่อนหน้า q เป็นกึ่งต่อเนื่องล่างแบบอ่อน และ ℓ ต่อเนื่องแบบอ่อน เพราะเป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่อง. ดังนั้น
$$E(u) \le \liminf_{j\to\infty} E(u_{k_j}) = m.$$

5. **สรุป.** เพราะ $u \in M$ นิยามของ m ให้ $E(u) \ge m$. จึง $E(u) = m$ และ u เป็นจุดต่ำสุด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุป: ปวงกาเรเปลี่ยนการคุมอนุพันธ์เป็นการคุมนอร์ม; ความสะท้อนกลับให้ลิมิต; ความนูนและความกึ่งต่อเนื่องล่างรักษาค่าต่ำสุดไว้ในลิมิต. □

ข้อควรระวัง: อสมการปวงกาเรและค่าคงตัว

ในขั้นที่ 1 เราใช้ C จากสมบัติปวงกาเร (i). ถ้า M มีทิศค่าคงตัวที่ยาวได้ไม่จำกัด ค่าคงตัว C เช่นนั้นไม่มี และลำดับที่มีค่าคงตัวโตขึ้นอาจทำให้ E ไม่บังคับให้มีขอบเขต. ตัวอย่างง่ายคือ $E(u) = \frac{1}{2}\int (u')^2$ บน $M = W^{1,2}(0,1)$: ฟังก์ชันคงที่ทุกตัวมีพลังงาน 0 ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด แต่จุดต่ำสุดไม่เป็นหนึ่งเดียว. การมีจุดต่ำสุดในตัวอย่างนี้จึงไม่ได้แทนสมมติฐานความบังคับให้มีขอบเขตที่ต้องใช้ในทฤษฎีบท.

ทฤษฎีบท 7.3.5: อสมการแปรผันและสมการออยเลอร์–ลากรานจ์

ให้ $u \in M$ เป็นจุดต่ำสุดของ E ในทฤษฎีก่อนหน้า. แล้ว u เป็นคำตอบของ**อสมการแปรผัน** (variational inequality)

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u\,\partial_j(v-u)\,dx + \int_\Omega f(v-u)\,dx \geq 0 \qquad (v \in M).$$

กลับกัน ถ้า $u \in M$ ทำอสมการนี้ให้เป็นจริง แล้ว u เป็นจุดต่ำสุด. ถ้า $M = u_0 + M_0$ โดย M_0 เป็นปริภูมิย่อยปิด เราเรียก M ว่า**ปริภูมิย่อยสัมพรรค** (affine subspace) (เซตที่ได้จากการเลื่อนปริภูมิย่อยด้วยเวกเตอร์หนึ่งตัว) อสมการสมมูลกับ

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u\,\partial_j v\,dx + \int_\Omega f v\,dx = 0 \qquad (v \in M_0).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขยับจากจุดต่ำสุดไปทาง v ทีละน้อย; อัตราการเปลี่ยนแปลงเมื่อเริ่มขยับออกจาก u ห้ามเป็นลบ. กลับกัน ใช้การกระจายเทย์เลอร์กำลังสองซึ่งมีพจน์เหลือไม่ติดลบ. เมื่อ M เป็นปริภูมิย่อยสัมพรรค เราขยับไปทั้งสองทางได้; อสมการสองด้านบีบให้เหลือสมการ.

1. **จากจุดต่ำสุดไปสู่อสมการ.** ให้ $v \in M$ และ $u_t = (1-t)u + tv \in M$ สำหรับ $0 \leq t \leq 1$ เพราะ M คอนเวกซ์. แล้ว $E(u_t) \geq E(u)$ และ
   $$0 \leq \frac{E(u_t)-E(u)}{t} = \int_\Omega \sum a_{ij}\partial_i u\,\partial_j(v-u) + f(v-u)\,dx + \frac{t}{2}\int_\Omega \sum a_{ij}\partial_i(v-u)\partial_j(v-u)\,dx.$$
   ให้ $t \downarrow 0$ ได้อสมการ.

2. **กลับกัน.** ถ้าอสมการเป็นจริง แล้วสำหรับ $v \in M$,
   $$E(v) - E(u) = \int_\Omega \sum a_{ij}\partial_i u\,\partial_j(v-u) + f(v-u)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum a_{ij}\partial_i(v-u)\partial_j(v-u)\,dx.$$
   เทอมแรกไม่ติดลบตามอสมการ และเทอมที่สองไม่ติดลบเพราะ A เป็นเชิงวงรี. จึง $E(v) \geq E(u)$.

3. **กรณีปริภูมิย่อยสัมพรรค.** ถ้า $M = u_0 + M_0$ และ $v \in M_0$ แล้ว $u \pm v \in M$. แทน v และ $-v$ ในอสมการ ได้สองอสมการที่เครื่องหมายตรงข้ามกัน จึงได้สมการเชิงเส้น. กลับกัน ถ้าสมการเป็นจริงสำหรับทุก $w \in M_0$ และ $v \in M$ แล้ว $v - u \in M_0$ จึงเทอมแรกในอสมการเป็นศูนย์.

สรุป: อสมการแปรผันคือเงื่อนไข “อนุพันธ์ทุกทิศไม่ติดลบ” บนเซตที่ยอมให้; ถ้าขยับได้ทั้งสองทาง เงื่อนไขอสมการจะกลายเป็นสมการ. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

บทแทรก 7.3.6: ความมีหนึ่งเดียวภายใต้การกำจัดทิศค่าคงตัว

ภายใต้สมมติฐานของทฤษฎีวิธีตรง ให้ u_1, u_2 เป็นจุดต่ำสุดสองจุด. แล้ว $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ เกือบทุกแห่ง. ถ้า M ไม่มีทิศค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ กล่าวคือ $u \in M$ และ $u + \xi \in M$ สำหรับค่าคงตัว ξ บังคับ $\xi = 0$ แล้ว $u_1 = u_2$.

พิสูจน์. ใช้อสมการแปรผันกับ u_1 โดยเลือก $v = u_2$ และกับ u_2 โดยเลือก $v = u_1$ แล้วบวก:

$$0 \geq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i(u_1 - u_2)\partial_j(u_1 - u_2)\,dx \geq c_0 \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,dx.$$

จึง $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ เกือบทุกแห่ง. เพราะ Ω เชื่อมโยง จึงมีค่าคงตัว $\xi \in \mathbb{R}$ ที่ $u_1 - u_2 = \xi$ เกือบทุกแห่ง. เนื่องจาก $u_2 \in M$ และ $u_2 + \xi = u_1 \in M$, เงื่อนไขกำจัดทิศค่าคงตัวให้ $\xi = 0$. $\square$

7.3.3 ตัวอย่างที่คำนวณได้และการกลับไปยังสัญญาณ

ตัวอย่าง: พลังงานที่มีคำตอบชัดเจน

ให้ $E : W_0^{1,2}(0,1) \to \mathbb{R}$

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2\,dx + \int_0^1 6x\,u(x)\,dx.$$

สมการออยเลอร์–ลากรานจ์คือ $-u'' + 6x = 0$ พร้อม $u(0) = u(1) = 0$. คำตอบคือ

$$u(x) = x^3 - x.$$

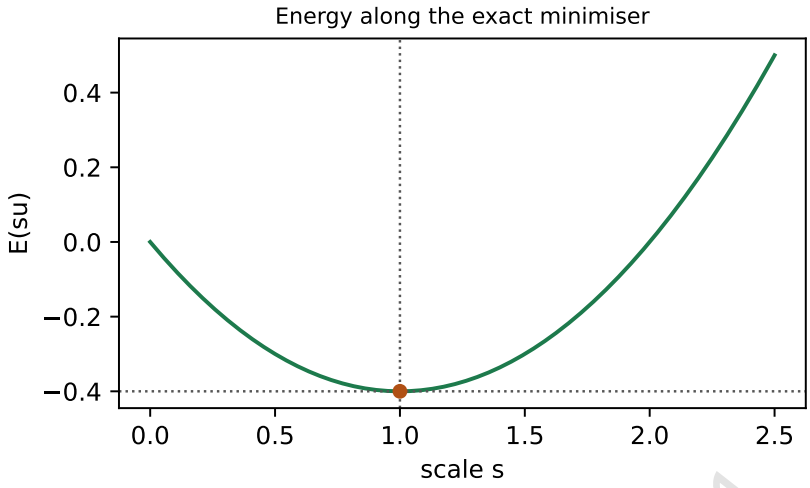
ตรวจโดยตรง: $u''(x) = 6x$ และ $u(0) = u(1) = 0$. ค่าของพลังงานแยกเป็น

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2 - 1)^2\,dx = \frac{2}{5}, \qquad \int_0^1 6x(x^3 - x)\,dx = -\frac{4}{5},$$

จึง $E(u) = 2/5 - 4/5 = -2/5$. ค่าที่จุด $x = 1/2$ คือ $u(1/2) = 1/8 - 1/2 = -3/8$. ตัวเลขทั้งหมดนี้คำนวณด้วยสูตรและตรวจซ้ำด้วยปริพันธ์เชิงตัวเลขใน `code/funkana/ch07.py`.

ในตัวอย่างนี้ $M = W_0^{1,2}(0,1)$ ไม่มีทิศค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ เพราะฟังก์ชันคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ไม่เป็นศูนย์ที่ขอบทั้งสอง. ตามบทแทรกความมีหนึ่งเดียว จุดต่ำสุดจึงมีเพียงตัวเดียว. ถ้าเปลี่ยน M เป็น $W^{1,2}(0,1)$ ทั้งปริภูมิแล้ว $E(u+c) = E(u) + 3c$; เมื่อ $c \to -\infty$ พลังงานจึงไม่ถูกจำกัดจากด้านล่างและไม่มีจุดต่ำสุด. เงื่อนไขกำจัดทิศค่าคงตัวในกรณีนี้จึงจำเป็นต่อความบังคับให้มีขอบเขต.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 7.3: พลังงานตามแนว $s \mapsto E(su)$ เมื่อ $u(x) = x^3 - x$ เป็นจุดต่ำสุด. พลังงานเป็นพาราโบลาที่มีค่าต่ำสุด $-2/5$ ที่ $s = 1$; เส้นประแสดงระดับต่ำสุดและตำแหน่ง $s = 1$ (สร้างจาก `code/funkana/ch07.py`).

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

กลับมาที่คำถามเปิดบท: ความเร็วจากผลต่างของเฟรม

ในแบบจำลองของเรา สัญญาณจริงคือ $I(t) = \sin t$ บนหนึ่งคาบ. ใช้จุดตัวอย่าง $t_j = 2\pi j/N$ สำหรับ $j = 0, \dots, N-1$ และเพิ่มสัญญาณรบกวน $\eta_j = \sigma \cos(\pi j/2)$, โดย $N = 256$, $\sigma = 0.001$ และใช้อินเด็กซ์แบบคาบ. ให้ $I_j = I(t_j) + \eta_j$; การประมาณความเร็วคือ

$$v_h(t_j) = \frac{I_{j+1} - I_{j-1}}{2h}, \qquad h = \frac{2\pi}{N}.$$

ดังนั้น $h = \pi/128 \approx 0.0245437$. ถ้าไม่มีสัญญาณรบกวน ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดจากการประมาณคือ

$$1 - \frac{\sin h}{h} \approx 0.000100396.$$

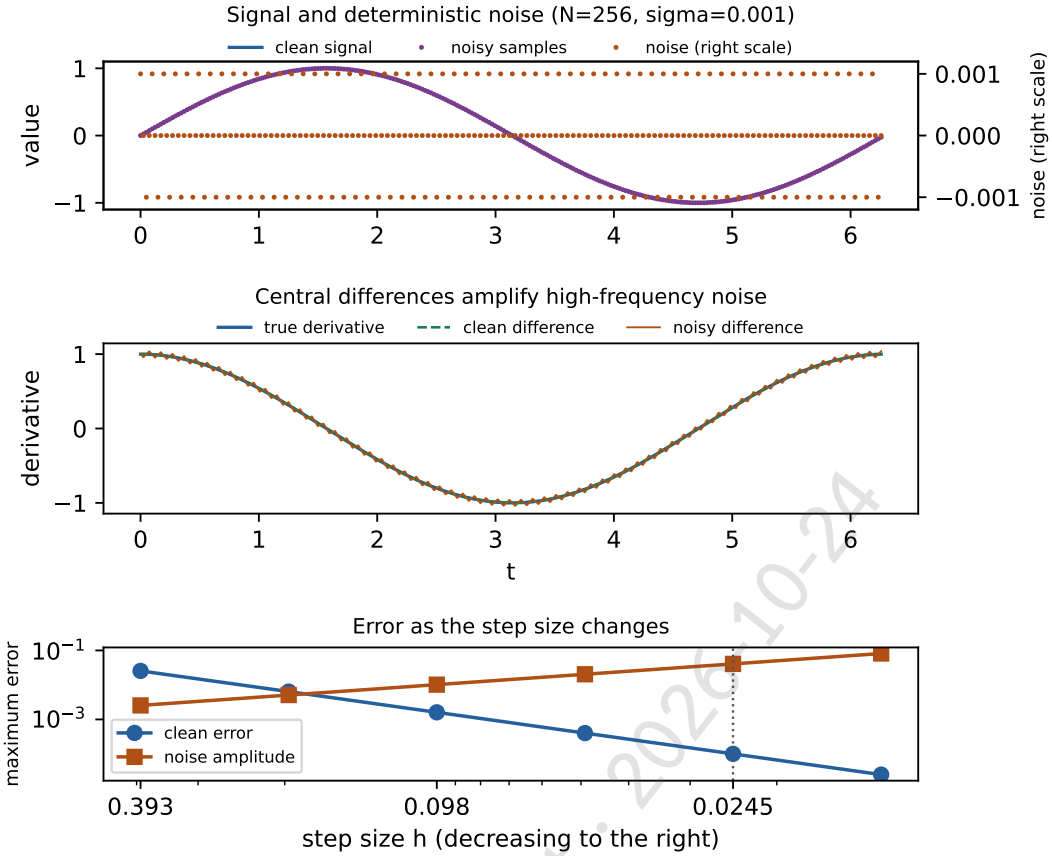
การหารด้วย $2h$ ขยายความต่างของสัญญาณรบกวนตามสูตร

$$\frac{\sigma}{h} \approx 0.0407437,$$

และค่าคลาดเคลื่อนรวมที่วัดได้ในแบบจำลองคือ 0.0408440. อัตราส่วนต่อค่าคลาดเคลื่อนของสัญญาณสะอาดคือประมาณ 406.83. ตัวเลขเหล่านี้อธิบายภาพที่เห็นในรูปที่ 7.4: การลด h ทำให้การประมาณของสัญญาณสะอาดดีขึ้นช้า ๆ แต่ขยายสัญญาณรบกวนเร็วขึ้นมาก. ตัวอย่างแยกใน §7.1 แสดงว่าการเฉลี่ยเซซาโรของลำดับไซน์ช่วยให้ลำดับเฉลี่ยลู่เข้าตามนอร์ม.

ข้อควรระวัง: ตัวเลขจากการจำลอง

ตัวเลข 0.0245437, 0.000100396, 0.0407437, 0.0408440 และ 406.83 มาจากแบบจำลองกำหนดได้ในหัวข้อนี้ ไม่ใช่การวัดจากกล้องหรือแอปจริง. เราใช้พวกมันเพื่อตรวจความเข้าใจเรื่องการขยายความถี่สูง ไม่ได้อ้างว่าเป็นค่าความคลาดเคลื่อนของอุปกรณ์ใด. การเปลี่ยนรูปแบบสัญญาณรบกวนหรือค่าคงตัวจะเปลี่ยนตัวเลข แม้ข้อสรุปเชิงคุณภาพว่าการหารด้วย h ขยายความถี่สูงยังคงเดิม.



รูปที่ 7.4: แบบจำลองสัญญาณและผลต่างส่วนกลาง: สัญญาณรบกวนในแผงบนแสดงตามแกนขวา; แผงกลางเปรียบเทียบอนุพันธ์จริงกับผลต่างจากข้อมูลสะอาดและข้อมูลมีสัญญาณรบกวน; แผงล่างแสดงการเปลี่ยนของค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ h เปลี่ยน (สร้างจาก `code/funkana/ch07.py`).

สัมบูรณ์ · Preprint · 2026-10-24

สรุปใจความ

- อสมการปวงกาเรคุมนอร์มของฟังก์ชันด้วยนอร์มของอนุพันธ์ เมื่อกำจัดทิศค่าคงตัว; ในหนึ่งมิติค่าคงตัวที่แหลมคือ $1/\pi$.
- วิธีตรงทำให้พลังงานมีค่าต่ำสุดจริง: ลำดับมุ่งต่ำสุดมีขอบเขต, ความสะท้อนกลับให้ลิมิตแบบอ่อน, เซตนูนปิดเก็บลิมิต, และพลังงานเป็นกึ่งต่อเนื่องล่าง.
- จุดต่ำสุดสมมูลกับอสมการแปรผัน; บนปริภูมิย่อยสัมพรรค อสมการกลายเป็นสมการออยเลอร์–ลากรานจ์.
- ตัวอย่าง $E(u) = \frac{1}{2}\int (u')^2 + \int 6xu$ มีจุดต่ำสุด $u(x) = x^3 - x$ และ $E(u) = -2/5$.
- ในแบบจำลองผลต่างส่วนกลาง การลด h ทำให้เทอมสัญญาณรบกวน σ/h โตขึ้นและกลบความแม่นยำของสูตร.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จงพิสูจน์อสมการปวงกาเร $\|u\|_{L^2(0,1)} \le \pi^{-1}\|u'\|_{L^2(0,1)}$ สำหรับ $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ โดยใช้ฐานไซน์ และแสดงว่า $u(x)=\sin(\pi x)$ ทำให้เป็นสมการ.

2. ให้ $u(x)=\cos(\pi x)$ บน $(0,1)$. จงคำนวณ $\|u\|_{L^2}$, $\|u'\|_{L^2}$ และอัตราส่วน $\|u\|/\|u'\|$. ตรวจว่าค่าเท่ากับ $1/\pi$ หรือไม่.

3. ตรวจว่าฟังก์ชัน $u(x)=x^3-x$ เป็นคำตอบของ $-u''+6x=0$ พร้อมเงื่อนไขขอบ $u(0)=u(1)=0$ และคำนวณพลังงาน $E(u)$ กับการแยกเป็นพจน์อนุพันธ์กับพจน์บังคับ.

4. สำหรับพลังงานในข้อ 3 จงเขียนอสมการแปรผันบน $M=W_0^{1,2}(0,1)$ แล้วแสดงว่ามันสมมูลกับสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น.

5. ให้ $n \ge 2$ และให้ u_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่เท่ากับ -1 บน $[0,1/2-1/n]$, เท่ากับ 1 บน $[1/2+1/n,1]$ และเป็นเส้นตรงบนช่วงเชื่อม. ให้ $F(u):=\int_0^1 (u^2-1)^2\,dx$ บนเซต $M=\{u\in C[0,1] : u(0)=-1,\ u(1)=1\}$. จงแสดงว่า
$$F(u_n)=\int_0^1 (u_n^2-1)^2\,dx = \frac{16}{15n} \longrightarrow 0,$$
แต่ไม่มี $u\in M$ ที่ $F(u)=0$. อธิบายว่าทำไมนี่เป็นตัวอย่างที่ค่าขอบล่างมากสุดไม่ถูกบรรลุ.

6. ให้ $u_n(x)=n^{-1}\sin(n\pi x)$ ในปริภูมิจริง $W_0^{1,2}(0,1;\mathbb{R})$. จงแสดงว่า $u_n \rightharpoonup 0$ ใน $W^{1,2}(0,1;\mathbb{R})$ แต่ $\|u_n'\|_{L^2}$ ไม่ลู่เข้าสู่ศูนย์. ค่าของ $\|u_n'\|_{L^2}$ คือเท่าใด?

7. ใช้ฟังก์ชันใน `code/funkana/ch07.py` ตรวจค่าที่พิมพ์ใน §7.3.3: $h=\pi/128$, ค่าคลาดเคลื่อนของสัญญาณสะอาด, ขนาดของสัญญาณรบกวนที่ถูกขยาย และอัตราส่วนรวม. จงอธิบายว่าการคำนวณเชิงตัวเลขยืนยันสูตรใด และไม่ได้ยืนยันข้อใด.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ใช้การขยาย $u=\sum b_k \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ และ $u'=\sum k\pi b_k\sqrt{2}\cos(k\pi x)$. พาร์เซวัลให้
$$\|u\|_2^2=\sum |b_k|^2, \qquad \|u'\|_2^2=\pi^2\sum k^2|b_k|^2 \ge \pi^2\sum |b_k|^2.$$
จึง $\|u\|_2 \le \pi^{-1}\|u'\|_2$. สำหรับ $u=\sin(\pi x)$, $\|u\|_2^2=1/2$ และ $\|u'\|_2^2=\pi^2/2$; อัตราส่วนเป็น $1/\pi$ จึงเป็นสมการ.

2. $\|u\|_2^2=\int_0^1\cos^2(\pi x)dx=1/2$ และ $u'=-\pi\sin(\pi x)$ ให้ $\|u'\|_2^2=\pi^2/2$. อัตราส่วนคือ $(1/\sqrt{2})/(\pi/\sqrt{2})=1/\pi$. ค่าเชิงตัวเลขที่คำนวณได้คือ 0.7071068, 2.2214415 และ 0.3183099 ตามลำดับ.

3. $u'=3x^2-1$ และ $u''=6x$; $u(0)=0$, $u(1)=0$. พจน์อนุพันธ์คือ
$$\frac{1}{2}\int_0^1 (9x^4-6x^2+1)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}-2+1\right)=\frac{2}{5}.$$
พจน์บังคับคือ
$$\int_0^1 6x(x^3-x)dx=6\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{5}.$$

สัมบูรณ์ · Preprint · 2026-10-24

ดังนั้น $E(u) = 2/5 - 4/5 = -2/5$ และ $u(1/2) = -3/8$. การคำนวณเชิงตัวเลขให้ค่าเดียวกัน.

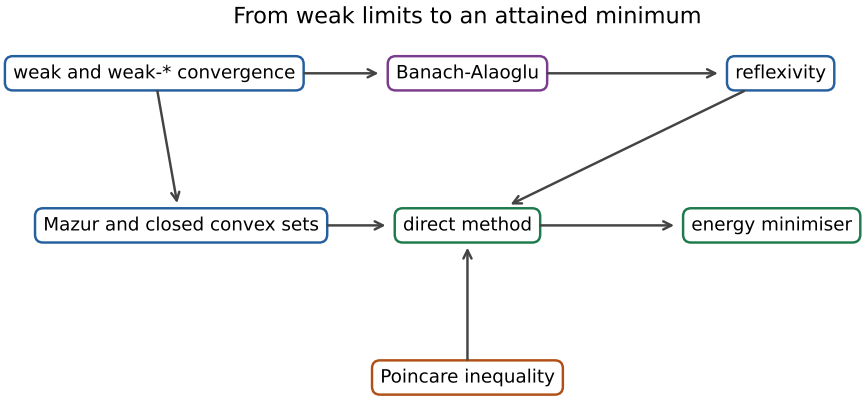
4. สำหรับ $v \in W_0^{1,2}$,
$$\int_0^1 u'(v-u)'dx + \int_0^1 6x(v-u)dx \geq 0.$$
แยกส่วนพจน์แรกได้ $[u'(v-u)]_0^1 - \int_0^1 u''(v-u)dx$; เทอมขอบหายเพราะ $v-u$ เป็นศูนย์ที่ขอบ. จึงได้
$$\int_0^1 (-u'' + 6x)(v-u)dx \geq 0$$
สำหรับทุก v. ให้ $w := v - u$. เพราะ $M = W_0^{1,2}$, เมื่อเลือก $v = u + w$ และ $v = u - w$ เราได้ $\int_0^1(-u'' + 6x)w\,dx = 0$ สำหรับทุก $w \in W_0^{1,2}$. ฟังก์ชัน $-u'' + 6x$ อยู่ใน L^2 และ $C_c^\infty(0,1)$ หนาแน่นใน $L^2(0,1)$, จึงตามบทตั้งพื้นฐานของแคลคูลัสของการแปรผันได้ $-u'' + 6x = 0$ เกือบทุกแห่ง.

5. บนช่วงเชื่อม $u_n(x) = n(x - 1/2)$. ให้ $y = n(x - 1/2)$; เมื่อ x วิ่งจาก $1/2 - 1/n$ ถึง $1/2 + 1/n$, y วิ่งจาก -1 ถึง 1 และ $dx = dy/n$. ดังนั้น
$$\int_0^1 (u_n^2 - 1)^2 dx = \frac{1}{n}\int_{-1}^1 (y^2-1)^2 dy = \frac{1}{n}\left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y\right]_{-1}^1 = \frac{16}{15n}.$$
$F(u_n) \to 0$ แต่ถ้า $F(u) = 0$ แล้ว $(u^2-1)^2 = 0$ ทุกจุด เพราะอินทิแกรนด์ต่อเนื่องและไม่เป็นลบ จึง $u^2 = 1$ ทุกจุด; เพราะ u ต่อเนื่องบนช่วงเชื่อมโยง $[0,1]$ จึง $u \equiv 1$ หรือ $u \equiv -1$ ซึ่งขัดกับ $u(0) = -1$ และ $u(1) = 1$. ดังนั้นค่าขอบล่างมากสุดของ F บน M เป็นศูนย์แต่ไม่ถูกบรรลุ. นี่เป็นตัวอย่างที่สมมติฐานบังคับให้มีขอบเขตของวิธีตรงขาดไป.

6. $u_n' = \pi\cos(n\pi x)$ จึง $\|u_n'\|_2^2 = \pi^2\int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx = \pi^2/2$ ทุก n. ขณะที่ $\|u_n\|_2 = 1/(\sqrt{2}n) \to 0$. ถ้า $v \in W^{1,2}(0,1)$ แล้ว
$$\langle u_n, v\rangle_{W^{1,2}} = \int u_n v + \int u_n' v' = \frac{1}{n}\int \sin(n\pi x)v + \pi\int \cos(n\pi x)v'.$$
พจน์แรกมีขนาดไม่เกิน $\|v\|_2/(\sqrt{2}n)$ จึงลู่เข้าศูนย์. สำหรับพจน์ที่สอง ใช้ความหนาแน่นของ $C^1[0,1]$ ใน $L^2(0,1)$: ถ้า $w \in C^1[0,1]$, อินทิเกรตโดยส่วนให้
$$\left|\int_0^1 w(x)\cos(n\pi x)\,dx\right| \leq \frac{\|w'\|_{L^1}}{n\pi} \longrightarrow 0,$$
เพราะพจน์ขอบ $w(x)\sin(n\pi x)/(n\pi)$ เป็นศูนย์ที่ $0, 1$. ประมาณ v' ด้วย w ใน L^2 และใช้ $\|\cos(n\pi\cdot)\|_2 = 1/\sqrt{2}$ จึงได้ $\int v'\cos(n\pi x)\,dx \to 0$. ดังนั้น $u_n \rightharpoonup 0$. แต่ $\|u_n'\|_2 = \pi/\sqrt{2}$ ไม่ลู่เข้าศูนย์; การลู่เข้าแบบอ่อนจึงไม่ใช่การลู่เข้าตามนอร์ม.

7. ฟังก์ชัน `finite_difference_experiment()` คืนค่า $h = \pi/128$, ค่าคลาดเคลื่อนสะอาด $1 - \sin h/h$, ขนาดรบกวน σ/h, ค่าคลาดเคลื่อนรวมและอัตราส่วน. สูตรเหล่านี้ยืนยันว่าค่าที่พิมพ์มาจากการคำนวณเดียวกันกับการประมาณเชิงตัวเลข และยืนยันความสัมพันธ์ σ/h กับขนาดรบกวน. แต่ไม่ได้ยืนยันว่าแบบจำลองตรงกับกล้องจริง หรือว่าสัญญาณรบกวนในอุปกรณ์ใดมีรูปแบบเดียวกัน.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24



รูปที่ 7.5: แผนผังปิดบทนี้: การลู่เข้าแบบอ่อนและบทตั้งรีมันน์–เลอเบกนำไปสู่ทฤษฎีบทบานาค–อาลาโอกลู; ความสะท้อนกลับและบทตั้งของมาซูร์ส่งต่อไปยังวิธีตรง; อสมการปวงกาเรให้ความบังคับให้มีขอบเขต และนำไปสู่การมีอยู่ของจุดต่ำสุดของพลังงาน (สร้างจาก `code/funkana/ch07.py`).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-1024

สูตรสรุป

- อ่อนทดสอบทุก $x' \in X'$; อ่อน-ดาวทดสอบทุก $x \in X$.
- J_X เป็นสมมิติ; ถ้า X บานาคและ J_X ทั่วถึง ทุกลำดับมีขอบเขตมีลำดับย่อยแบบอ่อน.
- $x_k \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \le \liminf \|x_k\|$; มาซูร์ให้ $x \in \overline{\operatorname{conv}}\{x_k\}$.
- ปวงกาเรคุม u ด้วย u' เมื่อกำจัดค่าคงตัว; วิธีตรงใช้ความบังคับให้มีขอบเขตและกึ่งต่อเนื่องล่าง.

ทบทวนศัพท์ใหม่

- **อ่อน/อ่อน-ดาว**: ทดสอบด้วย $x' \in X'$ กับ $x \in X$ ตามลำดับ.
- **สะท้อนกลับ**: $J_X : X \to X''$ ทั่วถึง.
- **มาซูร์**: ลิมิตแบบอ่อนอยู่ในส่วนปิดของส่วนนูน.
- **ปวงกาเร**: คุมฟังก์ชันด้วยอนุพันธ์เมื่อกำจัดค่าคงตัว.
- **วิธีตรง**: ใช้ลำดับมุ่งต่ำสุดและกึ่งต่อเนื่องล่าง.

อ่านต่อ

บทนี้ใช้ความมีขอบเขต ความสะท้อนกลับ และความกึ่งต่อเนื่องล่างเพื่อให้ลำดับมุ่งต่ำสุดบรรลุค่าต่ำสุดจริง. บทถัดไปนำแนวคิดเรื่องลำดับไปใช้ศึกษาสเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับ.

บทที่ 8

ตัวดำเนินการกระชับ เฟรดโฮล์ม และการคลายเบลอ

สถานการณ์สมมติ: ภาพความละเอียดต่ำที่ขยายกลับ

สมมติว่าเราใช้โทรศัพท์ถ่ายภาพวิวเมืองตอนกลางคืน. ภาพต้นฉบับมีความละเอียดสูง พอซูมเข้าไปจะเห็นป้ายไฟและราวสะพานเป็นเส้นคม. แล้วเราเลือก “ประหยัดพื้นที่” ทำให้ภาพถูกเก็บด้วยความละเอียดหนึ่งในสี่ของด้านกว้างและด้านยาว. เมื่อเปิดภาพนั้นอีกครั้ง จอแสดงผลขยายภาพกลับให้เต็มจอ. ภาพดูเรียบขึ้น แต่ป้ายไฟที่เคยอ่านออกกลับเป็นเพียงหยดแสง และราวสะพานที่เคยเป็นเส้นตรงกลับเป็นรอยหยัก. ถ้าเราลองใช้ฟิลเตอร์ “เพิ่มความคมชัด” หรือฟิลเตอร์ฉลาด ๆ ที่มีอยู่ในแอป ก็ยังไม่ได้ตัวอักษรหรือราวสะพานกลับคืนมา.

สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าโทรศัพท์หรือแอปใดทำเช่นนี้จริง และไม่มีตัวเลขจากอุปกรณ์จริงในบทนี้. เราใช้ภาพความละเอียดต่ำเป็นชื่อของ*ตัวดำเนินการที่ทิ้งข้อมูล*: ตัวดำเนินการที่รับภาพความละเอียดสูงแล้วส่งออกภาพความละเอียดต่ำ. คำถามของบทนี้คือ: ทำไมตัวดำเนินการชนิดนี้จึงทำให้ข้อมูลหายอย่างถาวร, ทำไมการผกผันจึงไม่ต่อเนื่อง, และเมื่อเรารู้ตัวดำเนินการเบลออย่างแม่นยำแล้ว เหตุใดการคลายเบลอจึงยังทำให้สัญญาณรบกวนชัดขึ้น.

คำตอบจะมาจาก**ตัวดำเนินการกระชับ** (compact operator): ตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ภาพของบอลหนึ่งหน่วยมีส่วนปิดที่กระชับ. ในปริภูมิอนันต์มิติ ตัวดำเนินการเช่นนี้ “บีบ” ทิศทางจำนวนมากลงจนเหลือที่ว่างน้อยลงเรื่อย ๆ. อัตราการย่อในแต่ละทิศทางจึงสลายถึงศูนย์ และตัวผกผัน (เมื่อมี) ต้องขยายทิศทางเล็ก ๆ ขึ้นมาก. จากนั้นเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทของชอเดอร์, ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์และทางเลือกของเฟรดโฮล์ม, และปิดท้ายด้วยการแยกตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ออกเป็นทิศทางพร้อมอัตราการย่อ (SVD) ซึ่งอธิบายการคลายเบลอด้วยการตัดทอน.

ตัวเลขทุกตัวในบทนี้มาจากแบบจำลองของเราใน `code/funkana/ch08.py` และมีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch08.py`. เมื่อข้อความกล่าวถึง “การคำนวณ” หมายถึงการคำนวณบนแบบจำลองนี้ ไม่ใช่การวัดจากกล้องหรือแอปจริง.

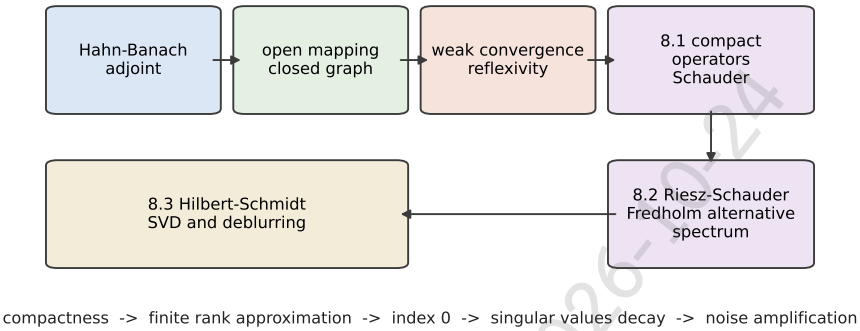
ภาพรวมบท

บทนี้เดินตามเส้นเดียว: *ความกระชับทำให้ปัญหาอนันต์มิติกลายเป็นปัญหามิติจำกัด*. §8.1 ให้นิยามตัวดำเนินการกระชับและพิสูจน์ว่ามันเป็นลิมิตของตัวดำเนินการอันดับจำกัด (ในปริภูมิฮิลเบิร์ต) พร้อมทั้งทฤษฎีบทของชอเดอร์ว่าความกระชับถ่ายทอดระหว่าง T กับ T'. §8.2 ใช้ความจริงนี้กับสมการ $(I - T)x = y$ เมื่อ T กระชับ: เราได้ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์ว่า $I - T$ เป็นตัวดำเนินการเฟรดโฮล์มที่มีดัชนีศูนย์, ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม, และโครงสร้างของสเปกตรัม. §8.3 เปลี่ยนมุมมองเป็นอัตราการย่อ: ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์คือตัวดำเนินการกระชับที่มีผลรวมกำลังสองของอัตราการย่อจำกัด; การตัดทอน (truncated SVD) คือการประมาณด้วยตัวดำเนินการอันดับจำกัด และนั่นคือเหตุผลที่การคลายเบลอต้องแลกความคมชัดกับสัญญาณรบกวน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

บทนี้ใช้ผลจากบทก่อน ๆ สองบทโดยตรง. จากบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค เราใช้การมีอยู่ของ**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) และทฤษฎีบทฮาห์น–บานาค. จากบทการลู่เข้าแบบอ่อนและค่าต่ำสุด เราใช้ทฤษฎีบทเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน: ในปริภูมิสะท้อนกลับ ทุกลำดับที่มีขอบเขตมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน. เราจะระบุทุกครั้งที่ใช้ผลเหล่านี้และจะไม่พิสูจน์ซ้ำ.

ก่อนเข้าสู่เนื้อหา เราสรุปเส้นทางของบทไว้ในรูปที่ 8.1. ลูกศรจากบทก่อน ๆ แสดงผลที่เราหยิบมาใช้; ลูกศรในบทแสดงลำดับของการใช้ความกระชับตั้งแต่ต้นจนถึงการคลายเบลอ.



รูปที่ 8.1: แผนผังการพึ่งพาของบท: ความสะท้อนกลับและการลู่เข้าแบบอ่อนจากบทก่อน ๆ ป้อนเข้าสู่ความกระชับ; ความกระชับให้การประมาณอันดับจำกัด, ดัชนีศูนย์ และการสลายของอัตราการย่อ ซึ่งอธิบายการคลายเบลอ.

สำเนาร่าง Preprint · 2026-04-24

8.1 ตัวดำเนินการกระชับและทฤษฎีบทของชอเดอร์

ในปริภูมิมิติจำกัด บอลหนึ่งหน่วยกระชับ (ทุกลำดับที่มีขอบเขตมีลำดับย่อยลู่เข้า). ในปริภูมิอนันต์มิติ ข้อความนี้ใช้ไม่ได้: เวกเตอร์ฐาน $e_1, e_2, \dots$ ใน ℓ^2 มีนอร์มหนึ่ง แต่ระยะห่างระหว่างคู่ใด ๆ คือ $\sqrt{2}$ จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า. ความกระชับจึงแข็งแรงกว่าความต่อเนื่อง: มันบีบเซตที่มีขอบเขตจนเกือบเป็นเซตมิติจำกัด.

ภาพรวมก่อนอ่าน

ให้ T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นจากปริภูมิบานาค X ไปยังปริภูมิบานาค Y. เราต้องการวัดว่า T “ทิ้งข้อมูล” มากแค่ไหน. วิธีหนึ่งคือดูภาพของบอลหนึ่งหน่วย $T(B_X)$. ถ้าภาพนี้มีส่วนปิดที่กระชับ เราเรียก T ว่าตัวดำเนินการกระชับ. ในมิติจำกัด ทุกตัวดำเนินการมีสมบัตินี้ เพราะบอลหนึ่งหน่วยกระชับอยู่แล้ว. ในมิติอนันต์ สมบัตินี้เป็นข้อจำกัดจริง ๆ: ตัวดำเนินการเอกลักษณ์ไม่กระชับ เพราะมันส่ง e_n ไปเป็น e_n ซึ่งยังอยู่ห่างกันเท่าเดิม.

ภาพที่ควรจำคือ: ตัวดำเนินการกระชับคือตัวดำเนินการที่เมื่อรับลำดับที่มีขอบเขตเข้ามา จะคืนลำดับที่มี “ทิศทางเหลือไม่มาก” จนเลือกสำเนาย่อยที่ลู่เข้าได้. ตัวดำเนินการอันดับจำกัดเป็นตัวอย่างง่ายที่สุด; ตัวดำเนินการกระชับทั่วไปคือลิมิตของตัวดำเนินการอันดับจำกัด (ในปริภูมิฮิลเบิร์ต). นี่คือเหตุผลที่ทฤษฎีของบทนี้ทั้งบทพูดถึง “การลดปัญหาอนันต์มิติให้เป็นมิติจำกัด”.

เราเริ่มจากนิยามที่ใช้ส่วนปิดของภาพบอลหนึ่งหน่วย. จำไว้ว่าส่วนปิดของเซต M ในปริภูมิอิงระยะทางเขียน $\overline{M}$. เซต M เรียกว่ากระชับสัมพัทธ์ ถ้า $\overline{M}$ กระชับ; ในปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ ข้อนี้สมมูลกับ “ทุก ลำดับใน M มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าใน X” (ลิมิตอาจอยู่นอก M).

นิยาม 8.1.1: ตัวดำเนินการกระชับ

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาคเหนือสนาม $\mathbb{K}$ (ซึ่งเป็น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$). การส่งเชิงเส้น $T : X \to Y$ เรียกว่า**ตัวดำเนินการกระชับ** (compact operator) ถ้า $T(B_X)$ เป็นเซต**กระชับสัมพัทธ์** (relatively compact) กล่าวคือ ส่วนปิด $\overline{T(B_X)}$ กระชับใน Y. เซตของตัวดำเนินการกระชับทั้งหมดเขียน $K(X,Y)$ และเขียน $K(X) := K(X,X)$.

คำว่า “กระชับ” ในที่นี้หมายถึงสมบัติของ*ภาพของบอลหนึ่งหน่วย* ไม่ใช่สมบัติของโดเมน. ตัวดำเนินการจากปริภูมิที่มีขอบเขตจำกัด (เช่นช่วง $[0,1]$) ไม่จำเป็นต้องกระชับ; ตัวดำเนินการจากปริภูมิอนันต์มิติก็ไม่จำเป็นต้องไม่กระชับ. ตัวอย่างแรกที่ควรทำมือคือตัวดำเนินการแนวทแยง.

ลองเอง: ตัวดำเนินการแนวทแยงที่อัตราการย่อสลาย

บน ℓ^2 ให้ $De_k = \frac{1}{k} e_k$ สำหรับ $k \geq 1$. แล้ว $\|D\| = 1$ เพราะ $\sup_k 1/k = 1$. ภาพของบอลหนึ่งหน่วยคือเซต

$$D(B_{\ell^2}) = \Big\{ x \in \ell^2 : \sum_{k \geq 1} k^2 |x_k|^2 \leq 1 \Big\}.$$

เซตนี้มีขอบเขต. ภาพของบอลหนึ่งหน่วยไม่จำเป็นต้องปิดสำหรับตัวดำเนินการกระชับทั่วไป (ดูกล่องข้อควรระวังด้านล่าง); นิยามจึงใช้ส่วนปิด. สำหรับ D นี้ $\overline{D(B_{\ell^2})}$ กระชับ. วิธีเห็นที่ตรงที่สุดคือประมาณ D ด้วยการตัดทอน: ให้ D_N เป็นตัวดำเนินการแนวทแยงที่มีค่า $1, 1/2, \ldots, 1/N$ แล้วศูนย์หลังจากนั้น. D_N มี**พิสัย**มิติจำกัด จึงกระชับ. สำหรับ $x \in \ell^2$ ที่ $\|x\| \leq 1$,

$$\|(D - D_N)x\|^2 = \sum_{k > N} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \frac{1}{(N+1)^2} \|x\|^2.$$

ดังนั้น $\|D - D_N\| \leq \frac{1}{N+1}$. ที่ $N = 10$ ขอบเขตนี้คือ $1/11 \approx 0.0909$; ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน. เพราะเซตของตัวดำเนินการกระชับเป็นเซตปิด (ตามทฤษฎีบทสมบัติพื้นฐานของตัวดำเนินการกระชับด้านล่าง) และ $D_N \to D$ ในนอร์มตัวดำเนินการ, D จึงกระชับ.

Alt ให้นิยามที่สมมูลกันสี่ข้อ; เราเขียนเป็นบทตั้งเพื่อเชื่อมความกระชับกับการมีลำดับย่อยลู่เข้า.

บทตั้ง 8.1.1: สมบัติสมมูลของตัวดำเนินการกระชับ

ให้ $T : X \to Y$ เป็นการส่งเชิงเส้นระหว่างปริภูมิบานาค. พิจารณาข้อความต่อไปนี้:

(a) $\overline{T(B_X)}$ กระชับ;

(b) ทุกลำดับที่มีขอบเขต (x_n) ใน X มีลำดับย่อย (x_{n_j}) ซึ่ง (Tx_{n_j}) ลู่เข้าใน Y;

(c) สำหรับทุกเซตที่มีขอบเขต $M \subset X$, เซต $T(M)$ เป็นกระชับสัมพัทธ์;

(d) $T(B_X)$ มีขอบเขต.

นอกจากนี้ (a)–(c) สมมูลกัน และแต่ละข้อใน (a)–(c) ให้ (d).

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทิศทาง (a)⇒(b) ใช้ความกระชับของส่วนปิด: ลำดับที่มีขอบเขตถูกส่งเข้าเซตกระชับ ซึ่งในปริภูมิอิงระยะทางสมมูลกับการมีลำดับย่อยลู่เข้า. ทิศทาง (b)⇒(a) ใช้การพิสูจน์ด้วยข้อขัดแย้ง: ถ้าภาพไม่เป็นเซตที่มีขอบเขตสิ้นเชิง (totally

สอนรัง · Preprint · 2026-10-21

bounded) เราจะสร้างลำดับที่ภาพห่างกันอย่างน้อย ε ทุกคู่ ซึ่งขัดกับ (b). ส่วน (c) เป็นการปรับขนาดของ (a) และ (d) ตามมาจากความมีขอบเขตของเซตกระชับ.

1. **(a)⇒(b).** ให้ (x_n) มีขอบเขต, $\|x_n\| \le R$. แล้ว $Tx_n \in T(RB_X) = RT(B_X) \subset R\overline{T(B_X)}$. เซต $R\overline{T(B_X)}$ กระชับ เพราะเป็นการคูณเซตกระชับด้วยจำนวนจริง. ในปริภูมิอิงระยะทาง เซตกระชับสมมูลกับเซตที่ทุกลำดับมีลำดับย่อยลู่เข้า; จึงมีลำดับย่อยของ Tx_n ที่ลู่เข้า.

2. **(b)⇒(a).** ให้ $K := \overline{T(B_X)}$. เพราะ Y บริบูรณ์, K กระชับก็ต่อเมื่อ $T(B_X)$ มีขอบเขตสิ้นเชิง: สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มีจำนวนจำกัดของจุด $y_1, \dots, y_m$ ที่ $T(B_X) \subset \bigcup_{j} B_{\varepsilon}(y_j)$. สมมติว่ามี $\varepsilon > 0$ ซึ่งหาเซตจำกัดเช่นนี้ไม่ได้. เลือก $x_1 \in B_X$ ตามอำเภอใจ. เมื่อเลือก $x_1, \dots, x_{n-1}$ แล้ว เซต $\bigcup_{j<n} B_{\varepsilon}(Tx_j)$ ไม่ครอบ $T(B_X)$; จึงมี $x_n \in B_X$ ที่ $\|Tx_n - Tx_j\| \ge \varepsilon$ ทุก $j < n$. ถ้าภาพ (Tx_n) มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า ลำดับย่อยนั้นต้องเป็นลำดับโคชี. แต่สมาชิกทุกคู่ที่แตกต่างกันใน (Tx_n) อยู่ห่างกันอย่างน้อย ε; จึงไม่มีลำดับย่อยใดเป็นโคชี. สมมติฐาน (b) ถูกทำให้เป็นเท็จ. ดังนั้น $T(B_X)$ มีขอบเขตสิ้นเชิง และส่วนปิดในปริภูมิบริบูรณ์ Y กระชับ.

3. **(c).** ถ้า M มีขอบเขต, $M \subset RB_X$ สำหรับบาง $R > 0$. แล้ว $T(M) \subset RT(B_X) \subset R\overline{T(B_X)}$ ซึ่งกระชับ; ส่วนปิดของ $T(M)$ จึงเป็นเซตปิดย่อยของเซตกระชับ และกระชับ.

4. **(c)⇒(a).** เลือก $M = B_X$ ใน (c); จะได้ว่า $T(B_X)$ กระชับสัมพัทธ์ ซึ่งตามนิยามคือ $\overline{T(B_X)}$ กระชับ.

5. **(d).** เซตกระชับในปริภูมิอิงระยะทางมีขอบเขต. จาก (a), $\overline{T(B_X)}$ มีขอบเขต; ดังนั้น $T(B_X)$ มีขอบเขต.

สรุป: ตัวดำเนินการกระชับคือตัวดำเนินการที่ส่งลำดับมีขอบเขตไปเป็นลำดับที่มีลำดับย่อยลู่เข้า; ในปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์ นี่สมมูลกับภาพของบอลหนึ่งหน่วยมีส่วนปิดกระชับ. □

ข้อควรระวัง: ทำไมนิยามต้องใช้ส่วนปิด

ภาพของบอลหนึ่งหน่วยภายใต้ตัวดำเนินการกระชับไม่จำเป็นต้องปิด. ตัวอย่างบน $C[0,1]$ พร้อมซูพรีมัมนอร์ม: ให้ $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ และให้ f_n ต่อเนื่อง, $|f_n| \le 1$, ลู่เข้าทีละจุดสู่ฟังก์ชันเครื่องหมายซึ่งกระโดดที่จุดหนึ่ง $a \in (0,1)$. แล้ว Tf_n ลู่เข้าเอกรูปสู่ $F(x) = |x-a| - a$; แต่ $F \notin T(B_{C[0,1]})$ เพราะถ้า $F = Tf$ กับ f ต่อเนื่อง จะได้ $f = F'$ เกือบทุกจุด ซึ่งขัดกับการที่ F มีมุมที่ a. เซต $T(B_{C[0,1]})$ จึงไม่ปิด ทั้งที่ T กระชับโดยอาร์เซลา–อาสโคลี. นิยามจึงใช้*ส่วนปิด*ของภาพ. อีกจุดที่พลาดง่ายคือ: $T(B_X)$ มีขอบเขตไม่ได้แปลว่า T กระชับ. ตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน ℓ^2 มี $\|I\| = 1$ แต่ไม่กระชับ เพราะลำดับ e_n มีขอบเขตและ $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ ทุก $n \neq m$; จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

ต่อไปเรารวบรวมสมบัติพื้นฐานที่ใช้ตลอดบท. ข้อ (a) บอกว่าเซตของตัวดำเนินการกระชับเป็นปริภูมิย่อยปิดของ $\mathcal{L}(X,Y)$; ข้อ (b) บอกว่าตัวดำเนินการอันดับจำกัดกระชับ; ข้อ (c) บอกว่าการประกอบกับตัวดำเนินการมีขอบเขตยังคงกระชับ; ข้อ (d) เป็นการกลับทิศของ (b) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 8.1.2: สมบัติพื้นฐานของตัวดำเนินการกระชับ

ให้ X, Y, Z เป็นปริภูมิบานาค.

(a) $K(X,Y)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ $\mathcal{L}(X,Y)$; โดยเฉพาะ $K(X,Y)$ เป็นปริภูมิบานาค.

(b) ถ้า $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ มี $\dim \operatorname{ran} T < \infty$ แล้ว $T \in K(X,Y)$.

(c) ถ้า $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ และ $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ และ T หรือ S กระชับ แล้ว ST กระชับ.

(d) ถ้า Y เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ แล้ว T กระชับ ก็ต่อเมื่อมีลำดับ $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ ที่ $\dim \operatorname{ran} T_n < \infty$ และ $\|T - T_n\| \to 0$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (a) ใช้การประมาณด้วย $\varepsilon/3$: ภาพของ T ถูกประมาณด้วยภาพของ T_n ซึ่งมีตาข่ายเอปซิลอนจำกัด. ข้อ (b) ใช้ไฮเน–โบเรลในพิสัยมิติจำกัด. ข้อ (c) ใช้ภาพของเซตกระชับภายใต้การส่งต่อเนื่อง และความจริงว่า T ส่งเซตมีขอบเขตไปเซตมีขอบเขต. ข้อ (d) ทิศทาง "ถ้า" ตามจาก (a) กับ (b); ทิศทาง "เฉพาะเมื่อ" เราพิสูจน์โดยฉายภาพของเซตกระชับ $\overline{T(B_X)}$ ลงบนปริภูมิย่อยที่แยกได้ซึ่งเซตนี้แผ่.

1. **(a).** ก่อนอื่น $K(X,Y)$ เป็นปริภูมิเชิงเส้น: ถ้า T, S กระชับแล้ว $(T+S)(B_X) \subset T(B_X) + S(B_X)$ มีขอบเขตสิ้นเชิง เพราะเป็นผลบวกของเซตที่มีขอบเขตสิ้นเชิง; และ αT กระชับสำหรับทุกสเกลาร์ α. ต่อไปให้ $T_n \in K(X,Y)$ และ $\|T_n - T\| \to 0$. ให้ $\varepsilon > 0$. เลือก n ที่ $\|T_n - T\| < \varepsilon/3$. เพราะ $T_n(B_X)$ มีขอบเขตสิ้นเชิง, มี $y_1, \ldots, y_m$ ที่ $T_n(B_X) \subset \bigcup_j B_{\varepsilon/3}(y_j)$. สำหรับ $x \in B_X$ มี j ที่ $\|T_n x - y_j\| < \varepsilon/3$; ดังนั้น

$$\|Tx - y_j\| \le \|T - T_n\|\,\|x\| + \|T_n x - y_j\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

   จึง $T(B_X) \subset \bigcup_j B_\varepsilon(y_j)$. เมื่อทำเช่นนี้ได้กับทุก $\varepsilon > 0$, เซต $T(B_X)$ มีตาข่ายเอปซิลอนทุกระยะ; ส่วนปิดของมันจึงกระชับเพราะ Y บริบูรณ์.

2. **(b).** ให้ $E := \operatorname{ran} T$ มีมิติจำกัด. แล้ว $T(B_X)$ เป็นเซตย่อยที่มีขอบเขตของ E. ในปริภูมิมิติจำกัด เซตปิดและมีขอบเขตกระชับ (ไฮเน–โบเรล); ดังนั้น $\overline{T(B_X)}$ ซึ่งเป็นเซตปิดย่อยของ E และมีขอบเขต กระชับ.

3. **(c).** ถ้า T กระชับ แล้ว $\overline{T(B_X)}$ กระชับ. การส่ง S ต่อเนื่อง จึงส่งเซตกระชับไปเซตกระชับ; ดังนั้น $\overline{ST(B_X)} \subset S(\overline{T(B_X)})$ กระชับ. ถ้า S กระชับ, $T(B_X)$ มีขอบเขต (เพราะ T มีขอบเขต) และ S ส่งเซตมีขอบเขตไปเซตกระชับสัมพัทธ์; ดังนั้น $ST(B_X)$ กระชับสัมพัทธ์.

4. **(d).** ทิศทาง "ถ้า" ตามจาก (a) และ (b). สำหรับ "เฉพาะเมื่อ" ให้ T กระชับและ $K := \overline{T(B_X)}$ กระชับใน Y. ให้ $Y_0 := \overline{\operatorname{span}} K$; Y_0 แยกได้ เพราะ K กระชับจึงมีเซตหนาแน่นนับได้. เลือกฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (f_k) ของ Y_0 (ถ้า Y_0 มีมิติจำกัด d ให้กำหนด $P_n := I_{Y_0}$ เมื่อ $n \ge d$) และให้ P_n เป็นการฉายบน $\operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$. เพราะ $P_n y \to y$ ทีละจุดบน Y_0, การลู่เข้านี้เอกรูปบน K: ให้ $\varepsilon > 0$ เลือกตาข่ายเอปซิลอน $y_1, \ldots, y_m$ ของ K รัศมี ε แล้วเลือก n ที่ $\|P_n y_j - y_j\| < \varepsilon$ ทุก j. สำหรับ $y \in K$ เลือก j ที่ $\|y - y_j\| < \varepsilon$; เพราะ $\|P_n\| \le 1$,

$$\begin{aligned} \|P_n y - y\| &\le \|P_n(y - y_j)\| + \|P_n y_j - y_j\| + \|y_j - y\| < 3\varepsilon, \\ \|P_n T - T\| &= \sup_{x \in B_X} \|P_n T x - T x\| \\ &\le 3\varepsilon. \end{aligned}$$

   และ $P_n T$ มีอันดับจำกัด. เพราะ $\varepsilon > 0$ เลือกได้ตามอำเภอใจ, $\|P_n T - T\| \to 0$.

ร่างเอกสาร Preprint · 2026-10-21

สรุป: $K(X,Y)$ ปิด, ประกอบกับตัวดำเนินการมีขอบเขตได้ทั้งสองข้าง, และในปริภูมิฮิลเบิร์ต ความกระชับคือการเป็นลิมิตของตัวดำเนินการอันดับจำกัด. □

ข้อ (d) ใช้เพียงการฉายอันดับจำกัดบน Y_0 และความกระชับของ $\overline{T(B_X)}$; ไม่ต้องสมมติว่า Y แยกได้ และไม่ต้องใช้การลู่เข้าแบบอ่อน.

8.1.1 ทฤษฎีบทของชอเดอร์: ตัวดำเนินการกับตัวผูกพัน

จำจากบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาคว่า**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) $T' \in \mathcal{L}(Y',X')$ ของ $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ นิยามโดย

$$(T'y')(x) = y'(Tx) \qquad (x \in X,\ y' \in Y'),$$

และ $\|T'\| = \|T\|$. ข้อเท็จจริงสำคัญคือ: T กระชับก็ต่อเมื่อ T' กระชับ. ทิศทาง T กระชับ $\Rightarrow$ T' กระชับใช้ทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี; ทิศทางกลับพิสูจน์ด้วยตาข่ายเอปซิลอนและการทดสอบผ่านฟังก์ชันนัล. เราเริ่มจากรุ่นที่ใช้ของทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี.

บทตั้ง 8.1.3: ทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี

ให้ (S,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางกระชับ และ $C(S)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องค่าจริงหรือค่าซับซ้อนพร้อมซูพรีมัมนอร์ม. ให้ $M \subset C(S)$ เป็นเซตที่มีขอบเขต, ปิด และ**ต่อเนื่องเท่ากัน** (equicontinuous) กล่าวคือ

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in M\ \forall s,t \in S: \quad d(s,t) \le \delta \ \Rightarrow\ |f(s) - f(t)| \le \varepsilon.$$

แล้ว M กระชับ.

ไม่พิสูจน์ในบทนี้; เป็นผลมาตรฐานของปริภูมิฟังก์ชันต่อเนื่อง (Werner 2007, ทฤษฎีบท II.3.4). เราใช้เฉพาะข้อความที่ระบุไว้เท่านั้น.

ทฤษฎีบท 8.1.4: ทฤษฎีบทของชอเดอร์

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิบานาค และ $T: X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นต่อเนื่อง. แล้ว T กระชับ ก็ต่อเมื่อ T' กระชับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทิศทาง T กระชับ $\Rightarrow$ T' กระชับ: จำกัด T' ไว้บนบอลหนึ่งหน่วยของ Y' แล้วมองเป็นฟังก์ชันบนเซตกระชับ $K = \overline{T(B_X)}$. กลุ่มฟังก์ชันนี้ถูกควบคุมขนาดพร้อมกัน และสมาชิกทุกตัวแกว่งน้อยพร้อมกัน; อาร์เซลา–อาสโคลีให้ลำดับย่อยลู่เข้าเอกรูป. ทิศทางกลับ: ใช้ตาข่ายเอปซิลอนของ $T'(B_{Y'})$ เพื่อสร้างตาข่ายเอปซิลอนของ $T(B_X)$ ผ่านการทดสอบด้วยฟังก์ชันนัลทุกตัว.

1. **T กระชับ $\Rightarrow$ T' กระชับ.** ให้ $K := \overline{T(B_X)}$; K กระชับใน Y. สำหรับ $y' \in B_{Y'}$ ให้ $\varphi_{y'} \in C(K)$ เป็นการจำกัด y' ไว้บน K. กำหนด $F(T'y') := \varphi_{y'}$. การกำหนดนี้ไม่ขึ้นกับตัวแทน: ถ้า $T'y' = T'z'$ แล้ว $y' - z'$ หายบน $T(B_X)$ และจึงหายบน K. ดังนั้น F เป็นไอโซเมตรีบน $T'(B_{Y'})$ เพราะ $\|\varphi_{y'}\|_{C(K)} = \sup_{y \in K} |y'(y)| = \sup_{x \in B_X} |y'(Tx)| = \|T'y'\|$. เซต $\Phi := F(T'(B_{Y'}))$ มีขอบเขต ($\|\varphi_{y'}\| \le \|T\|$) และต่อเนื่องเท่ากัน เพราะ

$$|\varphi_{y'}(y_1) - \varphi_{y'}(y_2)| = |y'(y_1 - y_2)| \le \|y_1 - y_2\| \qquad (y_1, y_2 \in K).$$

ส่วนปิด $\overline{\Phi}$ ยังคงมีขอบเขตและต่อเนื่องเท่ากัน; โดยทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี ส่วนปิดนี้กระชับ. สำหรับทุก $\varepsilon > 0$, เลือกจุดศูนย์กลางจำนวนจำกัดใน $\overline{\Phi}$ ที่ครอบ Φ ด้วยบอลรัศมี ε; ไอโซเมตรี F ขยายต่อไปยังส่วนปิด จึงส่งจุดศูนย์กลาง

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เหล่านี้กลับเป็นตาข่ายเอปซิลอนจำกัดของ $T'(B_{Y'})$ ใน X'. เพราะ X' บริบูรณ์, ส่วนปิดของภาพนี้กระชับ และ T' กระชับ.

2. **T' กระชับ $\Rightarrow$ T กระชับ.** ให้ $\varepsilon > 0$. เลือกฟังก์ชันนัลจำนวนจำกัด $g_1, \dots, g_m \in X'$ ให้ทุกค่า $T'y'$ เมื่อ $y' \in B_{Y'}$ อยู่ห่างจากฟังก์ชันนัลอย่างน้อยหนึ่งตัวในรายการนี้น้อยกว่า ε; การเลือกนี้ทำได้เพราะ T' กระชับ.

$$T'(B_{Y'}) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{\varepsilon}(g_j).$$

พิจารณาการส่ง $\Phi : B_X \to \mathbb{K}^m$, $\Phi(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$. ภาพ $\Phi(B_X)$ มีขอบเขตใน $\mathbb{K}^m$ (เพราะ $|g_j(x)| \le \|g_j\|$) จึงมีขอบเขตสิ้นเชิง; เลือก $x_1, \dots, x_r \in B_X$ ที่ $\Phi(B_X) \subset \bigcup_l B_{\varepsilon}(\Phi(x_l))$ โดยใช้ระยะ ε ใน $\mathbb{K}^m$. เราอ้างว่า $T(B_X) \subset \bigcup_l B_{3\varepsilon}(Tx_l)$. ให้ $x \in B_X$; เลือก l ที่ $\|\Phi(x) - \Phi(x_l)\|_{\mathbb{K}^m} < \varepsilon$, นั่นคือ $|g_j(x) - g_j(x_l)| < \varepsilon$ ทุก j. ให้ $y' \in B_{Y'}$. เลือก j ที่ $\|T'y' - g_j\|_{X'} < \varepsilon$. แล้ว

$$|y'(Tx - Tx_l)| \le |(T'y' - g_j)(x)| + |g_j(x) - g_j(x_l)| + |(T'y' - g_j)(x_l)| < 3\varepsilon.$$

เพราะ y' ใด ๆ ในบอลหนึ่งหน่วย, $\|Tx - Tx_l\| \le 3\varepsilon$. (เราใช้ $\|x\| \le 1$ และ $\|x_l\| \le 1$ ในการประมาณสองพจน์แรก.) ดังนั้น $T(B_X)$ ถูกคลุมด้วยจำนวนจำกัดของบอลรัศมี 3ε; เพราะ ε ใด ๆ, $T(B_X)$ มีขอบเขตสิ้นเชิง และส่วนปิดกระชับ.

สรุป: การเปลี่ยนผ่านไประหว่าง T กับตัวผูกพัน T' รักษาความกระชับทั้งสองทิศทาง; เครื่องมือหลักคืออาร์เซลา–อาสโคลีและตาข่ายเอปซิลอนที่ทดสอบผ่านฟังก์ชันนัล. □

ข้อควรระวัง: ค่าคงตัวในเน็ต

ในข้อ 2 เราได้เน็ตขนาด 3ε ไม่ใช่ ε เพราะการประมาณสามพจน์ให้ค่าคงตัวบวกกัน. ค่าคงตัวบวกใด ๆ คูณ ε ก็พอเมื่อให้ $\varepsilon \to 0$; เราจึงเก็บทั้งสามพจน์ไว้ให้เห็นว่าทุกพจน์ถูกควบคุม.

8.1.2 เมื่อความกระชับทำให้อ่อนกลายเป็นเข้ม

ในปริภูมิสะท้อนกลับ ทุกลำดับที่มีขอบเขตมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน (เอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน); เราใช้ผลนี้เป็นสมมติฐานและไม่พิสูจน์ซ้ำ.

ทฤษฎีบท 8.1.5: ตัวดำเนินการกระชับเปลี่ยนการลู่เข้าแบบอ่อนเป็นการลู่เข้าในนอร์ม

ให้ X เป็นปริภูมิสะท้อนกลับ, Y เป็นปริภูมิบานาค และ $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. แล้ว T กระชับ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกลำดับ (x_n) ใน X และ $x \in X$,

$$x_n \rightharpoonup x \text{ แบบอ่อน} \quad \Longrightarrow \quad Tx_n \to Tx \text{ ในนอร์ม}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทิศทาง “เฉพาะเมื่อ” ใช้ข้อขัดแย้ง: ถ้าภาพไม่ลู่เข้าในนอร์ม เลือกลำดับย่อยที่ห่างจาก Tx อย่างน้อย ε; ความกระชับให้ลำดับย่อยย่อยที่ลู่เข้า และความต่อเนื่องแบบอ่อน-อ่อนของ T บังคับให้ลิมิตเป็น Tx. ทิศทาง “ถ้า” ใช้เอเบอร์ไลน์–ชมูเลียนดึงลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนจากลำดับมีขอบเขต แล้วสมมติฐานให้ภาพลู่เข้าในนอร์ม.

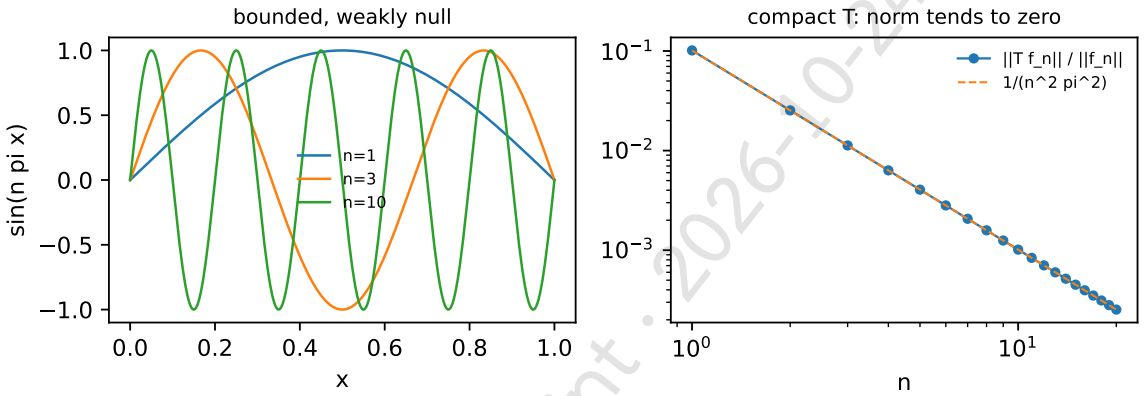
1. **ความต่อเนื่องแบบอ่อน-อ่อน.** ก่อนอื่นสังเกตว่า T ต่อเนื่องเชิงเส้น จึงต่อเนื่องเมื่อเทียบกับโทโพโลยีอ่อน: ถ้า $x_n \rightharpoonup x$ แล้วสำหรับ $y' \in Y'$ ฟังก์ชันนัล $y' \circ T \in X'$ และ $(y' \circ T)(x_n) \to (y' \circ T)(x)$; นั่นคือ $y'(Tx_n) \to y'(Tx)$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2. **“เฉพาะเมื่อ”.** สมมติ T กระชับ, $x_n \rightharpoonup x$ แต่ $Tx_n \not\to Tx$. แล้วมี $\varepsilon > 0$ และลำดับย่อย x_{n_k} ที่ $\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \varepsilon$. ตามหลักความมีขอบเขตเอกรูป (Banach–Steinhaus), ลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อนมีขอบเขต; ความกระชับของ T จึงให้ลำดับย่อยย่อย $x_{n_{k_j}}$ ที่ $Tx_{n_{k_j}}$ ลู่เข้าในนอร์ม. จากข้อ 1, $Tx_{n_{k_j}} \rightharpoonup Tx$; ลิมิตในนอร์มจึงต้องเป็น Tx. แต่ $\|Tx_{n_{k_j}} - Tx\| \geq \varepsilon$ ทุก j; ขัดแย้ง.

3. **“ถ้า”.** เริ่มด้วยลำดับที่มีขอบเขต (x_n). โดยเอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน (ปริภูมิสะท้อนกลับ) มีลำดับย่อย $x_{n_j} \rightharpoonup x$. สมมติฐานให้ $Tx_{n_j} \to Tx$ ในนอร์ม. เราจึงได้สมบัติของภาพสำหรับทุกลำดับที่มีขอบเขต: เลือกลำดับย่อยให้ภาพลู่เข้าได้. โดยบทตั้ง 8.1.1 (หรือนิยาม) T กระชับ.

สรุป: บนปริภูมิสะท้อนกลับ ความกระชับคือสมบัติที่เปลี่ยนการลู่เข้าแบบอ่อนเป็นการลู่เข้าในนอร์ม; ทิศทางหนึ่งใช้หลักความมีขอบเขตเอกรูป และอีกทิศทางใช้เอเบอร์ไลน์–ชมูเลียน. □



รูปที่ 8.2: ซ้าย: ลำดับ $\sin(n\pi x)$ มีขอบเขตใน $L^2(0,1)$ และลู่เข้าอ่อนเข้าหาศูนย์ แต่ไม่ลู่เข้าในนอร์ม. ขวา: ตัวดำเนินการกรีนซึ่งกระชับส่งลำดับนี้ไปยังภาพที่มีนอร์มสลายเป็น $1/(n^2\pi^2)$; ที่ $n = 10$ อัตราส่วนคือ 0.001013 (คำนวณในโค้ดและยืนยันโดยแบบทดสอบ).

8.1.3 ตัวดำเนินการจากอินทิกรัลต่อเนื่อง

ตัวดำเนินการกระชับที่เราจะใช้จริงในบทนี้คือตัวดำเนินการปริพันธ์. ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่มีขอบเขตและวัดได้ และให้ $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{K}$ ต่อเนื่อง. เราเรียก K ว่า**เคอร์เนลปริพันธ์** (integral kernel). นิยาม

$$(T_K f)(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy \qquad (f \in L^2(\Omega)).$$

เพราะ K ต่อเนื่องบนเซตกระชับ $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, K มีขอบเขต $M := \max |K|$ และ Ω มีขนาดจำกัด; ดังนั้น T_K เป็นตัวดำเนินการมีขอบเขตบน L^2 ด้วย $\|T_K\| \leq M|\Omega|$.

ทฤษฎีบท 8.1.6: ตัวดำเนินการปริพันธ์ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องกระชับ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด มีขอบเขต, และ $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$. แล้ว $T_K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แบ่ง Ω เป็นชิ้นเล็ก ๆ จำนวนจำกัด แล้วแทน K ด้วยเคอร์เนลปริพันธ์ค่าคงที่บนแต่ละคู่ชิ้น. เคอร์เนลปริพันธ์ขั้นบันไดให้ตัวดำเนินการอันดับจำกัด; ความต่อเนื่องเอกรูปของ K ทำให้ผลต่างของตัวดำเนินการเล็กตามขนาดชิ้น. จากนั้นใช้ความปิดของ $K(L^2)$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

1. **การประมาณที่ต่อเนื่องเอกรูป.** ให้ $\varepsilon > 0$. เพราะ K ต่อเนื่องเอกรูปบนเซตกระชับ, มี $\delta > 0$ ที่ $\|(x,y)-(x',y')\| < \delta$ ทุกพิกัดทำให้ $|K(x,y) - K(x',y')| < \varepsilon$.

2. **แบ่งโดเมน.** แบ่ง Ω ออกเป็นชิ้นวัดได้ $Q_1, \dots, Q_m$ ที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางน้อยกว่า $\delta/\sqrt{2}$ (เช่นใช้ลูกบาศก์กริด). เลือก $x_i \in Q_i$ และนิยาม
$$K_\varepsilon(x,y) := \sum_{i,j=1}^{m} K(x_i,x_j)\,\mathbf{1}_{Q_i}(x)\mathbf{1}_{Q_j}(y).$$
แล้ว $|K - K_\varepsilon| < \varepsilon$ ทุกจุด จึงได้ $\sup|K - K_\varepsilon| \le \varepsilon$.

3. **อันดับจำกัด.** ตัวดำเนินการ T_{K_ε} มีพิสัยอยู่ใน $\operatorname{span}\{\mathbf{1}_{Q_1},\dots,\mathbf{1}_{Q_m}\}$ ซึ่งมีมิติ m; จึงเป็นตัวดำเนินการอันดับจำกัดและกระชับโดยทฤษฎีบท 8.1.2(b).

4. **ผลต่างเล็ก.** สำหรับ $f \in L^2(\Omega)$,
$$\|(T_K - T_{K_\varepsilon})f\|_2^2 = \int_\Omega \Big| \int_\Omega (K-K_\varepsilon)(x,y) f(y)\,dy \Big|^2 dx \le \varepsilon^2 |\Omega|^2 \int_\Omega |f(y)|^2 dy.$$
โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซในตัวแปร y และอินทิเกรตอสมการจุดต่อจุดในตัวแปร x. ดังนั้น $\|T_K - T_{K_\varepsilon}\| \le \varepsilon|\Omega|$. เนื่องจาก $\varepsilon > 0$ เล็กได้ตามอำเภอใจ, T_K ถูกประมาณในนอร์มด้วยตัวดำเนินการอันดับจำกัด; โดยทฤษฎีบท 8.1.2(a) T_K กระชับ.

สรุป: เคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องบนโดเมนมีขอบเขตทำให้ตัวดำเนินการปริพันธ์เป็นลิมิตของตัวดำเนินการขั้นบันไดอันดับจำกัด; จึงกระชับ. □

ตัวอย่างตัวเลขที่ใช้ตลอดบทคือ*ตัวดำเนินการกรีน* ของปัญหา $-u'' = f$ บน $(0,1)$ พร้อมเงื่อนไขขอบศูนย์. เคอร์เนลปริพันธ์คือ
$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \le y, \\ y(1-x), & x \ge y. \end{cases}$$
มันต่อเนื่องบน $[0,1]^2$; ที่ $(x,y) = (0.25, 0.5)$ ค่าคือ $0.25 \cdot 0.5 = 0.125$. ตัวดำเนินการ T ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์นี้ส่ง $\sin(n\pi x)$ ไปยัง $\frac{1}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$. ดังนั้น $\|T\| = 1/\pi^2 \approx 0.1013$ และนอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์คือ
$$\|T\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^4\pi^4}\Big)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{90}} \approx 0.1054.$$
อัตราส่วน $\|T\sin(n\pi x)\|/\|\sin(n\pi x)\| = 1/(n^2\pi^2)$; ที่ $n = 10$ คือ 0.001013. ตัวเลขทั้งสี่นี้คำนวณในโค้ดและยืนยันโดยแบบทดสอบ; เราใช้มันเป็นแบบจำลองของ “การสลายของอัตราการย่อ” ใน §8.3.

ข้อควรระวัง: ความกระชับไม่เท่ากับการมีอันดับจำกัด

ตัวดำเนินการกรีนไม่ใช่ตัวดำเนินการอันดับจำกัด: อัตราการย่อตามทิศทาง $\sin(n\pi x)$ คือ $1/(n^2\pi^2)$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ทุก n. แต่ในปริภูมิฮิลเบิร์ต มันเป็นลิมิตของตัวดำเนินการอันดับจำกัด (ตัดอนุกรมที่ $n = N$). ดังนั้นคำว่า “กระชับ” ไม่ได้แปลว่า “อันดับจำกัด”; มันแปลว่า “ประมาณได้ด้วยอันดับจำกัดในนอร์ม”. ความแตกต่างนี้สำคัญใน §8.3 เพราะการตัดทอนทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนที่เหลืออยู่.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

สรุปใจความ

- ตัวดำเนินการ $T : X \to Y$ กระชับ ถ้า $\overline{T(B_X)}$ กระชับ; สมมูลกับว่าทุกลำดับมีขอบเขตมีลำดับย่อยที่ภาพลู่เข้า.
- $K(X,Y)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ $\mathcal{L}(X,Y)$; ตัวดำเนินการอันดับจำกัดกระชับ; การประกอบกับตัวดำเนินการมีขอบเขตยังคงกระชับ.
- ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ตัวดำเนินการกระชับคือลิมิตในนอร์มของตัวดำเนินการอันดับจำกัด; ในปริภูมิสะท้อนกลับ มันเปลี่ยนการลู่เข้าแบบอ่อนเป็นการลู่เข้าในนอร์ม.
- ทฤษฎีบทของชอเดอร์: T กระชับ ก็ต่อเมื่อ T' กระชับ; เครื่องมือคืออาร์เซลา–อาสโคลีและตาข่ายเอปซิลอน.
- ตัวดำเนินการปริพันธ์ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องบนโดเมนมีขอบเขตเป็นตัวดำเนินการกระชับ; ตัวดำเนินการกรีนเป็นตัวอย่างที่อัตราการย่อสลายเป็น $1/(n^2\pi^2)$.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $D : \ell^2 \to \ell^2$, $De_k = e_k/k$. จงแสดงว่า D กระชับ และคำนวณขอบเขตบนของ $\|D - D_N\|$ เมื่อ D_N เป็นการตัดทอน N. ที่ $N = 10$ ขอบเขตนี้เท่าไร?

2. จงแสดงว่าตัวดำเนินการเอกลักษณ์บน ℓ^2 ไม่กระชับ โดยใช้ลำดับ e_n ทั้งลำดับ. เหตุใดการยกตัวอย่างเวกเตอร์เดียวจึงไม่พอ?

3. ให้ $T : X \to Y$ เป็นตัวดำเนินการอันดับจำกัด. จงพิสูจน์ว่า T กระชับ โดยไม่ใช้ทฤษฎีบทไฮเน–โบเรลในรูปที่อ้างลอย ๆ; ต้องระบุว่าบอลหนึ่งหน่วยในพิสัยมิติจำกัดถูกปิดและมีขอบเขต.

4. ให้ $T \in K(X,Y)$ และ $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. จงแสดงว่า ST กระชับ. แล้ว TS กระชับหรือไม่ เมื่อ $S \in \mathcal{L}(Z,X)$? จงพิสูจน์หรือให้ตัวอย่างค้าน.

5. ให้ $K(x,y) = xy$ บน $[0,1]^2$ และ $T_K f(x) = \int_0^1 xy\, f(y)\, dy$. จงหาพิสัยของ T_K, คำนวณนอร์มตัวดำเนินการ และแสดงว่า T_K กระชับ. (แนวคิด: T_K เป็นตัวดำเนินการอันดับหนึ่ง.)

6. ให้ $X = C[0,1]$ พร้อมซูพรีมัมนอร์ม และ $Tf(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$ โดย G เป็นเคอร์เนลปริพันธ์กรีนในหัวข้อนี้. จงอธิบายว่าทำไม T กระชับบน $C[0,1]$ และเพราะเหตุใดการพิสูจน์จึงใช้ความต่อเนื่องเอกรูปของ G ไม่ใช่แค่ความต่อเนื่องทีละจุด. (ไม่ต้องคำนวณอัตราการย่อ.)

ตัวอย่าง Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ตัวดำเนินการแนวทแยง.** สำหรับ $x \in \ell^2$ ที่ $\|x\| \le 1$,
$$\|(D - D_N)x\|^2 = \sum_{k>N} \frac{|x_k|^2}{k^2} \le \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{k>N} |x_k|^2 \le \frac{1}{(N+1)^2}.$$
ดังนั้น $\|D - D_N\| \le 1/(N+1)$. แต่ละ D_N มีพิสัยมิติจำกัด จึงกระชับ; เพราะ $K(\ell^2)$ ปิด, D กระชับ. ที่ $N = 10$ ขอบเขตคือ $1/11 \approx 0.0909$.

2. **เอกลักษณ์ไม่กระชับ.** ให้ e_n เป็นเวกเตอร์ฐานมาตรฐาน. ทุกตัวมี $\|e_n\| = 1$ จึงเป็นลำดับมีขอบเขต. แต่ $\|Ie_n - Ie_m\| = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ ทุก $n \ne m$. ถ้ามีลำดับย่อยลู่เข้า ลำดับนั้นต้องเป็นโคชี; แต่ระยะห่างทุกคู่เป็น $\sqrt{2}$ จึงเป็นโคชีไม่ได้. ดังนั้น I ไม่กระชับ. เวกเตอร์เดียวไม่พอเพราะนิยามต้องการทุกลำดับที่มีขอบเขต; การแสดงว่าลำดับหนึ่งไม่มีลำดับย่อยลู่เข้าคือการพิสูจน์ว่าไม่กระชับ ส่วนเวกเตอร์เดียวเพียงบอกว่าภาพของมันมีขอบเขต.

3. **อันดับจำกัด.** ให้ $E = \operatorname{ran} T$ มีมิติ $m < \infty$. เลือกฐาน $u_1, \dots, u_m$ ของ E และนิยามนอร์ม $\|u\|_E := \max_j |\alpha_j|$ เมื่อ $u = \sum_j \alpha_j u_j$. ในปริภูมิมิติจำกัด นอร์มทั้งหมดสมมูลกัน; จึงมี $C > 0$ ที่ $\|u\|_E \le C\|u\|$ และ $\|u\| \le C'\|u\|_E$. เซต $T(B_X)$ มีขอบเขตใน $(E, \|\cdot\|_E)$ เพราะ $\|Tx\|_E \le C\|Tx\| \le C\|T\|$. ส่วนปิดของมันใน E จึงปิดและมีขอบเขต; โดยไฮเน–โบเรล (ซึ่งใช้ความสมมูลของนอร์มในมิติจำกัด) มันกระชับ. ดังนั้น T กระชับ.

4. **การประกอบ.** ให้ T กระชับและ S มีขอบเขต. แล้ว $\overline{T(B_X)}$ กระชับ; S ต่อเนื่องจึงส่งเซตกระชับไปเซตกระชับ. เพราะ $ST(B_X) \subset S(\overline{T(B_X)})$, ส่วนปิดของ $ST(B_X)$ เป็นเซตปิดย่อยของเซตกระชับ; จึงกระชับ. ส่วน TS เมื่อ $S \in \mathcal{L}(Z, X)$: $S(B_Z)$ มีขอบเขต และ T ส่งเซตมีขอบเขตไปเซตกระชับสัมพัทธ์; ดังนั้น TS กระชับ. ทั้งสองทิศใช้ได้เมื่อตัวที่กระชับอยู่ทางใดทางหนึ่ง.

5. **อันดับหนึ่ง.** ให้ $g(y) = y$. แล้ว $T_K f(x) = x \int_0^1 y f(y)\,dy = x\langle f, g\rangle$. พิสัยคือ $\operatorname{span}\{x\}$ ซึ่งมีมิติหนึ่ง. นอร์ม:
$$\|T_K\| = \|g\|_2^2 = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} \approx 0.3333.$$
ความเท่ากันเกิดเมื่อ $f = g/\|g\|$; แล้ว $T_K f = \|g\|\, x$ และ $\|T_K f\| = \|g\|^2 = \tfrac{1}{3}$. เพราะพิสัยมิติจำกัด T_K กระชับ. (ตัวเลข $1/3$ มีแบบทดสอบยืนยัน.)

6. **เคอร์เนลปริพันธ์กรีนบน $C[0,1]$.** G ต่อเนื่องบน $[0,1]^2$ ซึ่งกระชับ; จึงต่อเนื่องเอกรูป. ให้ $M = \max|G|$ และ $f \in C[0,1]$ กับ $\|f\|_\infty \le 1$. แล้ว $|Tf(x)| \le M$ ทุก x, และ
$$|Tf(x) - Tf(x')| \le \int_0^1 |G(x,y) - G(x',y)|\,|f(y)|\,dy \le \sup_y |G(x,y) - G(x',y)|.$$
ความต่อเนื่องเอกรูปของ G ทำให้ด้านขวาเล็กพร้อมกันทุก f เมื่อ x, x' ใกล้กัน; เซต $\{Tf : \|f\|_\infty \le 1\}$ จึงต่อเนื่องเท่ากันและมีขอบเขต. โดยอาร์เซลา–อาสโคลี (บน $C[0,1]$) ส่วนปิดกระชับ; T กระชับ. ถ้าใช้เพียงความต่อเนื่องทีละจุดเราจะควบคุมการเปลี่ยนแปลงพร้อมกันทุก f ไม่ได้; ต้องมีความต่อเนื่องเอกรูปซึ่งมาจากโดเมนกระชับ.

ตัวเลขทุกตัวในเฉลยนี้มีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch08.py`.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

อ่านต่อ

§8.1 ให้ภาษาของความกระชับและแสดงว่ามันคือ “การประมาณด้วยอันดับจำกัด” ในปริภูมิฮิลเบิร์ต. คำถามต่อไปคือ: เมื่อ T กระชับ สมการ $(I-T)x=y$ มีคำตอบเมื่อไรและมีกี่คำตอบ? §8.2 จะตอบด้วยทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์ ซึ่งบอกว่า $I-T$ ประพฤติเหมือนเมทริกซ์มิติจำกัดในแง่ของมิติ**เคอร์เนล** ($\ker(I-T)$) มิติรองของพิสัย และดัชนี; จากนั้นทางเลือกของเฟรดโฮล์มจะบอกเงื่อนไขการแก้สมการอย่างชัดเจน.

8.2 รีสซ์–ชอเดอร์และทางเลือกของเฟรดโฮล์ม

ในมิติจำกัด ดีเทอร์มิแนนต์บอกคำตอบของ $(I-T)x=y$: ถ้า 1 ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะ มีคำตอบเดียวทุก y; ถ้าใช่ ต้องมี $y\perp\ker(I-T')$. ในมิติอนันต์ไม่มีดีเทอร์มิแนนต์ แต่ถ้า T กระชับ ข้อสรุปเดิมยังใช้ได้.

ภาพรวมก่อนอ่าน

ให้ T เป็นตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิบานาค X และ $S=I-T$. ภาพที่ควรจำคือ: S ใกล้เคียงกับตัวดำเนินการเอกลักษณ์มากพอที่มันจะ “เห็น” เพียงจำนวนจำกัดของทิศทางที่ผิดปกติ. ทิศทางเหล่านั้นรวมกันเป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด ($\ker S$ หรือปริภูมิลักษณะเฉพาะนัยทั่วไป); ทิศทางที่เหลือ S กลับด้านได้อย่างสมบูรณ์. ด้วยเหตุนี้ S จึงมีสมบัติเหมือนเมทริกซ์มิติจำกัด: $\ker S$ มีมิติจำกัด, พิสัยปิด, มิติรองของพิสัยจำกัด, และดัชนีเป็นศูนย์.
ผลที่ตามมาที่ใช้บ่อยที่สุดคือ*ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม*: สำหรับ $\lambda\neq 0$, สมการ $\lambda x-Tx=y$ มีคำตอบเดียวทุก y ถ้าสมการเอกพันธ์มีแต่คำตอบศูนย์; ถ้าไม่ใช่ คำตอบมีก็ต่อเมื่อ y ตั้งฉากกับคำตอบของสมการผูกพัน. เราจะพิสูจน์ทั้งสองด้าน และปิดท้ายด้วยโครงสร้างของสเปกตรัม: ค่าที่ไม่ใช่ศูนย์ของสเปกตรัมคือค่าลักษณะเฉพาะ และมีเพียงศูนย์เท่านั้นที่อาจเป็นจุดสะสม.

8.2.1 เรโซลเวนต์ สเปกตรัม และจุดลักษณะเฉพาะ

เราเริ่มจากคำศัพท์พื้นฐานของทฤษฎีเชิงสเปกตรัม. ในมิติจำกัด ค่าลักษณะเฉพาะคือรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ; ในมิติอนันต์ต้องใช้การผกผันของ $\lambda I-T$ แทนดีเทอร์มิแนนต์.

นิยาม 8.2.1: เซตเรโซลเวนต์และสเปกตรัม

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคเหนือ $\mathbb{K}$ และ $T\in\mathcal{L}(X)$. เซต

$$\rho(T):=\{\lambda\in\mathbb{K}:\lambda I-T \text{ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง}\}$$

เรียกว่า**เซตเรโซลเวนต์** (resolvent set) ของ T, และ

$$\sigma(T):=\mathbb{K}\setminus\rho(T)$$

เรียกว่า**สเปกตรัม** (spectrum) ของ T. สำหรับ $\lambda\in\rho(T)$ ตัวผกผัน

$$R(\lambda;T):=(\lambda I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$$

เรียกว่า**ฟังก์ชันเรโซลเวนต์** (resolvent) ของ T ที่ λ. เราแบ่งสเปกตรัมออกเป็นสามส่วน:

$$\begin{aligned}\sigma_p(T)&:=\{\lambda\in\sigma(T):\ker(\lambda I-T)\neq\{0\}\},\\ \sigma_c(T)&:=\{\lambda\in\sigma(T):\ker(\lambda I-T)=\{0\},\ \overline{\operatorname{ran}(\lambda I-T)}=X\},\\ \sigma_r(T)&:=\{\lambda\in\sigma(T):\ker(\lambda I-T)=\{0\},\ \overline{\operatorname{ran}(\lambda I-T)}\neq X\}.\end{aligned}$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เรียก $\sigma_p(T)$ ว่า**สเปกตรัมจุด** (point spectrum), $\sigma_c(T)$ ว่า**สเปกตรัมต่อเนื่อง** (continuous spectrum) และ $\sigma_r(T)$ ว่า**สเปกตรัมส่วนที่เหลือ** (residual spectrum).

ในนิยามของ $\rho(T)$ เราใช้ “หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง” แทน “มีตัวผกผันที่มีขอบเขต”. สำหรับปริภูมิบานาค ทั้งสองข้อสมมูลกันโดยทฤษฎีบทการส่งเปิดจากทฤษฎีบทหลักสามข้อ: ตัวผกผันของการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงมีขอบเขตโดยอัตโนมัติ. เราจึงใช้สองสำนวนนี้แทนกันได้.

นิยาม 8.2.2: จุดลักษณะเฉพาะและปริภูมิย่อยคงตัว

สำหรับ $T \in \mathcal{L}(X)$ เราเรียก $\lambda \in \mathbb{K}$ ว่า**ค่าลักษณะเฉพาะ** (eigenvalue) เมื่อสมการ $Tx = \lambda x$ มีคำตอบ $x \neq 0$. คำตอบที่ไม่เป็นศูนย์เช่นนั้นชื่อ**เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ** (eigenvector) ของ T ที่ λ. คำตอบทั้งหมดของสมการนี้ รวมศูนย์ด้วย คือปริภูมิย่อย

$$N(\lambda) := \ker(\lambda I - T) = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$$

ซึ่งเราเรียก**ปริภูมิลักษณะเฉพาะ** (eigenspace) ของ T ที่ λ. นอกจากนี้ $Y \subset X$ เป็น**ปริภูมิย่อยคงตัว** (invariant subspace) เมื่อ T ไม่ส่งเวกเตอร์ใดใน Y ออกนอก Y, นั่นคือ $T(Y) \subset Y$.

สังเกตว่า $\lambda \in \sigma_p(T)$ ก็ต่อเมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ; และปริภูมิลักษณะเฉพาะเป็นปริภูมิย่อยคงตัวเสมอ เพราะถ้า $Tx = \lambda x$ แล้ว $T(Tx) = \lambda Tx$. ในมิติจำกัด ทุกจุดของสเปกตรัมเป็นค่าลักษณะเฉพาะ; ในมิติอนันต์ไม่เป็นเช่นนั้น: ตัวดำเนินการเลื่อนขวาบน ℓ^2 มีสเปกตรัมเป็นดิสก์หน่วยปิดแต่ไม่มีค่าลักษณะเฉพาะ; ตัวเลื่อนซ้ายมีค่าลักษณะเฉพาะ. (ไม่พิสูจน์ในบทนี้.)

ลองเอง: สเปกตรัมของตัวดำเนินการแนวทแยง

ให้ $D : \ell^2 \to \ell^2$, $De_k = e_k/k$. แล้ว $\|D\| = 1$ และ

$$\sigma(D) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{k} : k \geq 1 \right\}.$$

เหตุผล: ถ้า $\lambda \neq 0$ และ $\lambda \neq 1/k$ ทุก k, ตัวดำเนินการ $\lambda I - D$ มีตัวผกผันทแยงที่มีค่า $1/(\lambda - 1/k)$ และ $\sup_k |1/(\lambda - 1/k)| < \infty$ เพราะ $1/k \to 0$; ดังนั้น $\lambda \in \rho(D)$. ถ้า $\lambda = 1/k$ แล้ว $(\lambda I - D)e_k = 0$; จึงเป็นค่าลักษณะเฉพาะ. ที่ $\lambda = 0$: D เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (เพราะ $Dx = 0$ บังคับ $x = 0$) แต่ไม่ทั่วถึง. ให้ $y = (1/k)_{k \geq 1} \in \ell^2$; ถ้า $Dx = y$ แล้ว $x_k = 1$ ทุก k, ซึ่งขัดกับ $x \in \ell^2$. สำหรับ $y^{(N)} = (1, 1/2, \ldots, 1/N, 0, \ldots)$ มี $y^{(N)} = Dx^{(N)}$ โดย $x^{(N)} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ และ $\|x^{(N)}\| = \sqrt{N} \to \infty$, ขณะที่ $y^{(N)} \to y$ ใน ℓ^2. ดังนั้นพิสัยไม่ปิด, $0 \in \sigma(D)$ แต่ $0 \notin \sigma_p(D)$. ตัวอย่างเช่น $\lambda = 1/2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ e_2; ตัวเลข $1/2$ นี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

8.2.2 คลาสเฟรดโฮล์มและดัชนีของมัน

ก่อนพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เรานิยามคลาสของตัวดำเนินการที่มี “$\ker A$ มิติจำกัดและมิติรองของพิสัยจำกัด”.

ร่างเพื่อการพิมพ์ · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 8.2.3: ตัวดำเนินการเฟรดโฮล์มและดัชนี

ให้ X, Y เป็นปริภูมิบานาค. ตัวดำเนินการ $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ เรียกว่า**ตัวดำเนินการเฟรดโฮล์ม** (Fredholm operator) ถ้า

(a) $\dim \ker A < \infty$;

(b) $\operatorname{ran} A$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ Y;

(c) **มิติรอง** (codimension) ของ $\operatorname{ran} A$ ใน Y มีจำกัด, กล่าวคือมีปริภูมิย่อยมิติจำกัด $Y_0 \subset Y$ ที่ $Y = \operatorname{ran} A \oplus Y_0$ เป็น**ผลบวกตรง** (direct sum).

ในกรณีนี้ จำนวน

$$\operatorname{ind}(A) := \dim \ker A - \operatorname{codim} \operatorname{ran} A$$

เรียกว่า**ดัชนีเฟรดโฮล์ม** (Fredholm index) ของ A.

มิติรองไม่ขึ้นกับการเลือก Y_0: ถ้า $Y = \operatorname{ran} A \oplus Y_0$ และ $Y = \operatorname{ran} A \oplus Y_1$ แล้ว Y_0 กับ Y_1 มีมิติเท่ากัน (เพราะทั้งคู่เป็นปริภูมิผลหาร $Y/\operatorname{ran} A$ ในรูปแบบต่างๆ). เราจึงเขียน $\operatorname{codim} \operatorname{ran} A$ ได้โดยไม่กำกวม.

ข้อควรระวัง: เฟรดโฮล์มไม่ได้หมายถึงดัชนีศูนย์

ตัวดำเนินการเลื่อนขวา $S_+ : \ell^2 \to \ell^2$, $S_+(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ เป็นตัวดำเนินการเฟรดโฮล์ม: $\ker S_+ = \{0\}$ และ $\operatorname{ran} S_+ = \{y : y_1 = 0\}$ เป็นปริภูมิย่อยปิดที่มีมิติรอง 1. ดัชนีคือ $0 - 1 = -1$. ตัวดำเนินการเลื่อนซ้าย S_- มีดัชนี $+1$. ดังนั้น “เฟรดโฮล์ม” ไม่ได้บังคับให้ดัชนีเป็นศูนย์; ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์จะบอกว่าการรบกวนเอกลักษณ์ด้วยตัวดำเนินการกระชับให้ดัชนีศูนย์เสมอ. ตัวเลื่อนไม่กระชับ: $S_+ e_n = e_{n+1}$ และ $\|e_{n+1} - e_{m+1}\| = \sqrt{2}$; จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

8.2.3 ทฤษฎีบทของอัลต์: การแยกปริภูมิมิติจำกัดออกจากปริภูมิปิด

ผลต่อไปนี้มาจาก Alt 2012, ทฤษฎีบท 7.16. เราวางไว้ที่นี่เพราะจะใช้ในข้อ (c) ของทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์ เพื่อทำให้ผลบวกตรง $X = N \oplus R$ เป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยี. ผลนี้ยังอธิบายว่าทำไมปริภูมิย่อยมิติจำกัด E จึงเป็น**ปริภูมิย่อยที่มีส่วนเติมเต็ม** (complemented subspace); ส่วนเติมเต็มที่สร้างได้ในข้อ (2) เป็น**ส่วนเติมเต็มปิด** (closed complement).

ทฤษฎีบท 8.2.1: ทฤษฎีบทของอัลต์สำหรับปริภูมิย่อยมิติจำกัด

ให้ X เป็นปริภูมินอร์ม, $E \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยมิติ n ที่มีฐาน $\{e_1, \dots, e_n\}$, และ $Y \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยปิดที่ $Y \cap E = \{0\}$. แล้ว

(1) มีฟังก์ชันนัล $e_1', \dots, e_n' \in X'$ ซึ่ง $e_j' = 0$ บน Y และ

$$\langle e_i, e_j' \rangle = \delta_{ij} \qquad (1 \le i, j \le n);$$

(2) มีการฉายต่อเนื่อง $P : X \to E$ ที่ $\operatorname{ran} P = E$ และ $Y \subset \ker P$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (1): แต่ละ j กำหนด $Y_j = \operatorname{span}\{e_k : k \neq j\} \oplus Y$; ปริภูมิปิดนี้ไม่มี e_j เป็นสมาชิก. ใช้ฮาห์น–บานาคแยก e_j ออกจาก Y_j; ฟังก์ชันนัลที่ได้เป็นศูนย์ทั้ง Y_j และให้ค่า 1 กับ e_j. ข้อ (2): ประกอบฟังก์ชันนัลเหล่านี้เป็นพิกัดของ E

ร่างไม่เป็นทางการ · Preprint · 2026-10-24

แล้วนิยาม $Px = \sum_j \langle x, e'_j\rangle e_j$.

1. **ปิดของ Y_j.** ให้ $F_j := \operatorname{span}\{e_k : k \neq j\}$. แล้ว F_j มีมิติจำกัด. ปริภูมิ $Y + F_j$ ปิด: ภาพของ F_j ภายใต้การส่งผลหาร $X \to X/Y$ เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัดของ X/Y จึงปิด, และ $Y + F_j$ เป็นภาพย้อนกลับของภาพนั้น. เพราะ $Y \cap E = \{0\}$ และ $e_j \notin F_j$, ผลบวก $Y_j = Y \oplus F_j$ เป็นผลบวกตรงและปิด.

2. **$e_j \notin Y_j$.** ถ้า $e_j \in Y_j$ แล้ว $e_j = f + y$ กับ $f \in F_j$, $y \in Y$. แล้ว $e_j - f = y \in E \cap Y = \{0\}$; ดังนั้น $e_j = f$, ขัดกับความเป็นอิสระเชิงเส้นของฐาน.

3. **แยกด้วยฮาห์น–บานาค.** บทแทรกการแยกจุดออกจากปริภูมิย่อยปิดในบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค ให้ $g_j \in X'$ ซึ่ง $g_j = 0$ บน Y_j และ $g_j(e_j) \neq 0$. ปรับสเกลาร์และตั้ง $e'_j := g_j$ เพื่อให้ $e'_j(e_j) = 1$. เมื่อ $i \neq j$ เรามี $e_i \in F_j \subset Y_j$; ดังนั้น $e'_j(e_i) = 0$. ผลคือ $\langle e_i, e'_j\rangle = \delta_{ij}$. เนื่องจาก $Y \subset Y_j$, ฟังก์ชันนัล e'_j เป็นศูนย์บน Y.

4. **สร้างการฉาย.** นิยาม
$$Px := \sum_{j=1}^{n} \langle x, e'_j\rangle\, e_j \qquad (x \in X).$$
P เป็นเชิงเส้นและต่อเนื่อง เพราะเป็นผลรวมจำกัดของฟังก์ชันนัลต่อเนื่องคูณเวกเตอร์. สำหรับ $x = \sum_i \alpha_i e_i \in E$,
$$Px = \sum_j \Big\langle \sum_i \alpha_i e_i, e'_j \Big\rangle e_j = \sum_j \alpha_j e_j = x.$$
ดังนั้น $\operatorname{ran} P = E$ และ $P^2 = P$. ถ้า $y \in Y$ แล้ว $e'_j(y) = 0$ ทุก j; จึง $Py = 0$ และ $Y \subset \ker P$.

สรุป: ปริภูมิย่อยมิติจำกัดที่มีส่วนร่วมกับปริภูมิปิดเป็นศูนย์ มีฟังก์ชันนัลคู่ที่เป็นศูนย์บนปริภูมิปิด และมีการฉายต่อเนื่องที่มีเคอร์เนลครอบปริภูมิปิดนั้น. □

ข้อควรระวัง: สมมติฐาน $Y \cap E = \{0\}$ ขาดไม่ได้

ถ้า $Y \cap E \neq \{0\}$ ข้อ (1) อาจเป็นเท็จ. ตัวอย่างเช่น ให้ $X = \mathbb{R}^2$, $E = \operatorname{span}\{(1,0)\}$, $Y = \operatorname{span}\{(1,0)\}$; แล้ว $Y \cap E = E \neq \{0\}$. ฟังก์ชันนัล e'_1 ที่เป็นศูนย์บน Y ต้องมี $e'_1(1,0) = 0$; จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $\langle e_1, e'_1\rangle = 1$. ในทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์ เราใช้ทฤษฎีบทนี้กับการแยก $X = N \oplus R$ ซึ่งเรารู้แล้วว่า $N \cap R = \{0\}$; สมมติฐานจึงพอดีกับสถานการณ์.

8.2.4 ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์

ตอนนี้เรามีเครื่องมือครบที่จะพิสูจน์ผลหลัก. เราเขียน $S := I - T$ และพิสูจน์ตามลำดับ: $\ker S$ มิติจำกัด, พิสัยปิดและมิติร่วมจำกัด, แล้วดัชนีศูนย์. หัวใจคือลูกโซ่ของ $\ker S^m$ และ $\operatorname{ran} S^m$.

ทฤษฎีบท 8.2.2: ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค, $T \in K(X)$ และ $S := I - T$. แล้ว

(a) $\dim \ker S < \infty$;

(b) $\operatorname{ran} S$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ X และ $\operatorname{codim} \operatorname{ran} S < \infty$;

(c) $\dim(X/\operatorname{ran} S) = \dim \ker S = \dim(X'/\operatorname{ran} S') = \dim \ker S'$.

โดยเฉพาะ S เป็นตัวดำเนินการเฟรดโฮล์มที่มีดัชนี 0.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขั้น (a): บนเคอร์เนล S ทำตัวเหมือนเอกลักษณ์; บอลหนึ่งหน่วยของเคอร์เนลจึงอยู่ในภาพของ T ซึ่งกระชับสัมพัทธ์. ขั้น (b): S ทำให้เกิดการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก $X/\ker S$ ไปยังพิสัย; ถ้าตัวผกผันไม่ต่อเนื่อง จะได้ลำดับที่ขัดกับความกระชับ. มิติรองจำกัดตามมาจากการดูตัวผูกพันและใช้ซอเดอร์. ขั้น (c): สร้างลูกโซ่ $\ker S^m$ และ $\operatorname{ran} S^m$; ความกระชับบังคับให้ลูกโซ่หยุดที่ p; แล้ว $X = \ker S^p \oplus \operatorname{ran} S^p$ และ S กลับด้านได้บนส่วนที่สอง. ดัชนีจึงเท่ากับมิติของผลหารมิติจำกัดซึ่งเท่ากับมิติเคอร์เนล.

1. **(a) เคอร์เนลมิติจำกัด.** ให้ $x \in \ker S$ กับ $\|x\| \le 1$. แล้ว $Sx = 0$; ดังนั้น $x = Tx \in T(B_X)$. เราจึงได้

$$B_{\ker S} := \ker S \cap B_X \subset T(B_X).$$

   เพราะ T กระชับ, $\overline{T(B_X)}$ กระชับ; เซตย่อย $B_{\ker S}$ จึงกระชับสัมพัทธ์. บอลหนึ่งหน่วยของ $\ker S$ มีส่วนปิดกระชับ. โดยบทตั้งของรีสซ์ (Werner 2007, บทตั้ง I.2.6; ปริภูมินอร์มที่มีบอลหนึ่งหน่วยกระชับสัมพัทธ์มีมิติจำกัด เพราะถ้าไม่ใช่จะเลือกเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ห่างจากปริภูมิก่อนหน้าอย่างน้อย $1/2$ ได้เรื่อย ๆ) $\dim \ker S < \infty$.

2. **(b) พิสัยปิด.** ให้ $\bar{S} : X/\ker S \to \operatorname{ran} S$, $\bar{S}(x + \ker S) := Sx$. นิยามดีเพราะ S หายบนเคอร์เนล; $\bar{S}$ เป็นเชิงเส้นต่อเนื่องและเป็นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง. เราจะแสดงว่า $\bar{S}^{-1}$ ต่อเนื่อง. สมมติไม่; แล้วมีลำดับ $[x_n] \in X/\ker S$ ที่ $\|[x_n]\| = 1$ และ $Sx_n \to 0$. ตามนิยามของนอร์มผลหาร เราเลือกตัวแทน x_n ที่ $\|x_n\| \le 2$. เพราะ T กระชับ, มีลำดับย่อยที่ $Tx_{n_k} \to z$. แล้ว

$$x_{n_k} = Tx_{n_k} + Sx_{n_k} \longrightarrow z + 0 = z.$$

   เพราะ S ต่อเนื่อง, $Sz = 0$; ดังนั้น $[z] = 0$ ใน $X/\ker S$. แต่ $\|[x_{n_k}]\| = 1$ ทุก k และ $[x_{n_k}] \to [z] = 0$; ขัดแย้ง. ดังนั้น $\bar{S}^{-1}$ ต่อเนื่อง. เพราะ $X/\ker S$ บริบูรณ์, พิสัย $\operatorname{ran} S$ ซึ่งเป็นภาพของปริภูมิบริบูรณ์ภายใต้สมสัณฐาน $\bar{S}$ จึงบริบูรณ์; จึงปิดใน X.

3. **(b) มิติรองจำกัด.** สำหรับปริภูมิย่อยปิด $M \subset X$, มีสมสัณฐาน $(X/M)' \cong M^{\perp}$ (บทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค). ใช้ $M = \operatorname{ran} S$. เพราะ $\operatorname{ran} S$ ปิด, ทฤษฎีบทพิสัยปิดให้ $\operatorname{ran} S' = (\ker S)^{\perp}$; ส่วน $(\operatorname{ran} S)^{\perp} = \ker S'$ ตามนิยามของตัวผูกพัน. ดังนั้น

$$(X/\operatorname{ran} S)' \cong \ker S'.$$

   เพราะ $S' = I - T'$ และ T' กระชับโดยทฤษฎีบทของซอเดอร์, ขั้น (a) ใช้กับ S' ได้: $\dim \ker S' < \infty$. เพราะ $(X/\operatorname{ran} S)'$ มีมิติจำกัด, $X/\operatorname{ran} S$ มีมิติจำกัดและเท่ากับมิติของคู่; ดังนั้น $\operatorname{codim} \operatorname{ran} S = \dim \ker S' < \infty$.

4. **เตรียมลูกโซ่.** สำหรับ $m \ge 0$ ตั้ง

$$N_m := \ker S^m, \qquad R_m := \operatorname{ran} S^m,$$

   โดย $N_0 = \{0\}$ และ $R_0 = X$. แล้ว

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots, \qquad R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots.$$

   เพราะ $S^m = (I - T)^m = I - T_m$ กับ T_m กระชับ (ผลรวมเชิงเส้นของกำลังของ T ซึ่งกระชับโดยทฤษฎีบท 8.1.2(c)), ขั้น (a) และ (b) ใช้กับ S^m ได้: N_m มีมิติจำกัด และ R_m ปิดและมีมิติรองจำกัด.

5. **ลูกโซ่ N_m หยุด.** ถ้า $N_m \neq N_{m+1}$ ทุก m, โดยบทตั้งของรีสซ์ (Werner 2007, บทตั้ง I.2.6) เลือก $x_m \in N_m$ ที่ $\|x_m\| = 1$ และ $\operatorname{dist}(x_m, N_{m-1}) \ge 1/2$. สำหรับ $n > m$,

$$Tx_n - Tx_m = x_n - (Sx_n + x_m - Sx_m).$$

   วงเล็บอยู่ใน N_{n-1} เพราะ $Sx_n \in N_{n-1}$, $x_m \in N_m \subset N_{n-1}$ และ $Sx_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$. ดังนั้น $\|Tx_n - Tx_m\| \ge 1/2$ ทุก $n > m$. ถ้าลำดับภาพมีลำดับย่อยลู่เข้า ลำดับย่อยนั้นต้องเป็นโคชี; แต่คู่ใด ๆ ในภาพอยู่ห่างกันอย่างน้อย $1/2$, จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า. นี่ขัดกับสมมติฐานว่า T กระชับ. จึงมี p_N ที่ $N_{p_N} = N_{p_N+1}$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

6. **ลูกโซ่ R_m หยุด.** ถ้า $R_m \neq R_{m+1}$ ทุก m, เลือก $x_m \in R_m$ ที่ $\|x_m\| = 1$ และ $\operatorname{dist}(x_m, R_{m+1}) \geq 1/2$. สำหรับ $n > m$, $x_n \in R_{m+1}$ และ

$$Tx_n - Tx_m = -x_m + \big(x_n - Sx_n + Sx_m\big),$$

โดยวงเล็บอยู่ใน R_{m+1} เพราะ $x_n, Sx_n \in R_{m+1}$ และ $Sx_m \in R_{m+1}$. ดังนั้น $\|Tx_n - Tx_m\| \geq 1/2$; ขัดกับความกระชับ. จึงมี p_R ที่ $R_{p_R} = R_{p_R+1}$.

7. **เลือก p ร่วม.** ให้ $p := \max(p_N, p_R)$. แล้ว $N_p = N_{p+1}$ และ $R_p = R_{p+1}$; โดยการทำซ้ำ $N_{p+r} = N_p$ และ $R_{p+r} = R_p$ ทุก $r \geq 0$.

8. **$N_p \cap R_p = \{0\}$.** ให้ $x \in N_p \cap R_p$. แล้ว $S^p x = 0$ และ $x = S^p y$ สำหรับบาง y. ดังนั้น $y \in N_{2p} = N_p$; จึง $x = S^p y = 0$.

9. **การแยก $X = N_p + R_p$.** ให้ $x \in X$. เพราะ $R_p = R_{2p}$, $S^p x \in R_p = R_{2p}$; จึงมี y ที่ $S^p x = S^{2p} y$. แล้ว

$$x = (x - S^p y) + S^p y,$$

โดย $x - S^p y \in N_p$ (เพราะ $S^p(x - S^p y) = S^p x - S^{2p} y = 0$) และ $S^p y \in R_p$. ร่วมกับ $N_p \cap R_p = \{0\}$ ได้ $X = N_p \oplus R_p$.

10. **ผลบวกตรงเชิงทอพอโลยี.** ใช้ทฤษฎีบท 8.2.1(2) กับ $E = N_p$ และ $Y = R_p$ (ทั้งคู่ปิด, ส่วนร่วมเป็นศูนย์). ได้การฉายต่อเนื่อง P บน N_p ที่ $R_p \subset \ker P$. แล้ว $X = N_p \oplus \ker P$; เพราะ $N_p + R_p = X$ และ $R_p \subset \ker P$, ต้องมี $\ker P = R_p$. ดังนั้นผลบวกตรง $X = N_p \oplus R_p$ เป็นเชิงทอพอโลยี.

11. **ดัชนีศูนย์.** บน R_p, S ส่ง R_p ไปยัง $R_{p+1} = R_p$ และเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง (ถ้า $Sy = 0$ กับ $y \in R_p$ แล้ว $y \in N_1 \subset N_p$ และ $y \in R_p$; โดย $N_p \cap R_p = \{0\}$, $y = 0$). โดยทฤษฎีบทการส่งเปิด, $S|_{R_p} : R_p \to R_p$ เป็นสมสัณฐาน. พิจารณาการส่ง

$$\Phi : N_p/\operatorname{ran}(S|_{N_p}) \longrightarrow X/\operatorname{ran} S, \qquad [n] \longmapsto [n].$$

Φ นิยามดีเพราะ $\operatorname{ran}(S|_{N_p}) \subset \operatorname{ran} S$. เพื่อตรวจว่า Φ ฉีด สมมติ $n \in N_p$ และ $n = Sy$ กับ $y = y_1 + y_2 \in N_p \oplus R_p$. แล้ว $Sy_2 = n - Sy_1 \in N_p$; แต่ $Sy_2 \in R_p$, จึง $Sy_2 = 0$ และ $y_2 = 0$. ดังนั้น $n = Sy_1 \in \operatorname{ran}(S|_{N_p})$. ส่วนการทั่วถึงตามเพราะทุก $x = n + r$ ($n \in N_p$, $r \in R_p$) มีภาพเดียวกันกับ n เพราะ $r \in R_p = S(R_p) \subset \operatorname{ran} S$. ดังนั้น

$$\operatorname{codim} \operatorname{ran} S = \dim \frac{N_p}{\operatorname{ran}(S|_{N_p})}.$$

เพราะ N_p มีมิติจำกัด, ทฤษฎีบทมิติ (rank–nullity) ให้

$$\dim \frac{N_p}{\operatorname{ran}(S|_{N_p})} = \dim \ker(S|_{N_p}) = \dim \ker S.$$

ความเท่ากันสุดท้ายเพราะ $\ker S \subset N_p$ (ถ้า $x \in \ker S$ แล้ว $x \in N_1 \subset N_p$) และ $\ker S = \{x \in N_p : Sx = 0\}$ จึงเป็น $\ker(S|_{N_p})$. เราจึงได้ $\operatorname{codim} \operatorname{ran} S = \dim \ker S$. รวมกับขั้น (b) ที่ว่า $\operatorname{codim} \operatorname{ran} S = \dim \ker S'$ และการดู $(X'/\operatorname{ran} S') \cong (\ker S)'$, ได้ความเท่ากันทั้งสี่มิติในข้อ (c).

สรุป: $I - T$ มี $\ker(I - T)$ มิติจำกัด, พิสัยปิดมีมิติรองจำกัด, และมิติของ $\ker(I - T)$ เท่ากับมิติรองของพิสัย; ดัชนีจึงเป็นศูนย์. □

ฉบับร่าง · Preprint 2026-10-24

ข้อควรระวัง: การแยกและการฉายไม่ได้มาจากความกระชับโดยตรง

ในข้อ 10 เราใช้ทฤษฎีบทของอัลต์เพื่อให้ได้*การฉายต่อเนื่อง*บน N_p ที่มี $R_p \subset \ker P$. การแยกเชิงพีชคณิต $X = N_p \oplus R_p$ ตามมาจากส่วนร่วมเป็นศูนย์และผลบวกเต็ม; แต่การแยกเชิงทอพอโลยีต้องมีการฉายต่อเนื่อง. ในฮิลเบิร์ตได้จากการฉาย; ในบานาคทั่วไป ทฤษฎีบทของอัลต์คือสิ่งที่รับประกัน.

8.2.5 ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม

ทฤษฎีบท 8.2.3: ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม

ให้ $T \in K(X)$ และ $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. แล้วอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง:

(a) สมการ $\lambda x - Tx = 0$ มีเพียงคำตอบ $x = 0$; ในกรณีนี้สมการ $\lambda x - Tx = y$ มีคำตอบเดียวทุก $y \in X$;

(b) $\ker(\lambda I - T)$ มีมิติ n โดย $1 \leq n < \infty$; ในกรณีนี้ $\ker(\lambda I - T')$ มีมิติ n เช่นกัน และสมการ $\lambda x - Tx = y$ มีคำตอบก็ต่อเมื่อ

$$y'(y) = 0 \qquad \text{ทุก } y' \in \ker(\lambda I - T').$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน $\lambda I - T = \lambda(I - T/\lambda)$; ตัวดำเนินการ T/λ กระชับ. ใช้ทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์กับ $I - T/\lambda$: มิติของเคอร์เนลเท่ากับมิติรองของพิสัย. กรณี (a) มิติรองของพิสัยเป็นศูนย์ จึงทั่วถึง; กรณี (b) เงื่อนไขการแก้สมการคือการตั้งฉากกับเคอร์เนลของตัวผูกพัน.

1. **ปรับสเกล.** ให้ $S := \lambda I - T = \lambda(I - T/\lambda)$. เพราะ T/λ กระชับ, ทฤษฎีบท 8.2.2 ให้ S เป็นเฟรดโฮล์มและ
$$\dim \ker S = \operatorname{codim} \operatorname{ran} S = \dim \ker S'.$$

2. **กรณี (a).** ถ้า $\ker S = \{0\}$ แล้ว $\operatorname{codim} \operatorname{ran} S = 0$; ดังนั้น $\operatorname{ran} S = X$. S เป็นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง; ตัวผกผันมีขอบเขตโดยทฤษฎีบทการส่งเปิด. คำตอบจึงมีหนึ่งเดียวทุก y.

3. **กรณี (b).** ให้ $n := \dim \ker S \geq 1$. จากความเท่ากันข้างต้น, $\dim \ker S' = n$. เพราะ $\operatorname{ran} S$ ปิด, มีความเท่ากันของ annihilator
$$\operatorname{ran} S = (\ker S')^{\perp} := \{y \in X : y'(y) = 0 \text{ ทุก } y' \in \ker S'\}.$$
($\subset$ ชัดเจน; $\supset$ ใช้ทฤษฎีบทฮาห์น–บานาคแยก $y \notin \operatorname{ran} S$ ด้วยฟังก์ชันนัลที่เป็นศูนย์บน $\operatorname{ran} S$.) ดังนั้น $y \in \operatorname{ran} S$ ก็ต่อเมื่อ $y'(y) = 0$ ทุก $y' \in \ker S'$. นี่คือเงื่อนไขที่ต้องการ.

สรุป: สำหรับ $\lambda \neq 0$, $\lambda I - T$ เป็นเฟรดโฮล์มดัชนีศูนย์; จึงแก้ได้ทุก y เมื่อฉีด, และเมื่อไม่ฉีด เงื่อนไขการแก้คือการตั้งฉากกับเคอร์เนลของตัวผูกพัน. □

ลองเอง: ตัวดำเนินการอันดับหนึ่งและการแก้สมการ

บน $L^2(0,1)$ ให้
$$(Tf)(x) := x \int_0^1 y\, f(y)\, dy.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แล้ว T เป็นตัวดำเนินการอันดับหนึ่ง (พิสัยคือ $\operatorname{span}\{x\}$) และ $\|T\| = \|y\|_2^2 = 1/3 \approx 0.3333$. คำนวณตรง ๆ:

$$T^2 f = x\Big(\int_0^1 y^2\,dy\Big)\Big(\int_0^1 y f(y)\,dy\Big) = x\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 y f(y)\,dy = \frac{1}{3}Tf.$$

ดังนั้น T มีค่าลักษณะเฉพาะ $1/3$ (เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ x) และ 0 (บน $\ker T = \{f : \int yf = 0\}$). สมการ $(I-T)x = 1$ แก้ได้เพราะ $1 \notin \sigma(T)$. เขียน $x(t) = 1 + ct$; แล้ว

$$c = \int_0^1 t\,x(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{c}{3},$$

จึง $c = 3/4$ และ $x(t) = 1 + \frac{3}{4}t$. ตรวจ: $\int_0^1 tx(t)\,dt = 3/4$; ตัวเลข $1/3$, $1/2$ และ $3/4$ มีแบบทดสอบยืนยัน. สำหรับสมการ $(I-3T)x = y$ กับ $y(t) = 1 - at$ (เพราะ $3T$ มีค่าลักษณะเฉพาะ 1), เงื่อนไขการแก้คือ

$$\int_0^1 t\,y(t)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{a}{3} = 0,$$

นั่นคือ $a = 3/2$. ที่ $a = 3/2$ สมการแก้ได้; ที่ $a = 0$ ไม่ได้ เพราะ $\int_0^1 t\,dt = 1/2 \neq 0$.

8.2.6 โครงสร้างของสเปกตรัม

ทฤษฎีบท 8.2.4: สเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคเชิงซ้อนอนันต์มิติ และ $T \in K(X)$. แล้ว

(a) $0 \in \sigma(T)$;

(b) $\sigma(T)\setminus\{0\}$ ประกอบด้วยค่าลักษณะเฉพาะของ T; แต่ละค่ามีปริภูมิลักษณะเฉพาะมิติจำกัด; เซตนี้มีได้ไม่เกินจำนวนนับได้ และมีจุดสะสมได้เพียง 0 เท่านั้น;

(c) สำหรับ $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}$ มีการแยก $X = N_g(\lambda) \oplus R(\lambda)$ เป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยี โดย $N_g(\lambda)$ มีมิติจำกัด, T-คงตัว, บรรจุ $\ker(\lambda I - T)$, และ $(\lambda I - T)|_{R(\lambda)}$ เป็นสมสัณฐานจาก $R(\lambda)$ ไปทั่วถึง $R(\lambda)$;

(d) ฟังก์ชันเรโซลเวนต์ $\mu \mapsto R(\mu;T)$ มีขั้ว (pole) อันดับจำกัดที่ λ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ข้อ (a): ถ้า T ผกผันได้ แล้ว $I = TT^{-1}$ กระชับ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในมิติอนันต์. ข้อ (b): ถ้า $\lambda \neq 0$ และ $\lambda I - T$ ฉีด, ทางเลือกของเฟรดโฮล์มให้มันทั่วถึง; จึง $\lambda \notin \sigma(T)$. ความมีมิติจำกัดตามจากรีสซ์–ชอเดอร์. การสะสมที่ $\lambda \neq 0$ ถูกตัดด้วยบทตั้งของรีสซ์และความกระชับ. ข้อ (c) และ (d) ตามจากการแยกในบทพิสูจน์ของรีสซ์–ชอเดอร์ (ลูกโซ่ $\ker S^m$) และการวิเคราะห์เชิงซ้อนของเรโซลเวนต์.

1. **(a).** ถ้า T มีตัวผกผันมีขอบเขต แล้ว $I = TT^{-1}$ เป็นการประกอบของตัวดำเนินการกระชับกับตัวดำเนินการมีขอบเขต; โดยทฤษฎีบท 8.1.2(c) I กระชับ. แต่ในปริภูมิอนันต์มิติ I ไม่กระชับ (ลำดับ e_n). ขัดแย้ง. ดังนั้น $0 \in \sigma(T)$.

2. **(b) ทุกจุดที่ไม่ใช่ศูนย์ของสเปกตรัมเป็นค่าลักษณะเฉพาะ.** ให้ $\lambda \neq 0$. ถ้า $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$ แล้วทางเลือกของเฟรดโฮล์ม (กรณี (a)) ให้ $\lambda I - T$ ทั่วถึง; ดังนั้น $\lambda \in \rho(T)$, ขัดกับ $\lambda \in \sigma(T)$. จึง $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$; นั่นคือ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ. ความมีมิติจำกัดของ $\ker(\lambda I - T)$ ตามจากทฤษฎีบท 8.2.2(a) ใช้กับ $I - T/\lambda$.

3. **(b) การสะสม.** ให้ $\delta > 0$ และสมมติมีค่าลักษณะเฉพาะต่างกัน $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ กับ $|\lambda_n| \geq \delta$. เลือกเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $x_n \neq 0$ ที่ $Tx_n = \lambda_n x_n$. เวกเตอร์เหล่านี้เป็นอิสระเชิงเส้น (ค่าลักษณะเฉพาะต่างกันให้เวกเตอร์

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

อิสระ). โดยบทตั้งของรีสซ์ (Werner 2007, บทตั้ง I.2.6) เลือก $y_n \in \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}$ ที่ $\|y_n\| = 1$ และ $\operatorname{dist}(y_n, \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}) \geq 1/2$. สำหรับ $n > m$,

$$Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \big[(\lambda_n I - T)y_n + Ty_m\big].$$

วงเล็บอยู่ใน $\operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$: $(\lambda_n I - T)y_n$ อยู่ในช่วงเชิงเส้นนั้นเพราะ $(\lambda_n I - T)$ ฆ่าส่วน x_n และส่งส่วนที่เหลือเข้าไปในช่วงเชิงเส้นของ $x_1,\dots,x_{n-1}$; และ $Ty_m \in \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_m\} \subset \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$. ดังนั้น

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n| \operatorname{dist}(y_n, \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}) \geq \frac{\delta}{2}.$$

ลำดับ (Ty_n) ไม่มีลำดับย่อยโคชี; ขัดกับความกระชับของ T. ดังนั้นมีค่าลักษณะเฉพาะที่มี $|\lambda| \geq \delta$ ได้เพียงจำนวนจำกัด. เขียน $\sigma(T)\setminus\{0\} = \bigcup_{m\geq 1}\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq 1/m\}$; แต่ละเซตจำกัด จึงนับได้ และจุดสะสมใด ๆ ต้องมี $|\lambda| = 0$; นั่นคือ 0.

4. **(c) การแยก.** ให้ $\lambda \neq 0$ และ $S := \lambda I - T$. เขียน $S = \lambda(I - T/\lambda)$ และใช้บทตั้งลูกโซ่ (Werner 2007, บทตั้ง VI.2.2) ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 8.2.2 กับ T/λ. ได้ p ที่ $N_p := \ker((I-T/\lambda)^p)$ มีมิติจำกัด, $R_p := \operatorname{ran}((I-T/\lambda)^p)$ ปิด, $X = N_p \oplus R_p$ และ $(I-T/\lambda)|_{R_p}$ เป็นสมสัณฐาน. ตั้ง $N_g(\lambda) := N_p$ และ $R(\lambda) := R_p$. แล้ว $N_g(\lambda) = \ker((\lambda I - T)^p)$ เป็นปริภูมิลักษณะเฉพาะนัยทั่วไป, มีมิติจำกัด, T-คงตัว, และบรรจุ $\ker(\lambda I - T)$. การคูณด้วย λ แสดงว่า $(\lambda I - T)|_{R(\lambda)}$ เป็นสมสัณฐาน. (การแยกเป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยีมาจากทฤษฎีบทของอัลต์ เช่นเดียวกับในบทพิสูจน์ของรีสซ์–ชอเดอร์.)

5. **(d) ขั้วของเรโซลเวนต์.** ข้อนี้ตามจากข้อ (c): บน $R(\lambda)$ ตัวดำเนินการ $\mu I - T$ กลับด้านได้และเรโซลเวนต์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านของ λ; บน $N_g(\lambda)$ ซึ่งมีมิติจำกัด ตัวดำเนินการ T มีรูปแบบปรกติจอร์แดน และ $(\mu I - T)^{-1}$ มีขั้วอันดับไม่เกิน $\dim N_g(\lambda)$ ที่ $\mu = \lambda$. ไม่พิสูจน์ในบทนี้; ดู Alt 2012, ทฤษฎีบท 9.10. (ข้อความที่ใช้คือ “อันดับขั้วมีจำกัด”; เราไม่ต้องใช้ค่าของอันดับในบทนี้.)

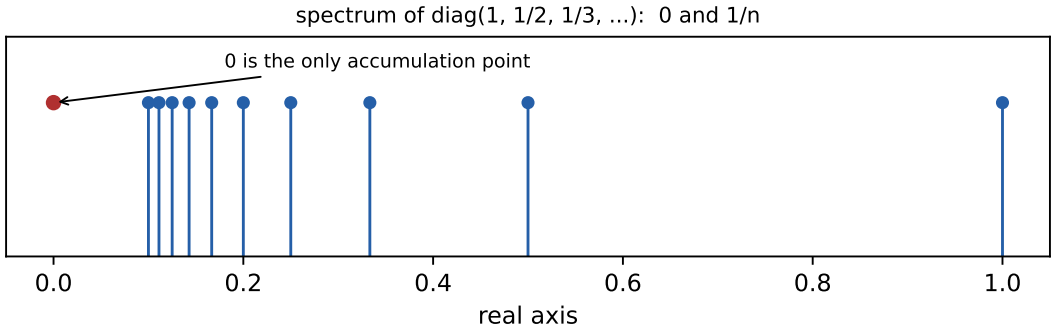
สรุป: สเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับในมิติอนันต์คือ $\{0\}$ รวมกับค่าลักษณะเฉพาะที่อาจนับได้และมีจุดสะสมเพียงศูนย์; ที่แต่ละค่าที่ไม่ใช่ศูนย์ มีการแยกส่วนมิติจำกัดที่ผิดปกติออกจากส่วนที่กลับด้านได้. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ผลมาตรฐานเกี่ยวกับสเปกตรัม

เราใช้ผลต่อไปนี้โดยไม่พิสูจน์ในบทนี้; ทุกข้อเป็นผลมาตรฐานของทฤษฎีเชิงสเปกตรัมและมีการอ้างอิงกำกับ.

- $\rho(T)$ เปิด, $R(\lambda;T)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $\|R(\lambda;T)\|^{-1} \leq \operatorname{dist}(\lambda,\sigma(T))$ (Alt 2012, ทฤษฎีบท 9.3; Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.1.3).
- $\sigma(T)$ กระชับและไม่ว่างเมื่อ $X \neq \{0\}$ และ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; รัศมีสเปกตรัม $r(T) := \sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$ สอดคล้อง $r(T) = \lim_{m\to\infty}\|T^m\|^{1/m} \leq \|T\|$ (Alt 2012, ทฤษฎีบท 9.4; Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.1.5–VI.1.6). ลิมิตมีอยู่โดยบทตั้งของเฟกูเต (Werner 2007, บทตั้ง VI.1.4).
- $\sigma(T') = \sigma(T)$; ถ้า H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตและ $T \in \mathcal{L}(H)$ แล้ว $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.1.2).
- ถ้า T ปรกติบนปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้ว $r(T) = \|T\|$ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.1.7).

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-04-24



รูปที่ 8.3: สเปกตรัมของ $D = \operatorname{diag}(1, 1/2, 1/3, \dots)$: จุด $1/k$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ และ 0 เป็นจุดสะสมเพียงจุดเดียว. ภาพนี้แสดงข้อ (b) ของทฤษฎีบท 8.2.4; 0 อยู่ในสเปกตรัมแต่ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะ.

สรุปใจความ

- เซตเรโซลเวนต์คือค่าที่ $\lambda I - T$ กลับด้านได้; สเปกตรัมคือส่วนเติมเต็ม และแบ่งเป็นสเปกตรัมจุด ต่อเนื่อง และส่วนที่เหลือ.
- ตัวดำเนินการเฟรดโฮล์มมี $\ker A$ มิติจำกัด, $\operatorname{ran} A$ ปิด และมีมิติรองจำกัด; ดัชนีคือ $\dim \ker A - \operatorname{codim} \operatorname{ran} A$.
- ทฤษฎีบทของอัลต์: ปริภูมิย่อยมิติจำกัดที่มีส่วนร่วมกับปริภูมิปิดเป็นศูนย์ มีฟังก์ชันนัลคู่และมีการฉายต่อเนื่อง; ใช้ทำให้ $X = N \oplus R$ เป็นผลบวกตรงเชิงทอพอโลยี.
- รีสซ์–ชอเดอร์: $I - T$ กับ T กระชับเป็นเฟรดโฮล์มดัชนีศูนย์ และมิติของเคอร์เนลเท่ากับมิติรองของพิสัย. *ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม*จึงบอกว่า สำหรับ $\lambda \neq 0$, $\lambda I - T$ แก้ได้ทุก y เมื่อฉีด; เมื่อไม่ฉีด เงื่อนไขคือการตั้งฉากกับเคอร์เนลของตัวผูกพัน.
- สเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับ: 0 รวมกับค่าลักษณะเฉพาะที่นับได้และมีจุดสะสมเพียง 0; แต่ละค่ามีการแยกส่วนมิติจำกัดที่ผิดปกติ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $D = \operatorname{diag}(1, 1/2, 1/3, \dots)$ บน ℓ^2. จงหาสเปกตรัม, แสดงว่า $0 \notin \sigma_p(D)$, และระบุค่าลักษณะเฉพาะ $1/2$ พร้อมเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ.

2. ให้ T เป็นตัวดำเนินการอันดับหนึ่งในกล่องลองเอง. จงคำนวณ $\|T\|$, แสดงว่า $T^2 = \frac{1}{3}T$, แก้สมการ $(I - T)x = 1$ และตรวจคำตอบ. แล้วหา a ที่ทำให้ $(I - 3T)x = 1 - at$ แก้ได้.

3. ให้ S_+ เป็นตัวเลื่อนขวาบน ℓ^2. จงหา $\ker S_+$, $\operatorname{ran} S_+$, มิติรองของพิสัย และดัชนี; แล้วแสดงว่า S_+ ไม่กระชับ.

4. ให้ $T \in K(X)$ และ $\lambda \neq 0$. จงพิสูจน์ว่า $\dim \ker(\lambda I - T) < \infty$ โดยใช้บอลหนึ่งหน่วยของเคอร์เนลและความกระชับของ T. ต้องระบุว่าทำไมบอลนั้นอยู่ใน $T(B_X)$.

5. ให้ $X = \mathbb{R}^2$ และ T มีเมทริกซ์ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ เทียบกับฐานมาตรฐาน. จงหา $\ker(I - T)$, $\operatorname{ran}(I - T)$, มิติรอง, และ

ดัชนี; แล้วอธิบายว่าเหตุใด $N(I-T)\cap R(I-T)\neq\{0\}$ จึงไม่ขัดกับทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์.

6. ให้ $T\in\mathcal{L}(X)$. จงแสดงว่า $\sigma(T)$ กระชับและ $|\lambda|\le\|T\|$ ทุก $\lambda\in\sigma(T)$. แล้วคำนวณรัศมีสเปกตรัมของ D ในข้อ 1 และของตัวดำเนินการอันดับหนึ่งในข้อ 2.

7. สำหรับตัวดำเนินการอันดับหนึ่งในข้อ 2, จงแสดงว่า $\ker(I-3T')=\operatorname{span}\{t\}$ และใช้ทางเลือกของเฟรดโฮล์มเพื่อตรวจว่า $(I-3T)x=y$ แก้ไม่ได้เมื่อ $y(t)=1$, แต่แก้ได้เมื่อ $y(t)=1-\frac{3}{2}t$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **สเปกตรัมของ D.** ถ้า $\lambda\neq0$ และ $\lambda\neq1/k$ ทุก k, ตัวผกผัน $(\lambda I-D)^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการแนวทแยงที่มีค่า $1/(\lambda-1/k)$; เพราะ $1/k\to0$, ลำดับนี้มีขอบเขตและลู่เข้า $1/\lambda$; ดังนั้น $\lambda\in\rho(D)$. ถ้า $\lambda=1/k$ แล้ว $De_k=(1/k)e_k$; เป็นค่าลักษณะเฉพาะ. ที่ $\lambda=0$, D ฉีดแต่ไม่ทั่วถึง; $0\in\sigma(D)$. แต่ $Dx=0$ บังคับ $x=0$; ดังนั้น $0\notin\sigma_p(D)$. สำหรับ $\lambda=1/2$ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะคือ e_2 เพราะ $De_2=\frac{1}{2}e_2$.

2. **อันดับหนึ่ง.** $\|T\|=\|y\|_2^2=\int_0^1y^2dy=1/3$. คำนวณ T^2 ตามในกล่องได้ $T^2=\frac{1}{3}T$. สำหรับ $(I-T)x=1$ เขียน $x=1+ct$; แล้ว $c=\int_0^1t(1+ct)dt=\frac{1}{2}+\frac{c}{3}$; ดังนั้น $c=3/4$ และ $x(t)=1+\frac{3}{4}t$. ตรวจ: $\int_0^1tx(t)dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, และ $x(t)-t\cdot\frac{3}{4}=1$. สำหรับ $(I-3T)x=y$ กับ $y=1-at$, ทางเลือกของเฟรดโฮล์มให้เงื่อนไข $\int_0^1t(1-at)dt=\frac{1}{2}-\frac{a}{3}=0$; ดังนั้น $a=3/2$. เมื่อ $a=0$, อินทิกรัลเท่ากับ $1/2\neq0$ จึงแก้ไม่ได้.

3. **ตัวเลื่อนขวา.** $S_+(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$. ถ้า $S_+x=0$ แล้ว $x_1=x_2=\cdots=0$; ดังนั้น $\ker S_+=\{0\}$. พิสัยคือ $\{y\in\ell^2:y_1=0\}$, ซึ่งปิดและมีมิติรอง 1 (ส่วนเติมเต็มคือ $\operatorname{span}\{e_1\}$). ดัชนี $=0-1=-1$. ไม่กระชับ: $S_+e_n=e_{n+1}$ และ $\|e_{n+1}-e_{m+1}\|=\sqrt{2}$ ทุก $n\neq m$; ลำดับมีขอบเขตแต่ไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.

4. **เคอร์เนลมิติจำกัด.** ให้ $x\in\ker(\lambda I-T)$ กับ $\|x\|\le1$. แล้ว $\lambda x=Tx$; ดังนั้น $x=T(x/\lambda)$ และ $\|x/\lambda\|\le1/|\lambda|$. จึง $B_{\ker(\lambda I-T)}\subset T(B_{1/|\lambda|})$, ซึ่งกระชับสัมพัทธ์. บอลหนึ่งหน่วยของเคอร์เนลจึงกระชับสัมพัทธ์; โดยบทตั้งของรีสซ์ (Werner 2007, บทตั้ง I.2.6) เคอร์เนลมีมิติจำกัด.

5. **จอร์แดนบล็อก.** ให้ $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. แล้ว $I-T=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}$ และ $(I-T)^2=0$. ดังนั้น
$$\ker(I-T)=\operatorname{span}\{(1,0)\},\qquad \operatorname{ran}(I-T)=\operatorname{span}\{(1,0)\}.$$
มิติรองของพิสัยคือ 1; ดัชนีคือ $1-1=0$. ส่วนร่วม $\ker(I-T)\cap\operatorname{ran}(I-T)=\operatorname{span}\{(1,0)\}\neq\{0\}$. นี่ไม่ได้ขัดกับทฤษฎีบทของรีสซ์–ชอเดอร์ เพราะทฤษฎีบทกล่าวเพียงมิติเคอร์เนลเท่ากับมิติรอง. แต่การพิสูจน์ของเราใช้ทฤษฎีบทของอัลต์กับการแยก $N_p\oplus R_p$ ที่ลูกโซ่หยุด; ในตัวอย่างนี้ $N_1=\operatorname{span}\{(1,0)\}$ และ $R_1=\operatorname{span}\{(1,0)\}$ มีส่วนร่วมไม่เป็นศูนย์ แต่ $N_2=\mathbb{R}^2$ และ $R_2=\{0\}$; ที่ $p=2$ (ลูกโซ่ทั้งสองหยุดที่ 2) เราได้ $N_2\cap R_2=\{0\}$ และ $N_2+R_2=X$. นี่แสดงให้เห็นว่าทำไมเราต้องรอให้ลูกโซ่หยุดก่อนใช้ทฤษฎีบทของอัลต์. (ตัวอย่างนี้อยู่บนปริภูมิมิติจำกัด ซึ่งทุกตัวดำเนินการกระชับ.)

6. **ความกระชับของสเปกตรัม.** ถ้า $\lambda_n\in\sigma(T)$ และ $\lambda_n\to\lambda$, แล้ว $\lambda I-T$ ไม่มีตัวผกผันมีขอบเขตในลิมิต; มิฉะนั้นสำหรับ n ใหญ่ $\lambda_nI-T=(\lambda_n-\lambda)I+(\lambda I-T)$ จะกลับด้านได้โดยอนุกรมนอยมันน์ (เพราะ $\|(\lambda_n-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}\|<1$), ขัดแย้ง. ดังนั้น $\sigma(T)$ ปิด; และจาก $|\lambda|\le\|T\|$ (ถ้า $|\lambda|>\|T\|$ แล้ว $\lambda I-T=\lambda(I-T/\lambda)$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-04-24

กลับด้านได้เพราะ $\|T/\lambda\| < 1$) ได้ $\sigma(T)$ มีขอบเขต; จึงกระชับ. รัศมีสเปกตรัมของ D คือ 1 (ค่าลักษณะเฉพาะ 1; และ $|1/k| \le 1$); ของตัวดำเนินการอันดับหนึ่งคือ $1/3$.

7. **เงื่อนไขการแก้.** $T' = T$ เพราะ T เป็นตัวดำเนินการปริพันธ์ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์สมมาตร $K(x,y) = xy$. ดังนั้น $\ker(I - 3T') = \ker(I - 3T) = \operatorname{span}\{t\}$. สำหรับ $y = 1$, $\int_0^1 t \cdot 1\, dt = 1/2 \neq 0$; ดังนั้น $y \notin (\ker(I - 3T'))^{\perp}$ และ $(I - 3T)x = y$ แก้ไม่ได้. สำหรับ $y = 1 - \frac{3}{2}t$, $\int_0^1 t(1 - \frac{3}{2}t)dt = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 0$; จึงแก้ได้.

ตัวเลขทุกตัวในเฉลยนี้มีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch08.py`. (ข้อ 5 เป็นตัวอย่างเชิงโครงสร้างบน $\mathbb{R}^2$; ไม่มีตัวเลขจากโค้ด.)

อ่านต่อ

§8.2 ตอบคำถามการแก้สมการ $(I - T)x = y$ อย่างสมบูรณ์: $I - T$ เป็นเฟรดโฮล์มดัชนีศูนย์ และทางเลือกของเฟรดโฮล์มบอกเงื่อนไขการแก้สมการ. คำถามต่อไปคือ: เมื่อตัวดำเนินการเป็นตัวดำเนินการปริพันธ์ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่อง เราจะ “เห็น” การสลายของมันได้อย่างไร และเหตุใดการคลายเบลอจึงต้องตัดอันดับ? §8.3 จะตอบด้วยอัตราการย่อ การแยกตามทิศทาง (SVD) และตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์; เราจะเห็นว่าการตัดทอนคือการทำให้ตัวดำเนินการกระชับกลายเป็นอันดับจำกัด และการแลกเปลี่ยนระหว่างความละเอียดกับสัญญาณรบกวนคือการแลกระหว่างเทอมหางกับเทอมที่ถูกขยาย.

8.3 ฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ ค่าเอกฐาน และการคลายเบลอ

ภาพรวมก่อนอ่าน

ใน §8.1 เราเห็นว่าตัวดำเนินการกระชับคือตัวดำเนินการที่ “ทิ้งทิศทางจำนวนมาก”. ใน §8.2 เราเห็นว่า $I - T$ ประพฤติเหมือนเมทริกซ์มิติจำกัด. แต่ยังไม่เห็นว่าทิศทางใดถูกทิ้งแรงกว่ากัน. §8.3 ให้ตัวเลขกับทิศทางเหล่านั้น: **ค่าเอกฐาน** (singular value) คืออัตราการย่อในแต่ละทิศทาง. เมื่อเรียงจากมากไปน้อย ค่าเหล่านี้จะสลายถึงศูนย์สำหรับตัวดำเนินการกระชับ.

ภาพที่ควรจำคือ: ตัวดำเนินการกระชับคือ “เลนส์” ที่ย่อบางทิศทางเกือบเป็นศูนย์. ตัวผกผันจึงต้องขยายทิศทางเหล่านั้นกลับขึ้นมาเป็นจำนวนมาก. ถ้ามีสัญญาณรบกวนเล็ก ๆ อยู่ในทิศทางที่ถูกย่อมาก การคลายเบลอจะขยายทั้งภาพและสัญญาณรบกวนพร้อมกัน. นี่คือสาเหตุที่การคลายเบลอด้วยตัวผกผันที่แน่นอนไม่เสถียร และเป็นเหตุผลที่เราต้องตัดอันดับหรือทำให้เป็นปรกติ.

8.3.1 คลาสฮิลเบิร์ต–ชมิดท์

ตัวดำเนินการกระชับทุกตัวมีค่าเอกฐานที่สลายถึงศูนย์. ชั้นที่คำนวณง่ายที่สุดคือชั้นที่ผลรวมกำลังสองของค่าเอกฐานมีจำกัด. ชั้นนี้มีความหมายตรงกับ “เคอร์เนลปริพันธ์มีพลังงานจำกัด” สำหรับตัวดำเนินการปริพันธ์ และทำให้เราวัดขนาดด้วยนอร์มที่มาจากผลรวมกำลังสองได้.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

นิยาม 8.3.1: ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์และนอร์ม

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตแยกได้เหนือ $\mathbb{K}$ และ $T \in \mathcal{L}(H)$. เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์** (Hilbert--Schmidt operator) ถ้ามีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (g_n) ของ H ซึ่ง

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^2 < \infty.$$

ในกรณีนี้ จำนวน

$$\|T\|_{\mathrm{HS}} := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^2\Big)^{1/2}$$

เรียกว่า**นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์** (Hilbert--Schmidt norm) ของ T.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

สำหรับเมทริกซ์ $A = (a_{ij})$ บนปริภูมิมิติจำกัด $\|A\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{ij} |a_{ij}|^2$ คือผลรวมกำลังสองของทุกช่อง. มันวัด “ขนาดรวม” ของการกระทำ ไม่ได้สนใจว่าทิศทางใดสำคัญที่สุด: เมทริกซ์ทแยงที่มีค่า 3 และ 2 มีนอร์มเชิงปฏิบัติการ 3 แต่นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์มากกว่า 3.

ทฤษฎีบท 8.3.1: เกณฑ์นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์และความกระชับ

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตแยกได้ และ $T \in \mathcal{L}(H)$. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(1) มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (g_n) ของ H ที่ $\sum_n \|Tg_n\|^2 < \infty$;

(2) สำหรับทุกฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (g_n) ของ H ได้ $\sum_n \|Tg_n\|^2 < \infty$.

ถ้าเงื่อนไขเหล่านี้เป็นจริง ค่าของ $\sum_n \|Tg_n\|^2$ ไม่ขึ้นกับฐาน, $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ เป็นนอร์มบนปริภูมิของตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์, $\|T\| \le \|T\|_{\mathrm{HS}}$, และ T กระชับ. ความเป็นปริภูมิเวกเตอร์และสมบัตินอร์มเป็นผลมาตรฐาน; ไม่พิสูจน์ในบทนี้ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.6.2).

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนผลรวมกำลังสองในฐานหนึ่งแล้วขยายด้วยฐานอีกฐานหนึ่ง. ทุกเทอมไม่เป็นลบ จึงใช้โทเนลลีสลับลำดับการบวกได้โดยไม่เปลี่ยนค่า; ผลรวมจึงไม่ขึ้นกับฐาน. จากนั้นประมาณ T ด้วยตัวดำเนินการอันดับจำกัดที่ได้จากการตัดผลรวมในฐานนั้น.

1. **ความเป็นอิสระจากฐาน.** เปรียบเทียบผลรวมในสองฐานที่ต่างกัน: (g_n) และ (h_k). โดยเอกลักษณ์ปาร์เซวาลและโทเนลลีสำหรับอนุกรมที่ไม่ติดลบ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Tg_n, h_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle g_n, T^*h_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T^*h_k\|^2.$$

   ทุกพจน์ไม่เป็นลบ จึงสลับลำดับการบวกได้. ดังนั้น $\sum_n \|Tg_n\|^2 = \sum_k \|T^*h_k\|^2$ สำหรับฐาน $(g_n), (h_k)$ ใดก็ได้ และค่าซ้ายมือไม่ขึ้นกับ (g_n). นี่พิสูจน์ทั้ง (1) $\Leftrightarrow$ (2) และความเป็นอิสระของนอร์ม.

2. **นอร์มเชิงปฏิบัติการถูกล้อมด้วยนอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์.** สำหรับ $x \in H$ เขียน $x = \sum_n \langle x, g_n\rangle g_n$. โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซในดัชนี n สำหรับแต่ละ k,

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Tx, g_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, g_n\rangle \langle Tg_n, g_k\rangle\Big|^2 \le \|x\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|^2.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ในอสมการสุดท้าย เราใช้ $\sum_k |\langle Tg_n, g_k\rangle|^2 = \|Tg_n\|^2$ สำหรับแต่ละ n แล้วสลับผลรวมที่ไม่เป็นลบ. ดังนั้น $\|T\|^2 \le \sum_n \|Tg_n\|^2 = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2$.

3. **ความกระชับ.** สำหรับ $N \ge 1$ ตั้ง
$$T_N x := \sum_{n=1}^{N} \langle x, g_n\rangle\, Tg_n.$$
T_N มีพิสัยย่อยอยู่ใน $\operatorname{span}\{Tg_1, \dots, Tg_N\}$; จึงมีอันดับจำกัดและกระชับ. จากข้อ 2 ใช้กับ $T - T_N$,
$$\|T - T_N\| \le \|T - T_N\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_{n>N} \|Tg_n\|^2\Big)^{1/2} \longrightarrow 0.$$
เพราะ $K(H)$ เป็นปริภูมิย่อยปิดของ $\mathcal{L}(H)$ (จาก §8.1), ลิมิต T ของลำดับตัวดำเนินการกระชับ T_N จึงกระชับ.

สรุป: นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์คือผลรวมกำลังสองของการกระทำบนฐานเชิงตั้งฉากปรกติ; มันไม่ขึ้นกับฐาน, ควบคุมนอร์มเชิงปฏิบัติการ, และบังคับให้ตัวดำเนินการกระชับ. □

ทฤษฎีบท 8.3.2: ตัวดำเนินการปริพันธ์ที่มีเคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องบนโดเมนมีขอบเขตเป็นฮิลเบิร์ต–ชมิดท์

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่มีขอบเขต และ K ต่อเนื่องบน $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$. นิยาม
$$(Tf)(x) := \int_{\Omega} K(x,y) f(y)\, dy \qquad (f \in L^2(\Omega)).$$
แล้ว T เป็นตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์บน $L^2(\Omega)$,
$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x,y)|^2\, dy\, dx < \infty,$$
และโดยเฉพาะ T กระชับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับแต่ละ x ฟังก์ชัน $y \mapsto K(x,y)$ เป็นสมาชิกของ $L^2(\Omega)$. เขียนมันในฐานเชิงตั้งฉากปรกติแล้วใช้เอกลักษณ์ปาร์เซวาล; จากนั้นอินทิเกรตใน x. การประมาณด้วยตัวดำเนินการอันดับจำกัดจะให้ความกระชับในขั้นถัดไป.

1. **ความมีขอบเขต.** เพราะ $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ กระชับและ K ต่อเนื่อง, $M := \sup |K| < \infty$. โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซ,
$$|(Tf)(x)| \le M \sqrt{|\Omega|}\, \|f\|_2.$$
อินทิเกรตอสมการนี้ใน x ได้ $\|Tf\|_2 \le M|\Omega|\|f\|_2$; ดังนั้น T เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต. ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับเกือบทุก x ฟังก์ชัน $K_x(y) := K(x,y)$ อยู่ใน $L^2(\Omega)$ และ $(Tf)(x) = \langle f, \overline{K_x}\rangle$.

2. **สูตรของนอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์.** เราจะคำนวณผลรวมโดยใช้ฐาน (g_n) ของ $L^2(\Omega)$. สำหรับเกือบทุก x เอกลักษณ์ปาร์เซวาลให้
$$\|K_x\|_2^2 = \|\overline{K_x}\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \overline{K_x}, g_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Tg_n)(x)|^2.$$
เราใช้ $\|K_x\|_2 = \|\overline{K_x}\|_2$; และ $\langle \overline{K_x}, g_n\rangle = \overline{(Tg_n)(x)}$ ตามนิยามของ T. อินทิเกรตทั้งสองข้างบน Ω และใช้โทเนลลี (ทุกพจน์ไม่ติดลบ):
$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x,y)|^2\, dy\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |(Tg_n)(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tg_n\|_2^2.$$
ด้านซ้ายมีจำกัดเพราะ K ต่อเนื่องบนเซตกระชับ. ดังนั้น T เป็นฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ และได้สูตรนอร์ม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

3. **ความกระชับ.** ตั้ง $T_N f := \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle T g_n$. แต่ละ T_N มีอันดับจำกัด. จากสูตรในข้อ 2,

$$\|T - T_N\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{n>N} \|T g_n\|_2^2 \longrightarrow 0.$$

โดยทฤษฎีบท 8.3.1, $\|T - T_N\| \le \|T - T_N\|_{\mathrm{HS}} \to 0$. เมื่อ T_N เป็นอันดับจำกัดและ $T_N \to T$ ในนอร์ม, T จึงอยู่ใน $K(L^2(\Omega))$.

สรุป: เคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องบนโดเมนมีขอบเขตมีพลังงานกำลังสองจำกัด; ตัวดำเนินการที่ได้จึงเป็นฮิลเบิร์ต–ชมิดท์และกระชับ. □

ข้อควรระวัง: โดเมนต้องมีขอบเขตและเคอร์เนลปริพันธ์ต้องมีพลังงานจำกัด

ข้อสรุป “กระชับ” ไม่ได้มาจากความต่อเนื่องของ K เพียงอย่างเดียว. ต้องมีโดเมนที่มีขอบเขตเพื่อให้ $\int_\Omega \int_\Omega |K|^2 < \infty$ หรือมีสมมติฐานที่บังคับเงื่อนไขนี้. บน $\mathbb{R}^n$ ทั้งหมด **เคอร์เนลสังวัตนาการ**อาจไม่เป็นฟังก์ชันกำลังสอง และตัวดำเนินการที่ได้อาจไม่กระชับ. เราจะเห็นตัวอย่างชัดเจนใน §8.3.4.

8.3.2 ค่าเอกฐานและการแยกค่าเอกฐาน

ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ทุกตัวกระชับ. สำหรับตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิฮิลเบิร์ต เราเลือกฐานทางเข้าและฐานทางออกให้เหลือเพียงการย่อตามแกน; อัตราการย่อคือค่าเอกฐาน. เครื่องมือคือทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัว.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ผลที่ใช้อ้าง

บททฤษฎีเชิงสเปกตรัมพิสูจน์ว่าถ้า A กระชับและผูกพันในตัวบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H แล้วมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ H ที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ; ค่าที่ไม่ใช่ศูนย์เป็นจำนวนจริง แต่ละค่ามีภาวะรากซ้ำจำกัด และสะสมได้เพียง 0. ไม่พิสูจน์ในบทนี้ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.3.2); ที่นี่ใช้เฉพาะกรณี $A = T^*T$ ซึ่งเป็นบวกและกระชับ.

ทฤษฎีบท 8.3.3: การแยกค่าเอกฐานของตัวดำเนินการกระชับ

ให้ H_1, H_2 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $T \in K(H_1, H_2)$. แล้วมีดัชนี J ซึ่งเป็นเซตจำกัดหรือ $\mathbb{N}$, ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ $\{e_k : k \in J\}$ ใน H_1, ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ $\{f_k : k \in J\}$ ใน H_2, และจำนวนบวก s_k ที่เรียงจากมากไปน้อย (ถ้า $J = \mathbb{N}$, $s_k \to 0$), ซึ่ง

$$T x = \sum_{k \in J} s_k \langle x, e_k \rangle f_k \qquad (x \in H_1).$$

ถ้า J ว่าง ผลรวมเป็นศูนย์และ $T = 0$. จำนวน s_k^2 คือค่าลักษณะเฉพาะบวกของ T^*T ที่นับตามภาวะรากซ้ำ, และ s_k เรียกว่า**ค่าเอกฐาน** ของ T. ถ้า T มีอันดับจำกัด J เป็นเซตจำกัด.

พิสูจน์. **แนวคิด.** T^*T เป็นตัวดำเนินการกระชับ บวก และผูกพันในตัว. ทฤษฎีบทสเปกตรัมให้ระบบเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเชิงตั้งฉากสำหรับค่าลักษณะเฉพาะบวก; ส่วนตั้งฉากที่เหลือคือ $\ker T$. จากนั้นนิยามเวกเตอร์ทางออกด้วย $f_k = T e_k / s_k$.

1. **T^*T มีสมบัติที่ต้องการ.** เพราะ T กระชับและ T^* มีขอบเขต, T^*T กระชับ. สำหรับ $x, y \in H_1$,

$$\langle T^*T x, y \rangle = \langle T x, T y \rangle = \langle x, T^*T y \rangle,$$

ดังนั้น T^*T ผูกพันในตัว. และ $\langle T^*T x, x \rangle = \|T x\|^2 \ge 0$; จึงเป็นตัวดำเนินการบวก.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2. **เลือกเวกเตอร์ทางเข้าและนิยามค่าเอกฐาน.** โดยทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัว, ค่าลักษณะเฉพาะบวกของ T^*T มีจำนวนไม่เกินนับได้และแต่ละค่ามีภาวะรากซ้ำจำกัด. เลือกระบบเชิงตั้งฉากปรกติ $\{e_k : k \in J\}$ ของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับค่าเหล่านี้, เรียง $\lambda_k > 0$ จากมากไปน้อย, และตั้ง $s_k := \sqrt{\lambda_k}$. ส่วนตั้งฉากของปิดช่วงเชิงเส้นที่แผ่โดย e_k คือ $\ker(T^*T) = \ker T$.

3. **นิยามเวกเตอร์ทางออก.** สำหรับ $k \in J$ ตั้ง
$$f_k := \frac{Te_k}{s_k}.$$

4. **เวกเตอร์ขาออกตั้งฉากกันและมีนอร์มหนึ่ง.** ถ้า $s_j, s_k > 0$ แล้ว
$$\langle f_j, f_k \rangle = \frac{\langle Te_j, Te_k \rangle}{s_j s_k} = \frac{\langle T^*Te_j, e_k \rangle}{s_j s_k} = \frac{\lambda_j \langle e_j, e_k \rangle}{s_j s_k} = \delta_{jk}.$$
ดังนั้นเวกเตอร์ f_k ที่ไม่เป็นศูนย์เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ.

5. **การกระจายของ T.** ให้ $x \in H_1$. เขียน $x = \sum_{k \in J} \langle x, e_k \rangle e_k + z$ โดย $z \in \ker T$; ผลรวมลู่เข้าในนอร์ม. ใช้ความต่อเนื่องของ T และนิยามของ f_k,
$$Tx = \sum_{k \in J} s_k \langle x, e_k \rangle f_k.$$
เพราะ f_k ตั้งฉากกัน, กำลังสองของนอร์มส่วนหางไม่เกิน $s_1^2 \sum_{k>N} |\langle x, e_k \rangle|^2 \to 0$; ผลรวมจึงลู่เข้าในนอร์ม.

6. **ภาวะรากซ้ำ.** ค่า λ_k ถูกนับตามจำนวนครั้งที่ปรากฏในระบบเชิงตั้งฉากปรกติ; จำนวนครั้งนี้คือภาวะรากซ้ำของค่าลักษณะเฉพาะของ T^*T. การเรียง s_k จากมากไปน้อยจึงเป็นการนับค่าเอกฐานตามภาวะรากซ้ำ. มีจำนวน $s_k > 0$ จำกัดก็ต่อเมื่อ T มีอันดับจำกัด.

สรุป: ตัวดำเนินการกระชับทุกตัวเขียนเป็นการย่อตามแกนด้วยค่าเอกฐาน s_k บนระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (e_k) และ (f_k); ค่า s_k^2 คือค่าลักษณะเฉพาะบวกของ T^*T. □

บทแทรก 8.3.4: ค่าเอกฐาน นอร์ม และอันดับ

ให้ $T \in K(H_1, H_2)$ และให้ $s_1 \geq s_2 \geq \cdots$ เป็นค่าเอกฐานบวกตามทฤษฎีบท 8.3.3, เติมศูนย์ท้ายลำดับเมื่อมีจำนวนจำกัด (ถ้า $T = 0$ ให้ $s_1 = 0$). แล้ว

(a) $\|T\| = s_1$;

(b) T มีอันดับจำกัด ก็ต่อเมื่อมีเพียงจำนวนจำกัดของ k ซึ่ง $s_k > 0$;

(c) ถ้า H_1 แยกได้และ T เป็นฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ แล้ว $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2$.

พิสูจน์. 1. **(a).** จากสูตรการกระจาย, $\|Tx\|^2 = \sum_k s_k^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq s_1^2 \|x\|^2$. ดังนั้น $\|T\| \leq s_1$. ถ้า $s_1 > 0$ แล้ว $x = e_1$ ให้ $\|Te_1\| = s_1$; ถ้า $s_1 = 0$ แล้ว $T = 0$ และความเท่ากันยังจริง.

2. **(b).** ถ้า T มีอันดับจำกัด พิสัยเป็นปริภูมิย่อยที่สร้างโดยจำนวนจำกัดของ f_k ที่มี $s_k > 0$; จึงมี $s_k > 0$ จำกัด. กลับกัน ถ้ามี $s_k > 0$ จำกัด สูตรการกระจายมีพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์จำกัด; พิสัยจึงมีมิติจำกัด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. **(c).** เลือกฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (g_j) ของ H_1. จากสูตรการแยก, $\|Tg_j\|^2 = \sum_{k\in J} s_k^2 |\langle g_j, e_k\rangle|^2$. ใช้โทเนลลีสลับผลรวมที่ไม่เป็นลบและพาร์เซวาลกับแต่ละ e_k,

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_j \|Tg_j\|^2 = \sum_{k\in J} s_k^2 \sum_j |\langle g_j, e_k\rangle|^2 = \sum_{k\in J} s_k^2.$$

สรุป: ค่าเอกฐานให้ทั้งนอร์มเชิงปฏิบัติการ อันดับ และนอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์; ทั้งสามอ่านได้จากลำดับ s_k เดียวกัน. □

ข้อควรระวัง: ค่าเอกฐานไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะ

ค่าเอกฐานเป็นรากที่สองของค่าลักษณะเฉพาะของ T^*T ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะของ T เอง. สำหรับตัวดำเนินการปรกติ (รวมถึงตัวดำเนินการผูกพันในตัว) ค่าเหล่านี้ตรงกันในค่าสัมบูรณ์ แต่สำหรับตัวดำเนินการทั่วไปไม่ตรง. ตัวอย่างมิติจำกัด: เมทริกซ์

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

มีค่าลักษณะเฉพาะ $0, 0$ แต่มีค่าเอกฐาน $1, 0$.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): อสมการของไวล์

ให้ T เป็นตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อน. ให้ $\lambda_n(T)$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่นับตามภาวะรากซ้ำเชิงพีชคณิต และ $s_n(T)$ เป็นค่าเอกฐาน. สำหรับ $1 \le p < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^p \le \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p.$$

ผลนี้เรียกว่าอสมการของไวล์; ไม่พิสูจน์ในบทนี้ (Werner 2007, ทฤษฎีบท VI.6.7). ในแบบจำลองของเรา T เป็นตัวดำเนินการปรกติ ค่าเอกฐานจึงเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของค่าลักษณะเฉพาะ.

8.3.3 แบบจำลองการคลายเบลอ

สถานการณ์สมมติ: การคลายเบลอที่ทำให้สัญญาณรบกวนชัดขึ้น

สมมติว่าเราถ่ายภาพป้ายไฟตอนกลางคืนด้วยมือที่สั่นเล็กน้อย. ภาพที่ได้ไม่คมเพราะกล้องผสมแสงจากจุดข้างเคียงเข้าด้วยกัน; เราเรียกการผสมนี้ว่าการเบลอ. แล้วเราใช้แอป “คลายเบลอ” ที่รู้รูปแบบการสั่นโดยประมาณเพื่อย้อนการผสมนั้น. ภาพที่ได้กลับมามีขอบคมขึ้นจริงในบางจุด แต่มีลายเส้นละเอียด ๆ เพิ่มขึ้นทั่วภาพ.
นี่คือสถานการณ์สมมติ: เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าแอปหรือกล้องรุ่นใดทำงานเช่นนี้; ตัวเลขทั้งหมดมาจากแบบจำลองที่เรากำหนดเอง. คำถามคือ: ทำไมการย้อนการเบลอจึงขยายความผิดพลาดเล็ก ๆ ให้กลายเป็นลายที่มองเห็นได้? คำตอบที่แท้จริงไม่ใช่ “แอปทำงานผิด” แต่คือ: ตัวดำเนินการเบลอเป็นตัวดำเนินการกระชับที่มีค่าเอกฐานสลายลงอย่างรวดเร็ว; ตัวผกผันจึงต้องหารด้วยค่าเล็ก ๆ และขยายทั้งภาพต้นฉบับและสัญญาณรบกวน.

เพื่อให้คำนวณได้ทั้งหมด เราใช้แบบจำลองหนึ่งมิติบนวงกลมที่มีคาบ 1 แทนภาพหนึ่งแถว. ให้ $0 < w < 1/2$ และนิยามเคอร์เนลสังวัตนาการสามเหลี่ยม

$$\kappa_w(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{w}\left(1 - \dfrac{|t|}{w}\right), & |t| \le w, \\ 0, & w < |t| \le \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \kappa_w(t+1) = \kappa_w(t).$$

ร่างปรับปรุง · Preprint · 2026-10-24

ตัวดำเนินการเบลอคือ

$$(Tf)(x) := \int_0^1 \kappa_w(x-y) f(y)\, dy.$$

ในบทนี้ใช้ $w = 0.08$. ฟังก์ชัน $e_k(x) := e^{2\pi i k x}$ เป็นฐานเชิงตั้งฉากปรกติของ $L^2(0,1)$ และ

$$Te_k = \widehat{\kappa_w}(k) e_k, \qquad \widehat{\kappa_w}(k) = \left(\frac{\sin(\pi k w)}{\pi k w}\right)^2 \quad (k \neq 0), \qquad \widehat{\kappa_w}(0) = 1.$$

โดยเฉพาะ $\widehat{\kappa_w}(0) = 1$ และ $\widehat{\kappa_w}(k) \to 0$ เมื่อ $|k| \to \infty$. ตัวดำเนินการ T จึงเป็นตัวดำเนินการปรกติกระชับ และค่าเอกฐานคือ $s_k = |\widehat{\kappa_w}(k)|$.

ลองเอง: พลังงานและค่าเอกฐานของเคอร์เนลสังวัตนาการสามเหลี่ยม

พื้นที่ใต้กราฟของ κ_w^2 คำนวณได้โดยตรง:

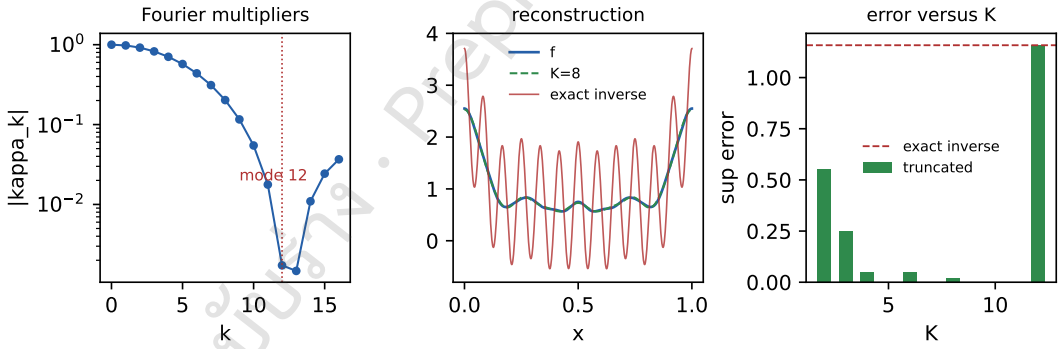
$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \int_0^1 \kappa_w(t)^2\, dt = \frac{2}{3w}.$$

ที่ $w = 0.08$ ได้ $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = 8.3333$ และ $\|T\|_{\mathrm{HS}} \approx 2.88675$. ตารางต่อไปนี้ให้ค่าเอกฐานที่ใช้ในแบบจำลอง:

k	0	1	2	3	4	6	8	10	12
s_k	1.00000	0.97912	0.91857	0.82430	0.70538	0.43803	0.20252	0.05470	0.0017270

ตัวเลขทุกตัวในตารางคำนวณจากสูตรข้างต้นและมีแบบทดสอบยืนยัน. เพราะ s_{12} เล็กกว่า s_1 มาก โหมดที่ 12 จึงมีน้ำหนักน้อยมากในภาพที่เบลอ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 8.4: แบบจำลองการเบลอแบบคาบ 1: (ซ้าย) ค่าเอกฐานลดลงตาม k; (กลาง) ภาพต้นฉบับ, การสร้างคืนด้วยการตัดทอน $K = 8$, และตัวผกผันที่แน่นอน; (ขวา) ความคลาดเคลื่อนสูงสุดเทียบกับ K. ตัวผกผันที่แน่นอนขยายสัญญาณรบกวนที่โหมด 12 จนเห็นเป็นลายชัดเจน (สร้างจาก `code/funkana/ch08.py`).

ตัวดำเนินการ T ไม่ได้ผกผันได้บน $L^2(0,1)$ ทั้งหมด เพราะมี k ซึ่ง kw เป็นจำนวนเต็มบวก (เช่น $k = 25$ เพราะ $25w = 2$); ที่ความถี่นั้น $s_k = 0$ และข้อมูลในโหมดนั้นหายอย่างถาวร. แต่บนปริภูมิย่อยที่พาหะความถี่ $|k| \le 12$ ซึ่ง $s_k > 0$ ตัวดำเนินการกลับด้านได้. ให้สัญญาณต้นฉบับ

$$f(x) = 1 + 0.6\cos(2\pi x) + 0.4\cos(4\pi x) + 0.3\cos(6\pi x) \\ + 0.2\cos(8\pi x) + 0.03\cos(16\pi x) + 0.02\cos(20\pi x).$$

ที่ $x = 0$ ค่าของ f คือ 2.55. ให้สัญญาณรบกวนอยู่ในโหมดความถี่สูง

$$\eta(x) = 0.002\cos(24\pi x).$$

ภาพที่วัดได้คือ $g = Tf + \eta$. ถ้าเรารู้ T อย่างแม่นยำและใช้ตัวผกผันบนปริภูมิย่อยนี้,

$$T^{-1}g = f + \frac{\eta}{s_{12}}.$$

เพราะ $s_{12} = 0.0017269918$, ตัวประกอบการขยายคือ $1/s_{12} = 579.0415422$. ความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากการคลายเบลอจึงเป็น

$$\frac{0.002}{s_{12}} = 1.1580830845.$$

ตัวเลขนี้คิดเป็นเกือบครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด 2.55 ของสัญญาณต้นฉบับ; สัญญาณรบกวนที่เดิมเล็กมากจึงกลายเป็นลายที่มองเห็นได้.

วิธีที่ใช้ได้จริงคือการตัดทอน: เก็บเฉพาะโหมด $|k| \le K$ แล้วนิยาม

$$T_K^{-1}g := \sum_{|k|\le K} \frac{\langle g, e_k\rangle}{s_k} e_k.$$

ตารางต่อไปนี้ให้ความคลาดเคลื่อนสูงสุดของ $T_K^{-1}(Tf+\eta)$ เทียบกับ f:

K	2	4	6	8	10	12
ความคลาดเคลื่อนสูงสุด	0.55	0.05	0.05	0.02	0.00	1.15808

ที่ $K = 2$ เราทิ้งข้อมูลจริงมากเกินไป; ที่ $K = 4, 6, 8$ ยังเหลือความคลาดเคลื่อน $0.05, 0.05, 0.02$ จากโหมดที่ตัด. ที่ $K = 10$ เราเก็บข้อมูลจริงครบและไม่เก็บสัญญาณรบกวนในโหมด 12; ความคลาดเคลื่อนจึงเป็นศูนย์. แต่ที่ $K = 12$ เราเริ่มหารด้วย s_{12} สัญญาณรบกวนจึงกลับมาทั้งก้อนและความคลาดเคลื่อนกระโดดเป็น 1.15808. ตัวเลขทั้งหมดมีแบบทดสอบยืนยัน.

ข้อควรระวัง: “ตัดอันดับ” ไม่ได้ทำให้ข้อมูลที่หายไปกลับมา

การตัดทอนเลือกสมดุลระหว่างการทิ้งข้อมูลจริงกับการขยายสัญญาณรบกวน. ในแบบจำลองนี้ $K = 10$ เก็บโหมดจริงครบและไม่รวมโหมดสัญญาณรบกวนที่ 12, จึงให้ความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์. ในภาพจริงเราไม่รู้ f ล่วงหน้าและสัญญาณรบกวนกระจายหลายโหมด; การเลือก K จึงต้องอาศัยระดับสัญญาณรบกวนหรือการทำให้เป็นปรกติ และไม่มีการรับประกันว่าจะเก็บรายละเอียดทั้งหมดโดยไม่ขยายสัญญาณรบกวน.

8.3.4 ทำไมโดเมนมีขอบเขตจึงสำคัญ

ข้อสรุปใน §8.3.1 ใช้โดเมนมีขอบเขตเพื่อให้เคอร์เนลปริพันธ์มีพลังงานกำลังสองจำกัด. บนเส้นตรงทั้งหมด ภาพอาจดู “เหมือนเดิมทุกจุด” แต่ตัวดำเนินการไม่กระชับ; ความต่อเนื่องและความมีขอบเขตจึงไม่พอ.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): สังวัตนาการบนเส้นตรงทั้งหมดไม่กระชับ

ให้ $\kappa \in L^1(\mathbb{R})$ และ $\kappa \neq 0$ และนิยาม $Tf := \kappa * f$ บน $L^2(\mathbb{R})$. แล้ว T มีขอบเขต แต่ไม่กระชับ. พิสูจน์โดยใช้การแปลงฟูเรียร์: เพราะ $\widehat{\kappa}$ ต่อเนื่องและไม่เป็นศูนย์ทั้งฟังก์ชัน, มีช่วงเปิด J และค่าคงตัว $c > 0$ ซึ่ง $|\widehat{\kappa}(\xi)| \ge c$ ทุก $\xi \in J$. เลือกช่วงเปิด $I_1, I_2, \ldots$ ที่ไม่ทับกันและอยู่ใน J, แล้วเลือก $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ ที่ $\|f_n\|_2 = 1$ และ $\widehat{f_n}$ มีตัวรองรับใน I_n. โดยเอกลักษณ์ปาร์เซวาล (f_n) เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ และ $\widehat{Tf_n} = \widehat{\kappa}\,\widehat{f_n}$ มีตัวรองรับใน I_n. ดังนั้น (Tf_n) เป็นระบบเชิงตั้งฉากและ

$$\|Tf_n\|_2 \ge c\|f_n\|_2 = c.$$

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

สำหรับ $n \neq m$,

$$\|Tf_n - Tf_m\|_2^2 = \|Tf_n\|_2^2 + \|Tf_m\|_2^2 \geq 2c^2.$$

ลำดับ (Tf_n) จึงมีขอบเขตแต่ไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า; T ไม่กระชับ.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): เอกฐานที่แรงขึ้น

ความต่อเนื่องไม่ใช่เงื่อนไขเดียวที่ให้ความกระชับ. Alt 2012, ทฤษฎีบท 8.16: เคอร์เนลเอกฐานอย่างอ่อน $|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-\alpha}$ $(\alpha < n)$ บนโดเมนมีขอบเขตให้ตัวดำเนินการปริพันธ์แบบชูร์ $L^p(\Omega) \to C^0(\overline{\Omega})$ กระชับเมื่อ $\alpha p' < n$. เมื่อ $\alpha = n$, ทฤษฎีบทคัลเดรอน–ซิกมุนด์ (Alt 2012, ทฤษฎีบท 8.20) กล่าวว่าเคอร์เนลเอกพันธุ์ดีกรีศูนย์ที่มีค่าเฉลี่ยศูนย์บนทรงกลมให้ตัวดำเนินการมีขอบเขตบน $L^p(\mathbb{R}^n)$ เมื่อ $1 < p < \infty$; ผลนี้เป็นความมีขอบเขต ไม่ใช่ความกระชับ. ตัวอย่างหนึ่งมิติคือการแปลงฮิลเบิร์ต ซึ่งมีขอบเขตแต่ไม่กระชับ. ไม่พิสูจน์ในบทนี้.

8.3.5 กลับไปที่คำถามเปิดบท

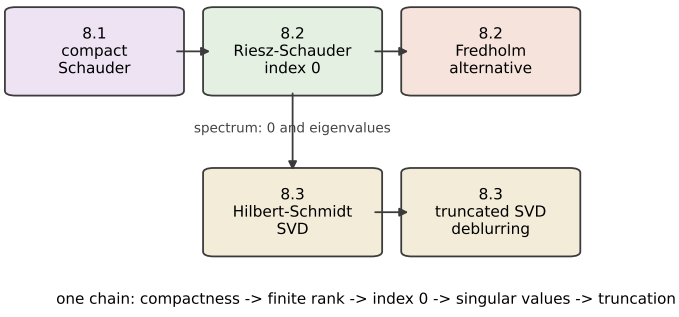
ตัวดำเนินการลดความละเอียดเป็นตัวดำเนินการอันดับจำกัด: มันเก็บบางทิศทางและส่งที่เหลือไปเป็นศูนย์. การขยายภาพกลับจึงทำได้เพียงเดาค่า เพราะข้อมูลที่หายไปไม่มีเหลือแล้ว.

ในการคลายเบลอ ตัวดำเนินการไม่ได้ทิ้งทุกทิศทาง แต่ย่อบางทิศทางจนเล็กมาก. ตัวผกผันจึงหารด้วยจำนวนเล็ก ๆ และขยายสัญญาณรบกวน; การตัดทอนเลือกไม่หารด้วยค่าเอกฐานที่เล็กกว่าความไม่แน่นอนของข้อมูล.

สรุปใจความ

- ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์คือตัวดำเนินการที่มี $\sum_n \|Tg_n\|^2 < \infty$ สำหรับฐานเชิงตั้งฉากปรกติ; นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ควบคุมนอร์มเชิงปฏิบัติการและบังคับความกระชับ.
- เคอร์เนลปริพันธ์ต่อเนื่องบนโดเมนมีขอบเขตให้ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ และ $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \int\int |K|^2$.
- การแยกค่าเอกฐานเขียน $Tx = \sum_k s_k \langle x, e_k \rangle f_k$; ค่า s_k^2 คือค่าลักษณะเฉพาะของ T^*T และ $s_k \to 0$.
- ตัวผกผันของตัวดำเนินการที่มีค่าเอกฐานเล็ก ๆ ขยายความผิดพลาด; เช่น $s_{12} = 0.0017269918$ ทำให้สัญญาณรบกวน 0.002 กลายเป็น 1.15808. สังวัตนาการบนเส้นตรงทั้งหมดไม่กระชับ: โดเมนมีขอบเขตและเคอร์เนลปริพันธ์พลังงานจำกัดเป็นสมมติฐานที่ขาดไม่ได้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 8.5: เส้นทางของบท: ความกระชับ → อันดับจำกัด → รีสซ์–ชอเดอร์ → ค่าเอกฐาน → การตัดทอน.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $D = \operatorname{diag}(1, 1/2, 1/3, \dots)$ บน ℓ^2. จงคำนวณ $\|D\|_{\mathrm{HS}}$ และตรวจว่าตัวดำเนินการนี้กระชับ.
2. ให้ $A = \operatorname{diag}(3, 2)$ บน $\mathbb{R}^2$. จงหาค่าเอกฐาน ระบบเวกเตอร์ทางเข้าและทางออก และเขียนการแยกค่าเอกฐาน.
3. ให้ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. จงหาค่าเอกฐานและค่าลักษณะเฉพาะของ J แล้วอธิบายว่าทำไมค่าเหล่านี้จึงไม่จำเป็นต้องเท่ากัน.
4. ให้ $K(x, y) = xy$ บน $[0, 1]^2$ และ $(Tf)(x) = \int_0^1 xy\, f(y)\, dy$. จงคำนวณ $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2$ และ $\|T\|$.
5. ใช้ตารางใน §8.3.3. จงอธิบายว่าทำไมความคลาดเคลื่อนที่ $K = 4$ และ $K = 6$ เท่ากัน, ทำไมที่ $K = 10$ จึงเป็นศูนย์, และทำไมที่ $K = 12$ จึงกระโดดขึ้น.
6. ให้ $\kappa \in L^1(\mathbb{R})$ ไม่เป็นศูนย์. จงพิสูจน์ว่าตัวดำเนินการสังวัตนาการ $Tf = \kappa * f$ บน $L^2(\mathbb{R})$ ไม่กระชับ โดยสร้างลำดับที่มีขอบเขตแต่ไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า.
7. จงหาว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ และให้ตัวอย่างค้าน: “ถ้า T กระชับและหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว T^{-1} มีขอบเขต.”

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์.** ใช้ฐานมาตรฐาน (e_k):
$$\|D\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \|D\|_{\mathrm{HS}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \approx 1.28255.$$
เพราะผลรวมกำลังสองมีจำกัด D เป็นฮิลเบิร์ต–ชมิดท์; โดยทฤษฎีบท 8.3.1 D กระชับ. ตัวเลข 1.28255 มีแบบทดสอบยืนยัน.

2. **การแยกค่าเอกฐาน.** เมทริกซ์ทแยง A มีค่าเอกฐาน $s_1 = 3$ และ $s_2 = 2$. เลือก $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ และ $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2$. แล้ว
$$Ax = 3\langle x, e_1\rangle e_1 + 2\langle x, e_2\rangle e_2.$$
นี่คือการแยกค่าเอกฐาน; ค่า 3 และ 2 มีแบบทดสอบยืนยัน.

3. **ค่าเอกฐานกับค่าลักษณะเฉพาะ.** คำนวณ
$$J^*J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
ค่าลักษณะเฉพาะของ J^*J คือ $0, 1$; ดังนั้นค่าเอกฐานคือ $0, 1$. แต่ J ยกกำลังสองแล้วได้ศูนย์: $J^2 = 0$ และค่าลักษณะเฉพาะของ J คือ 0 ทั้งสองค่า. การแยกค่าเอกฐานคือ $Jx = \langle x, e_2\rangle e_1$ โดย $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$. ค่า 1 และ 0 มีแบบทดสอบยืนยัน.

4. **เคอร์เนลปริพันธ์ xy.** คำนวณโดยตรง
$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2\, dy\, dx = \left(\int_0^1 x^2 dx\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$
พิสัยคือ $\operatorname{span}\{x\}$ และ $Tf = x\int_0^1 yf(y)dy$. ดังนั้น $\|T\| = \|x\|_2^2 = 1/3$. ตัวเลข $1/9$ และ $1/3$ มีแบบทดสอบยืนยัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

5. **การเลือกอันดับ.** ที่ $K=4$ และ $K=6$ เก็บครบทุกโหมดของ f ที่ไม่เกิน K (โหมด $5,6,7$ ของ f เป็นศูนย์) แต่ยังทิ้งโหมด 8 และ 10 (แอมพลิจูด 0.03 และ 0.02) รวมเป็น 0.05 ทั้งสองกรณี. ที่ $K=10$ เราเก็บโหมดจริงครบทุกโหมดและไม่เก็บโหมด 12 ที่เป็นสัญญาณรบกวน; ความคลาดเคลื่อนจึงเป็นศูนย์. ที่ $K=12$ เราเก็บโหมด 12 ด้วยและหารสัญญาณรบกวนด้วย $s_{12}=0.0017269918$; ความคลาดเคลื่อนจึงกลายเป็น $0.002/s_{12}=1.15808$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

6. **สังวัตนาการบนเส้นตรง.** เลือกช่วง J และ $c>0$ ซึ่ง $|\widehat{\kappa}|\ge c$ บน J, แล้วเลือกช่วง $I_n\subset J$ ที่ไม่ทับกันและ f_n ที่มี $\widehat{f_n}$ รองรับใน I_n กับ $\|f_n\|_2=1$. ทั้ง (f_n) และ (Tf_n) เป็นระบบเชิงตั้งฉาก โดย $\|Tf_n\|_2\ge c$; สำหรับ $n\neq m$, $\|Tf_n-Tf_m\|_2^2\ge 2c^2$ จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า. นี่ใช้ทั้งลำดับ ไม่ใช่เวกเตอร์เดียว: ความกระชับเป็นสมบัติของทั้งเซต.

7. **ข้อความเท็จ.** ให้ $D=\operatorname{diag}(1,1/2,1/3,\dots)$ บน ℓ^2; D กระชับและหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ $D^{-1}e_N=Ne_N$ จึง
$$\frac{\|D^{-1}e_N\|}{\|e_N\|}=N\longrightarrow\infty,$$
ตัวผกผันจึงไม่มีขอบเขต; ดังนั้นไม่มีค่าคงตัว $c>0$ ที่ $\|Dx\|\ge c\|x\|$ ทุก $x\in\ell^2$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ทฤษฎีต่อไปนี้ต้องใช้. ทั่วไปกว่านั้น ถ้า $\|Tx\|\ge c\|x\|$ สำหรับบาง $c>0$ พิสัยของ T ปิด (เพราะ (x_n) โคชีเมื่อ Tx_n ลู่เข้า) และ T^{-1} บนพิสัยมีขอบเขต. สำหรับตัวดำเนินการกระชับบนปริภูมิอนันต์มิติ เงื่อนไขนี้เป็นไปไม่ได้: $I=T^{-1}T$ จะเป็นการประกอบของตัวดำเนินการกระชับกับตัวดำเนินการมีขอบเขต จึงกระชับ ซึ่งขัดกับมิติอนันต์.

สูตรสรุป

- ความกระชับ: $\overline{T(B_X)}$ กระชับ; ในฮิลเบิร์ต เท่ากับลิมิตของอันดับจำกัด. ชอเดอร์: T กระชับ $\Leftrightarrow T'$ กระชับ; ภาพของลำดับอ่อนลู่เข้าในนอร์ม.
- รีสซ์–ชอเดอร์: $I-T$ เฟรดโฮล์มดัชนีศูนย์; $\dim\ker(I-T)=\operatorname{codim}\operatorname{ran}(I-T)$. ทางเลือกของเฟรดโฮล์ม: $(I-T)x=y$ แก้ได้ $\Leftrightarrow y\perp\ker(I-T')$.
- สเปกตรัมของ T กระชับ: $\{0\}$ รวมกับค่าลักษณะเฉพาะที่สะสมที่ 0.
- ฮิลเบิร์ต–ชมิดท์: $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2=\sum_k s_k^2=\iint|K|^2$; การคลายเบลอขยายสัญญาณรบกวนตาม $1/s_k$.

อ่านต่อ

บทนี้เริ่มจากภาพความละเอียดต่ำที่ขยายกลับไม่คม และจบด้วยข้อสรุปว่าค่าเอกฐานบอกว่าข้อมูลถูกบีบมากแค่ไหนในแต่ละทิศทาง. ความกระชับทำให้เหลือทิศทางน้อยลง; $I-T$ ประพฤติเหมือนเมทริกซ์มิติจำกัด; ค่าเอกฐานอธิบายการขยายสัญญาณรบกวน. บททฤษฎีเชิงสเปกตรัมถามว่าจะสร้างโหมดและสเปกตรัมได้อย่างไรเมื่อตัวดำเนินการไม่กระชับแต่ยังผูกพันในตัว.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 9

ทฤษฎีเชิงสเปกตรัม: โหมดสั่นสะเทือนและลาปลาซบนกราฟ

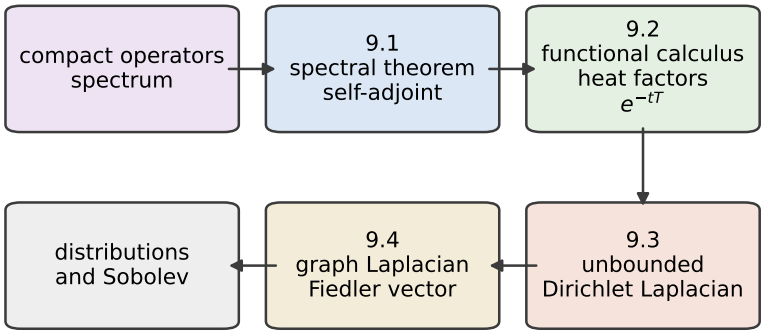
สถานการณ์สมมติ: เสียงกีตาร์ที่แอปแยกเป็นแท่งความถี่

สมมติว่าเราเปิดแอปฝึกกีตาร์บนโทรศัพท์ แล้วดีดสายโลหะเส้นหนึ่งโดยไม่กดนิ้วที่เฟรต. แอปไม่เพียงบอกว่าเสียงสูงหรือต่ำ แต่ยังวาดสเปกตรัมเป็นแท่ง ๆ ที่ความถี่ต่างกัน. แท่งแรกอยู่ราว 101.8 เฮิรตซ์ และแท่งถัดไปอยู่ราว 203.5, 305.3, 407.0 เฮิรตซ์. ตัวเลขในบทนี้มาจากแบบจำลองสายในอุดมคติของเรา ไม่ใช่การวัดจากโทรศัพท์หรือกีตาร์จริง. เมื่อเราดีดแรงขึ้น แท่งทั้งหมดสว่างขึ้นพร้อมกัน; เมื่อเราเปลี่ยนความยาวสายหรือความตึง แท่งทั้งหมดเลื่อนไปพร้อมกันแต่ยังห่างกันเป็นจำนวนเท่าเดิม. แอปจึงดูเหมือน “รู้” ว่าโหมดใดควรมี และควรอยู่ตรงไหน.

สถานการณ์ที่สองเป็นแอปจัดระเบียบภาพ. สมมติว่าเราเลือกรูปถ่ายท้องฟ้าที่มีเมฆสีน้ำเงินกับพระอาทิตย์สีส้ม. แอปต้องการแบ่งภาพออกเป็นสองกลุ่มเพื่อปรับสีแยกกัน. มันเชื่อมพิกเซลที่สีใกล้กันด้วยเส้นที่มีน้ำหนักมาก และเชื่อมพิกเซลต่างสีด้วยเส้นที่มีน้ำหนักน้อย. แล้วมันให้ตัวเลขหนึ่งตัวกับทุกพิกเซล: พิกเซลในกลุ่มหนึ่งได้ค่าเดียวกัน ๆ และอีกกลุ่มได้ค่าตรงข้าม. เมื่อตัดที่ศูนย์ ภาพก็แยกเป็นสองส่วนพอดี. แอปไม่ได้เดาสี; มันอ่านทิศทางที่ทำให้การเชื่อมข้ามกลุ่มมีค่าต่ำที่สุด.

ทั้งสองสถานการณ์เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้อ้างว่าแอปใดในตลาดทำงานอย่างนี้จริง. คำถามแรกคือ: ทำไมสายที่มีจุดต่อเนื่องกันจึงมีโหมดเป็นจำนวนนับได้ และทำไมความถี่ของโหมดเหล่านั้นจึงเรียงเป็นจำนวนเท่า ๆ ของความถี่มูลฐาน? คำถามที่สองคือ: ทำไมเวกเตอร์หนึ่งตัวจากกราฟจึงบอกได้ว่าพิกเซลใดอยู่กลุ่มเดียวกัน? คำตอบแรกจะมาจาก**ทฤษฎีบทสเปกตรัม** (spectral theorem) สำหรับตัวดำเนินการกระชับที่ผูกพันในตัว และจาก**แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน** (functional calculus) ซึ่งบอกวิธีใส่ฟังก์ชันลงในตัวดำเนินการ. คำตอบที่สองจะมาจากทฤษฎีบทเดียวกันในมิติจำกัดแล้วใช้กับ**ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ** (graph Laplacian). เราจะแยกให้ชัดว่าส่วนใดพิสูจน์เต็ม และส่วนใดเป็นทฤษฎีบทสำหรับตัวดำเนินการไม่มีขอบเขตที่เราอ้างโดยไม่พิสูจน์ในบทนี้.

ร่างไม่ทำ · preprint · 2025-10-24



finite modes -> continuous functions of T -> unbounded form -> graph modes

รูปที่ 9.1: แผนผังการพึ่งพาของบท: ความกระชับและสเปกตรัมจากบทตัวดำเนินการกระชับป้อนเข้าสู่ทฤษฎีบทสเปกตรัม; แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันสร้างฟังก์ชันของตัวดำเนินการ; โดเมนและตัวผกผันกระชับนำไปสู่ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล; กรณีมิติจำกัดของกราฟและโหมดของสายตามมาในหัวข้อสุดท้าย.

ภาพรวมบท

ในบทตัวดำเนินการกระชับ เราเห็นแล้วว่าสเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับประกอบด้วยศูนย์กับค่าลักษณะเฉพาะที่สะสมที่ศูนย์. แต่เรายังไม่ได้ตอบคำถามที่สำคัญกว่า: ถ้าเรารู้ค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดแล้ว เราจะสร้างตัวดำเนินการกลับคืนได้หรือไม่? คำตอบคือได้ เมื่อตัวดำเนินการผูกพันในตัว: มันแยกเป็นผลรวมของ “การฉาย” ลงบนทิศทางลักษณะเฉพาะ แต่ละทิศทางมีอัตราขยายเป็นค่าลักษณะเฉพาะของมัน. นี่คือรูปเชิงเส้นตรงของความจริงที่ว่าเมทริกซ์สมมาตรจริงสามารถทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ด้วยฐานเชิงตั้งฉาก.

บทนี้มีสี่ก้าว. ก้าวแรกพิสูจน์ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับที่ผูกพันในตัวหรือปรกติ. ก้าวที่สองสร้างแคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน: เมื่อมี f ต่อเนื่องบนสเปกตรัม เราสร้าง $f(T)$ ได้ และ $f(T)$ ทำงานกับแต่ละโหมดอย่างแยกจากกัน. ก้าวที่สามออกจากโลกที่มีขอบเขต: ตัวดำเนินการลาปลาซไม่ต่อเนื่องบน L^2 ทั้งปริภูมิ แต่ถ้าเลือกโดเมนให้ถูก มันเป็นตัวดำเนินการปิดและผูกพันในตัว. ก้าวสุดท้ายใช้ทฤษฎีบทมิติจำกัดกับกราฟ และเชื่อมโหมดของลาปลาซกับโหมดสั่นของสาย.

ตัวเลขทุกตัวในบทนี้คำนวณใน `code/funkana/ch09.py` และถูกยืนยันใน `code/tests/test_ch09.py`. เมื่อข้อความกล่าวถึงค่าตัวเลขของสายหรือกราฟ หมายถึงแบบจำลองที่กำหนดไว้ในบทนี้เท่านั้น.

9.1 ทฤษฎีบทหลักของตัวดำเนินการกระชับที่ผูกพันในตัวและสเปกตรัม

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกถึงเครื่องผสมเสียงที่แยกแต่ละความถี่ออกเป็นช่องของตัวเอง. ถ้าเครื่องทำงานสมบูรณ์ เสียงที่เข้าช่องหนึ่งจะไม่รั่วไปรบกวนช่องอื่น และแต่ละช่องมีปุ่มขยายเสียงของตัวเอง. ตัวดำเนินการผูกพันในตัวก็มีภาพคล้ายกัน: เราหาทิศตั้งฉากที่แยกการกระทำของมันได้ครบ แล้วอ่านการกระทำนั้นเป็นการคูณแต่ละทิศด้วยจำนวนหนึ่ง. ในมิติอนันต์ ภาพนี้ใช้ได้กับตัวดำเนินการกระชับที่ผูกพันในตัว ซึ่งเป็นกรณีที่บทนี้พิสูจน์เต็ม.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ตลอดบทนี้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงซ้อน และ $\mathcal{K}(H)$ คือเซตของตัวดำเนินการกระชับบน H. เราใช้ $\sigma(T)$ สำหรับ**สเปกตรัม** (spectrum), $\sigma_p(T)$ สำหรับ**สเปกตรัมจุด** (point spectrum) และ T^* สำหรับ**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) ของ T ตามที่นิยามไว้ในบทตัวดำเนินการและฟังก์ชันนัลและบทตัวดำเนินการกระชับ. คำว่า “ค่าลักษณะเฉพาะ” และ “เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ” ใช้ในความหมายเดิมจากบทตัวดำเนินการกระชับ.

นิยาม 9.1.1: ตัวดำเนินการปรกติ

ให้ $T \in \mathcal{L}(H)$. เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการปรกติ** (normal operator) เมื่อ

$$T^*T = TT^*.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“ปรกติ” ในที่นี้ไม่ได้หมายถึง “ธรรมดา” หรือ “ไม่แปลก” แต่หมายถึงการที่ T และ T^* สลับที่กันได้. ตัวดำเนินการผูกพันในตัวทุกตัวเป็นตัวดำเนินการปรกติ เพราะ $T^* = T$ ทำให้ทั้งสองข้างเป็น T^2. ตัวดำเนินการหมุนระนาบก็เป็นตัวดำเนินการปรกติ แต่ไม่ผูกพันในตัว: มันหมุนทิศโดยไม่ยืดหรือหด และตัวผกผันคือการหมุนกลับ. ตัวอย่างที่ไม่ปรกติคือการส่ง $(x, y) \mapsto (x + y, 0)$ ซึ่งยืดทิศหนึ่งแต่บีบอีกทิศหนึ่งโดยไม่สมดุล.

บทตั้ง 9.1.1: นอร์มและเคอร์เนลของตัวดำเนินการปรกติ

ให้ $T \in \mathcal{L}(H)$ เป็นตัวดำเนินการปรกติ. แล้ว

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \text{สำหรับทุก } x \in H,$$

และสำหรับทุก $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda} I - T^*).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนผลต่างของกำลังสองของนอร์มเป็นรูปกำลังสองของ $T^*T - TT^*$; เมื่อตัวดำเนินการนี้เป็นศูนย์ ความเท่ากันของเคอร์เนลตามมาจากการแทน $\lambda I - T$ ซึ่งยังปรกติ.

1. **ความเท่ากันของนอร์ม.** สำหรับ $x \in H$,

$$\|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle - \langle TT^*x, x\rangle = \langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle.$$

ถ้า T ปรกติ เทอมขวาเป็นศูนย์ทุก x จึงได้ $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

กลับกัน สมมติ $\|Tx\| = \|T^*x\|$ ทุก x. แล้ว $\langle (T^*T - TT^*)x, x\rangle = 0$ ทุก x. ตัวดำเนินการ $S := T^*T - TT^*$ ผูกพันในตัว จึงใช้เอกลักษณ์โพลาไรเซชันกับ S ได้:

$$\langle Sx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle S(x + i^k y), x + i^k y\rangle = 0$$

สำหรับทุก x, y. เพราะฉะนั้น $S = 0$ นั่นคือ $T^*T = TT^*$.

2. **เคอร์เนล.** ให้ $\lambda \in \mathbb{C}$. ตัวดำเนินการ $\lambda I - T$ ยังปรกติ เพราะ

$$(\lambda I - T)^*(\lambda I - T) = (\lambda I - T)(\lambda I - T)^*.$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ใช้ข้อแรกกับ $\lambda I - T$:

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|(\lambda I - T)^* x\|.$$

เพราะ $(\lambda I - T)^* = \bar{\lambda} I - T^*$, ทางซ้ายเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ $x \in \ker(\lambda I - T)$; ทางขวาเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ $x \in \ker(\bar{\lambda} I - T^*)$. ดังนั้น

$$\ker(\lambda I - T) = \ker(\bar{\lambda} I - T^*).$$

สรุป: ความปรกติทำให้ T และ T^* มีขนาดการกระทำเท่ากันทุกเวกเตอร์ และมีเคอร์เนลของ $\lambda I - T$ กับ $\lambda I - T^*$ ตรงกัน. □

ขั้นต่อไปคือหัวใจของบท. เราจะพิสูจน์ว่าตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ. การพิสูจน์ใช้การหาค่าสูงสุดของรูปกำลังสองบนบอลหนึ่งหน่วย. ก่อนอื่นเตือนความจำหนึ่งสมบัติของตัวดำเนินการผูกพันในตัว.

บทตั้ง 9.1.2: นอร์มของตัวดำเนินการผูกพันในตัวคือซูพรีมัมของรูปกำลังสอง

ให้ $A \in \mathcal{L}(H)$ ผูกพันในตัว. แล้ว

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

ถ้า A เป็นบวก คือ $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ทุก x, แล้ว

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ขอบเขตบนมาจากอสมการโคชี–ชวาร์ซ; ขอบเขตล่างได้จากการเลือก y ตาม Ax และใช้เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน.

1. ให้ $m := \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$. อสมการโคชี–ชวาร์ซให้ $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|$ เมื่อ $\|x\| = 1$; ดังนั้น $m \leq \|A\|$.

2. เราจะแสดง $\|A\| \leq m$. สำหรับ $x, y \in H$ ที่ $\|x\| = \|y\| = 1$, คำนวณ

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle.$$

แต่ละเทอมทางซ้ายมีค่าสัมบูรณ์ไม่เกิน $m\|x \pm y\|^2$. ดังนั้น

$$4|\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle| \leq m(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2m(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4m.$$

ถ้า $Ax \neq 0$ เลือก $y = Ax/\|Ax\|$; แล้ว $\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle = \|Ax\|$. จึงได้ $\|Ax\| \leq m$ สำหรับทุก x ที่ $\|x\| = 1$, นั่นคือ $\|A\| \leq m$.

3. เมื่อ A เป็นบวก $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ทุก x; ค่าสัมบูรณ์ในซูพรีมัมจึงไม่เปลี่ยนค่า. สมการที่สองตามมา.

สรุป: นอร์มของตัวดำเนินการผูกพันในตัวถูกวัดได้จากค่าสูงสุดของรูปกำลังสองบนบอลหนึ่งหน่วย. □

นิยาม 9.1.2: ตัวดำเนินการเป็นบวก

ให้ $A \in \mathcal{L}(H)$ ผูกพันในตัว. เราจะเรียก A ว่า**ตัวดำเนินการเป็นบวก** (positive operator) เมื่อรูปกำลังสองของมันไม่เป็นลบทุกเวกเตอร์ กล่าวคือ

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \qquad \text{สำหรับทุก } x \in H.$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 9.1.3: ตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

ให้ $A \in \mathcal{K}(H)$ ผูกพันในตัวและเป็นบวก. แล้วมีระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (e_n) ที่อาจมีจำนวนจำกัดหรือนับได้ และมีจำนวนจริง $\mu_n \geq 0$ ซึ่ง $\mu_n \to 0$ ถ้าลำดับไม่สิ้นสุด, โดยที่

$$Ae_n = \mu_n e_n, \qquad Ax = \sum_n \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad (x \in H).$$

ถ้า $\mu_n > 0$ ทุกตัวในลำดับที่ไม่สิ้นสุด ค่าลักษณะเฉพาะบวกแต่ละค่ามีปริภูมิลักษณะเฉพาะที่มีมิติจำกัด.

พิสูจน์. **แนวคิด.** หาค่าสูงสุดของรูปกำลังสองบนบอลหนึ่งหน่วย; ณ จุดสูงสุด อนุพันธ์ตามทุกทิศทางเป็นศูนย์ จึงได้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ. แล้วแยกส่วนที่ตั้งฉากออกและทำซ้ำ. ความกระชับบังคับให้ค่าลักษณะเฉพาะต้องลงถึงศูนย์.

1. **ขั้นแรก: มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวหนึ่ง.** ถ้า $A = 0$ ข้อความจริงโดยไม่มี $\mu_n > 0$. สมมติ $A \neq 0$. ให้

$$M := \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle.$$

เพราะ A เป็นบวกและผูกพันในตัว บทตั้งก่อนหน้านี้ให้ $M = \|A\| > 0$. เลือกลำดับ (x_n) ในบอลหนึ่งหน่วยซึ่ง $\langle Ax_n, x_n\rangle \to M$. เพราะ H สะท้อนกลับ (บทการลู่เข้าแบบอ่อนและค่าต่ำสุด) บอลหนึ่งหน่วยจึงอ่อนกระชับ; หลังเลือกลำดับย่อยได้ $x_n \rightharpoonup x$. ความกระชับของ A ให้ $Ax_n \to Ax$ ในนอร์ม. ดังนั้น

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \to \langle Ax, x\rangle = M.$$

โดยเฉพาะ $x \neq 0$ และ $\langle Ax, x\rangle = M$; ลิมิตอ่อนของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมี $\|x\| \leq 1$. เพราะ $x/\|x\|$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย นิยามของ M ให้

$$\frac{M}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \left\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leq M,$$

จึงได้ $\|x\| \geq 1$; ประกอบกับ $\|x\| \leq 1$ ได้ $\|x\| = 1$.

2. **ขั้นที่สอง: หาความชันของ q ที่ศูนย์.** สำหรับ $y \in H$ และ $t \in \mathbb{R}$ เล็ก ๆ นิยาม

$$q(t) := \frac{\langle A(x + ty), x + ty\rangle}{\|x + ty\|^2}.$$

เพราะ x ให้ค่าสูงสุดและ $\|x\| = 1$, ฟังก์ชัน q มีค่าสูงสุดที่ $t = 0$. อนุพันธ์ที่ $t = 0$ เป็นศูนย์:

$$0 = q'(0) = 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, y\rangle - 2M\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

แทน y ด้วย iy เพื่อตัดส่วนจินตภาพ; ได้

$$\langle Ax - Mx, y\rangle = 0 \quad \text{ทุก } y \in H.$$

ดังนั้น $Ax = Mx$. ตั้งชื่อจุดสูงสุดนี้ว่า e_1 และให้ $\mu_1 := M$; สมการที่เพิ่งได้คือ $Ae_1 = \mu_1 e_1$ โดย $\mu_1 > 0$.

3. **ขั้นที่สาม: ทำซ้ำบนส่วนตั้งฉากของเวกเตอร์ที่เลือกแล้ว.** หลังเลือก $e_1, \ldots, e_n$, ให้

$$H_n := \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}^{\perp}, \qquad A_n := A|_{H_n}.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

เพราะ A ผูกพันในตัวและ $Ae_j = \mu_j e_j$, ปริภูมิ H_n ไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ A: ถ้า $z \perp e_j$ แล้ว

$$\langle Az, e_j\rangle = \langle z, Ae_j\rangle = \mu_j\langle z, e_j\rangle = 0.$$

ดังนั้น A_n ยังกระชับ ผูกพันในตัว และเป็นบวก. ถ้า $A_n \neq 0$, ใช้ขั้นแรกและขั้นที่สองกับ A_n ได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $e_{n+1} \in H_n$ และ

$$A_n e_{n+1} = \mu_{n+1} e_{n+1}, \qquad \mu_{n+1} = \|A_n\| = \sup_{\substack{z\in H_n\\ \|z\|=1}} \langle Az, z\rangle > 0.$$

เพราะ $H_n \subset H_{n-1}$, ค่าที่เลือกได้ไม่เพิ่ม. ทำซ้ำตราบใดที่ $A_n \neq 0$; ถ้าหยุด แปลว่า A เป็นศูนย์บนส่วนตั้งฉากที่เหลือ. การเลือกซ้ำนี้เก็บเวกเตอร์ทุกทิศของค่าลักษณะเฉพาะที่ซ้ำ โดยไม่ตัดปริภูมิลักษณะเฉพาะทั้งปริภูมิหลังเลือกเพียงเวกเตอร์เดียว.

4. **ขั้นที่สี่: ค่าลักษณะเฉพาะลงถึงศูนย์.** ถ้ากระบวนการไม่หยุด จะได้ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (e_n) และ $\mu_n \downarrow \mu \geq 0$. เพราะ (e_n) มีขอบเขตและ $e_n \rightharpoonup 0$ (อสมการเบสเซล), ความกระชับของ A ให้ $Ae_n \to 0$ ในนอร์ม. แต่ $\|Ae_n\| = \mu_n$; ดังนั้น $\mu = 0$. โดยเฉพาะ $\mu_n \to 0$.

5. **ขั้นที่ห้า: ได้ผลรวมทั้งหมด.** ให้ P_N เป็นการฉายเชิงตั้งฉากลงบน $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$. สำหรับ $x \in H$ เขียน $x = P_N x + r_N$ กับ $r_N \perp e_1, \dots, e_N$. เมื่อกระบวนการไม่หยุด, $r_N \in H_N$ และการเลือกแบบเกรดีให้ $\|A|_{H_N}\| = \mu_{N+1}$; บทตั้งนอร์มของตัวดำเนินการผูกพันในตัวที่พิสูจน์ไว้แล้วจึงให้

$$\left\| Ax - \sum_{n=1}^{N} \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n \right\| = \|Ar_N\| \leq \mu_{N+1}\|r_N\| \leq \mu_{N+1}\|x\| \longrightarrow 0.$$

ถ้ากระบวนการหยุดที่ดัชนี N, แล้ว $A|_{H_N} = 0$ และส่วนเหลือเป็นศูนย์ตั้งแต่แรก. ดังนั้น $Ax = \sum_n \mu_n\langle x, e_n\rangle e_n$. ถ้า $\mu_n = \mu > 0$ บนเซตย่อยอนันต์ จะมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $u_1, u_2, \dots$ ที่ตั้งฉากกันในปริภูมิลักษณะเฉพาะเดียวกัน. แล้ว $Au_j = \mu u_j$, และสำหรับ $j \neq k$

$$\|Au_j - Au_k\|^2 = \mu^2\|u_j - u_k\|^2 = 2\mu^2.$$

ภาพ (Au_j) จึงไม่มีลำดับย่อยลู่เข้า ขัดกับความกระชับของ A. เมื่อ $\mu > 0$ จึงไม่มีทางมีทิศตั้งฉากกันได้ไม่จำกัดใน E_μ; มิติของ E_μ ต้องเป็นจำนวนจำกัด.

สรุป: การหาค่าสูงสุดให้เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวแรก; การแยกส่วนตั้งฉากให้ตัวถัดไป; ความกระชับบังคับให้เหลือเพียงศูนย์ในลิมิต. □

ทฤษฎีบท 9.1.4: ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับปรกติ

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ เป็นตัวดำเนินการปรกติที่ไม่เป็นศูนย์. แล้วมีระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (e_k) ที่อาจมีจำนวนจำกัดหรือนับได้ และมีลำดับ (λ_k) ของจำนวนเชิงซ้อนไม่เป็นศูนย์ ซึ่ง $\lambda_k \to 0$ ถ้าลำดับไม่สิ้นสุด, โดยที่

$$Te_k = \lambda_k e_k, \qquad Tx = \sum_k \lambda_k\langle x, e_k\rangle e_k \quad (x \in H),$$

$$H = \ker T \oplus_2 \overline{\operatorname{span}}\{e_k : k\}, \qquad \sigma(T)\setminus\{0\} = \{\lambda_k : k\}.$$

ยิ่งไปกว่านั้น $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ $A = T^*T$ ซึ่งเป็นตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวก. บนปริภูมิลักษณะเฉพาะของ A ตัวดำเนินการ T เป็นตัวคูณด้วยจำนวนที่มีขนาดคงตัว; ในมิติจำกัดมันจึงเป็นยูนิแทรีและมีฐานลักษณะเฉพาะ. เคอร์เนลของ A คือเคอร์เนลของ T.

1. **สร้าง $A = T^*T$.** เพราะ T กระชับและ T^* มีขอบเขต, $A = T^*T$ กระชับ; A ผูกพันในตัวและเป็นบวก เพราะ
$$\langle Ax, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$
ใช้ทฤษฎีบทก่อนหน้ากับ A: มีระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (f_n) และ $\mu_n \geq 0$ ซึ่ง
$$Af_n = \mu_n f_n, \qquad Ax = \sum_n \mu_n \langle x, f_n\rangle f_n.$$

2. **เคอร์เนล.** ถ้า $Tx = 0$ แล้ว $Ax = T^*Tx = 0$. กลับกัน ถ้า $Ax = 0$ แล้ว
$$0 = \langle Ax, x\rangle = \|Tx\|^2,$$
ดังนั้น $Tx = 0$. จึงได้ $\ker A = \ker T$.

3. **แยกส่วนที่มี $\mu_n > 0$.** ให้ $E_n := \ker(A - \mu_n I)$ สำหรับ $\mu_n > 0$. เพราะ T ปรกติ,
$$TA = T\,T^*T = T^*T\,T = AT.$$
ดังนั้น $T(E_n) \subset E_n$. บน E_n เรามี $T^*T = \mu_n I$. ให้ $S := \mu_n^{-1/2} T|_{E_n}$. แล้ว
$$\langle Sx, Sy\rangle = \mu_n^{-1}\langle T^*Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle$$
สำหรับ $x, y \in E_n$. ดังนั้น S เป็นการส่งสมมิติ (isometry) บนปริภูมิมิติจำกัด. ในมิติจำกัด การส่งสมมิติเป็นตัวดำเนินการยูนิแทรี และมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ; เขียนฐานนี้เป็น $(e_{n,j})_j$ กับ $Se_{n,j} = \nu_{n,j} e_{n,j}$, $|\nu_{n,j}| = 1$. แล้ว
$$Te_{n,j} = \sqrt{\mu_n}\,\nu_{n,j} e_{n,j}.$$
ค่า $\lambda_{n,j} := \sqrt{\mu_n}\nu_{n,j} \neq 0$ คือค่าลักษณะเฉพาะของ T.

4. **ผลรวมและสเปกตรัม.** นำฐานย่อยของแต่ละ E_n มารวมกับฐานใด ๆ ของ $\ker T$. การแยก $H = \ker A \oplus_2 \bigoplus_n E_n$ บอกว่าระบบที่ได้ตั้งฉากปรกติและครบทั้งปริภูมิ. บน $\ker T$ ตัว T เป็นศูนย์; บน E_n การกระทำคือผลรวมตามสูตรข้างต้น. เพราะ T กระชับและ $e_{n,j} \rightharpoonup 0$, $\|Te_{n,j}\| = |\lambda_{n,j}| \to 0$. จากบทตัวดำเนินการกระชับ สเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับคือ $\{0\}$ รวมกับค่าลักษณะเฉพาะ; จึงได้ $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_k\}$. สุดท้าย
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_k |\lambda_k|,$$
เพราะการกระทำแยกตามฐานและ $\|Tx\|^2 = \sum_k |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k\rangle|^2$.

สรุป: ตัวดำเนินการกระชับปรกติถูกแยกเป็นผลรวมของทิศลักษณะเฉพาะที่มีน้ำหนัก λ_k; เคอร์เนลเป็นส่วนที่น้ำหนักศูนย์. □

บทแทรก 9.1.5: รูปการฉายของการแยกสเปกตรัม

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ผูกพันในตัว. ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์และแตกต่างกัน และให้ P_k เป็นการ

สงวนลิขสิทธิ์ · Preprint · 2026-10-24

ฉายเชิงตั้งฉากลงบนปริภูมิลักษณะเฉพาะ E_{λ_k}. แล้ว

$$T = \sum_k \lambda_k P_k,$$

โดยอนุกรมลู่เข้าในนอร์มตัวดำเนินการ, และ $P_0 := I - \sum_k P_k$ เป็นการฉายลงบน $\ker T$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** รวมเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่มีค่าเดียวกันในทฤษฎีบทก่อน; ผลรวมของการฉายคือการฉายลงบนผลบวกเชิงตั้งฉาก.

1. ทฤษฎีบทสเปกตรัมให้ฐานลักษณะเฉพาะ (e_j) กับค่า λ_j. สำหรับค่า λ ที่แตกต่างกัน ปริภูมิลักษณะเฉพาะตั้งฉากกันเพราะถ้า $Tx = \lambda x$ และ $Ty = \mu y$ กับ $\lambda \neq \mu$ แล้ว

   $$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

   ดังนั้น $\langle x, y\rangle = 0$ เมื่อ $\lambda \neq \mu$.

2. ให้ E_{λ_k} มีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $(e_{k,j})_j$. การฉาย P_k คือ $\sum_j \langle \cdot, e_{k,j}\rangle e_{k,j}$. ผลรวม $\sum_k \lambda_k P_k$ บนเวกเตอร์ฐานแต่ละตัวให้ค่าเดียวกันกับ T. เพราะส่วนที่เหลือมีนอร์มไม่เกินค่าลักษณะเฉพาะที่เหลือซึ่งลงถึงศูนย์ อนุกรมลู่ในนอร์มตัวดำเนินการ.

3. ส่วนที่เหลือ $I - \sum_k P_k$ ฉายลงบนส่วนตั้งฉากของผลบวกทั้งหมด ซึ่งคือ $\ker T$ ตามทฤษฎีบท. นี่คือ P_0.

สรุป: การแยกสเปกตรัมคือการเขียน T เป็นผลรวมถ่วงน้ำหนักของการฉายตั้งฉากลงบนปริภูมิลักษณะเฉพาะ. □

บทแทรก 9.1.6: ช่วงของค่าลักษณะเฉพาะของตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัว

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ผูกพันในตัวและ $T \neq 0$. แล้วค่าลักษณะเฉพาะทุกตัวเป็นจำนวนจริงและอยู่ในช่วง $[-\|T\|, \|T\|]$. ยิ่งไปกว่านั้น อย่างน้อยหนึ่งใน $\|T\|$ หรือ $-\|T\|$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้การแยกสเปกตรัมและสูตร $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$. ลำดับที่ลู่ศูนย์และมีค่าไม่เป็นศูนย์ต้องบรรลุค่าสูงสุดของขนาด.

1. ค่าลักษณะเฉพาะของ T เป็นจริงเพราะ T ผูกพันในตัว. สูตร $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$ ให้ $|\lambda_k| \leq \|T\|$ ทุก k, จึงได้ $\lambda_k \in [-\|T\|, \|T\|]$.

2. ให้ $M := \|T\| > 0$. ถ้าลำดับค่าลักษณะเฉพาะมีจำกัด ให้ S เป็นเซตของทุกดัชนี; ถ้าไม่จำกัด ให้

   $$S := \{k : |\lambda_k| \geq M/2\}.$$

   เพราะ $\sup_k |\lambda_k| = M$, เซต S ไม่ว่าง; เพราะ $|\lambda_k| \to 0$, เซต S มีจำนวนจำกัด. ให้ $k_0 \in S$ เป็นดัชนีที่ $|\lambda_{k_0}| = \max_{k \in S} |\lambda_k|$. เราจะแสดงว่า $|\lambda_{k_0}| = M$. ถ้าไม่, สำหรับ $k \in S$ ได้ $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k_0}| < M$, และสำหรับ $k \notin S$ ได้ $|\lambda_k| < M/2 \leq |\lambda_{k_0}|$. ดังนั้น $\sup_k |\lambda_k| \leq |\lambda_{k_0}| < M$, ขัดแย้ง. จึงได้ $\lambda_{k_0} = \pm M$.

สรุป: สเปกตรัมของตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัวเป็นจำนวนจริงในช่วงปิด $[-\|T\|, \|T\|]$ และค่าที่มีขนาดใหญ่สุดเป็นค่าลักษณะเฉพาะ. □

ฉบับร่าง Preprint, 2026-10-24

ตัวอย่าง: ลาปลาซผกผันของช่วงหนึ่งหน่วย

บน $H = L^2(0,1)$ ให้

$$(Tf)(x) := \int_0^1 \min(x,y)\big(1-\max(x,y)\big) f(y)\,dy.$$

ตัวดำเนินการ T กระชับและผูกพันในตัว เพราะเคอร์เนล $\min(x,y)(1-\max(x,y))$ ต่อเนื่องและสมมาตรบนโดเมนมีขอบเขต. ฟังก์ชัน

$$e_n(x) := \sqrt{2}\,\sin(n\pi x), \qquad n = 1,2,\dots$$

เป็นระบบเชิงตั้งฉากปรกติ และ

$$Te_n = \frac{1}{n^2\pi^2} e_n.$$

ดังนั้น $\|T\| = 1/\pi^2 \approx 0.10132118$ และค่าเฉพาะสองค่าแรกคือ 0.10132118 กับ 0.02533030. ตัวเลขเหล่านี้มาจากแบบจำลองและมีแบบทดสอบยืนยัน. ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าตัวดำเนินการที่มี “โหมด” ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวดำเนินการบนลำดับ; มันอาจเป็นตัวผกผันของตัวดำเนินการอนุพันธ์ ซึ่งไม่ต่อเนื่องบน L^2 ทั้งปริภูมิ.

สรุปใจความ

- ตัวดำเนินการปรกติคือตัวที่สลับที่กับตัวผูกพัน; นอร์มของ Tx และ T^*x เท่ากันทุก x.
- ตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และค่าลักษณะเฉพาะบวกมีปริภูมิลักษณะเฉพาะที่มีมิติจำกัด.
- ตัวดำเนินการกระชับปรกติแยกเป็น $T = \sum_k \lambda_k \langle \cdot, e_k\rangle e_k$; สเปกตรัมที่ไม่ใช่ศูนย์คือเซตของ λ_k.
- รูปการฉายเขียน $T = \sum_k \lambda_k P_k$; ผลรวมของการฉายลงบนปริภูมิลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกันรวมกับ P_0 ได้เอกลักษณ์.
- ตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัวมีค่าลักษณะเฉพาะจริงในช่วง $[-\|T\|, \|T\|]$; ค่าที่มีขนาดใหญ่สุดเป็นค่าลักษณะเฉพาะ.

อ่านต่อ

ตอนนี้เรารู้ว่าโหมดและค่าลักษณะเฉพาะสร้างตัวดำเนินการกลับคืนได้. คำถามต่อไปคือ: ถ้าเราอยากสร้าง $\sqrt{T}$, e^{-tT} หรือตัวประมาณที่ “ปิดโหมดเล็ก” เราจะทำกับตัวดำเนินการทั้งตัวได้หรือไม่? บทถัดไปจะสร้างแคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน ซึ่งให้กฎที่ทำกับแต่ละโหมดพร้อมกัน และอธิบายว่าทำไมแอปเพลงจึงสามารถทำนายการลดลงของฮาร์มอนิกแต่ละตัวได้.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. จงแสดงว่า A ผูกพันในตัวและปรกติ, หาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะหนึ่งหน่วย, และเขียน A ในรูปการฉายสเปกตรัม.

2. ให้ $D = \operatorname{diag}(1, 1/2, 1/4, 0, 0, \dots)$ บน ℓ^2. จงหาสเปกตรัม ค่าลักษณะเฉพาะ และ $\|D\|$. ตัวดำเนินการนี้เป็นตัวดำเนินการอันดับจำกัดหรือไม่?

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. ให้ T เป็นตัวดำเนินการในตัวอย่างลาปลาซผกผัน. จงตรวจว่า $e_2(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi x)$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะและหาค่าเฉพาะของมัน. แล้วอธิบายว่าทำไม $\|T\| = 1/\pi^2$ โดยไม่ต้องคำนวณผลรวมอนันต์.

4. ให้ P เป็นการฉายเชิงตั้งฉากอันดับหนึ่งบนทิศ u ที่ $\|u\| = 1$ และให้ $T = -\frac{1}{2}P$. จงหาสเปกตรัมและนอร์มของ T. ค่าลักษณะเฉพาะที่ติดลบขัดกับสมการ $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$ หรือไม่?

5. ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ปรกติและ $T \neq 0$. จงพิสูจน์ว่ามีค่าลักษณะเฉพาะ λ ซึ่ง $|\lambda| = \|T\|$. (แนวคิด: ใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับปรกติ และข้อเท็จจริงว่าซูพรีมัมของ $|\lambda_k|$ ถูกบรรลุ.)

6. ให้ $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ บน $\mathbb{R}^2$. จงแสดงว่า R ปรกติแต่ไม่ผูกพันในตัว, หาสเปกตรัมเชิงซ้อนของมัน, และอธิบายว่าทำไมเราไม่เขียน “ค่าลักษณะเฉพาะมากที่สุด” สำหรับเมทริกซ์นี้.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **เมทริกซ์สมมาตร.** เพราะ A สมมาตรจริง $A^{*} = A$ จึงผูกพันในตัวและปรกติ. พหุนามลักษณะเฉพาะ

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - 3),$$

ค่าลักษณะเฉพาะคือ 1 และ 3. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสำหรับ 3 คือ $u_1 = (1,1)/\sqrt{2}$; สำหรับ 1 คือ $u_2 = (1,-1)/\sqrt{2}$. การฉายคือ $P_1 = u_1 u_1^{\mathsf{T}}$ และ $P_2 = u_2 u_2^{\mathsf{T}}$; เขียน

$$A = 3P_1 + 1P_2.$$

ตรวจตรง ๆ ได้ $P_1 + P_2 = I$ และ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. **ตัวดำเนินการแนวทแยง.** เวกเตอร์ฐาน e_k เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ ค่า $1, 1/2, 1/4$ และ 0 สำหรับ $k \geq 4$. สเปกตรัมคือ $\{0, 1, 1/2, 1/4\}$; $\|D\| = 1$. พิสัยของ D คือ $\operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ ซึ่งมีมิติ 3; ตัวดำเนินการจึงเป็นอันดับจำกัดและกระชับ. ส่วนค่าศูนย์บน e_k สำหรับ $k \geq 4$ ทำให้เคอร์เนลมีมิติอนันต์ แต่ไม่ได้ทำให้พิสัยมีมิติอนันต์.

3. **ลาปลาซผกผัน.** คำนวณ

$$\int_0^1 \min(x,y)\bigl(1 - \max(x,y)\bigr)\sqrt{2}\sin(2\pi y)\,dy = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{2}\sin(2\pi x).$$

ค่าเฉพาะคือ $1/(4\pi^2) = 0.02533030$. ค่าลักษณะเฉพาะเป็นบวกและเรียงลด: $1/\pi^2 > 1/(4\pi^2) > \cdots$; ค่ามากสุดคือ $1/\pi^2$ จึงเป็นนอร์มตามบทแทรกช่วงค่า.

4. **อันดับหนึ่งเชิงลบ.** P มีค่าลักษณะเฉพาะ 1 บน $\operatorname{span}\{u\}$ และ 0 บนส่วนตั้งฉาก. T มีค่า $-1/2$ และ 0; $\|T\| = 1/2$. สมการ $\|T\| = \sup|\lambda_k|$ ยังจริงเพราะ $|-1/2| = 1/2$. เราไม่เขียน “ค่ามากที่สุด” เพราะ $-1/2 < 0$; ต้องใช้ค่าสัมบูรณ์หรือ “ค่าที่มีขนาดมากที่สุด”.

5. **ค่าที่มีขนาดเท่านอร์ม.** จากทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับปรกติ เขียนค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์เป็น $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ โดย $\lambda_k \to 0$ และ $\|T\| = \sup_k |\lambda_k| =: M > 0$. ให้ $S = \{k : |\lambda_k| \geq M/2\}$; เซตนี้ไม่ว่างและมีจำนวนจำกัด. ให้ $k_0 \in S$ บรรลุค่าสูงสุดของ $|\lambda_k|$ บน S. ถ้า $|\lambda_{k_0}| < M$ แล้ว $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k_0}|$ สำหรับ $k \in S$ และ $|\lambda_k| < M/2 \leq |\lambda_{k_0}|$ สำหรับ $k \notin S$; ดังนั้น $\sup_k |\lambda_k| \leq |\lambda_{k_0}| < M$, ขัดแย้ง. จึงได้ $|\lambda_{k_0}| = M$. เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่คู่กับ λ_{k_0} จึงเป็นเวกเตอร์ที่ต้องการ. เราไม่ได้สรุปว่าเวกเตอร์ใด ๆ ที่ทำให้ $\|Tx\| = \|T\|$ ต้องเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ; ข้อสรุปมาจากทฤษฎีบทสเปกตรัม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. **การหมุน.** $R^{\mathsf{T}}R = RR^{\mathsf{T}} = I$ จึงปรกติ. แต่ $R^{\mathsf{T}} = -R \neq R$; ดังนั้นไม่ผูกพันในตัว. พหุนามลักษณะเฉพาะ $\lambda^2 + 1$ ให้ค่าลักษณะเฉพาะ $\pm i$. จำนวนเชิงซ้อนไม่มีลำดับตามขนาดที่เข้ากับ “มากที่สุด” ในความหมายจริง; เราใช้ $\sup|\lambda| = 1$ ได้ แต่ไม่เรียกมันว่าค่าสูงสุดของค่าลักษณะเฉพาะ.

9.2 แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันสำหรับตัวดำเนินการกระชับปรกติและผูกพันในตัว

ภาพรวมก่อนอ่าน

ถ้าเรารู้ว่าเครื่องขยายเสียงขยายแต่ละความถี่เท่าไร เราก็อยากตอบคำถามเช่น “ถ้าเปิดเครื่องนี้ทิ้งไว้ 0.1 วินาที เสียงแต่ละความถี่จะเหลือเท่าไร” โดยไม่ต้องสร้างเครื่องใหม่ทั้งเครื่อง. สำหรับตัวเลขธรรมดา เราใช้ฟังก์ชัน $f(x) = e^{-0.1x}$ กับเลขแต่ละตัว. สำหรับตัวดำเนินการ เราต้องการ $f(T)$ ที่ทำสิ่งเดียวกันกับทุกโหมดพร้อมกัน. **แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน** (functional calculus) คือกฎที่รับฟังก์ชัน f แล้วส่งออกตัวดำเนินการ $f(T)$ โดยรักษาการบวก การคูณ และการผูกพัน. เมื่อมีกฎนี้ เราเขียน $\sqrt{T}$, e^{-tT} หรือการตัดโหมดเล็กด้วยฟังก์ชันที่ราบเรียบได้.

ในหัวข้อนี้ T เป็นตัวดำเนินการกระชับปรกติ. ตามทฤษฎีบทสเปกตรัม เราเขียน

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k, \qquad P_0 = I - \operatorname*{slim}_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} P_k,$$

โดย P_k เป็นการฉายเชิงตั้งฉากลงบนปริภูมิลักษณะเฉพาะ E_{λ_k}; ผลรวมการฉายที่นิยาม P_0 ลู่แบบแรง และ P_0 ฉายลงบน $\ker T$. ถ้ามีค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่เป็นศูนย์อนันต์จำนวนมาก จะเรียงให้ $\lambda_k \to 0$; ถ้ามีจำนวนจำกัด ผลรวมจะสิ้นสุด. เมื่อ $0 \notin \sigma(T)$, ความกระชับบังคับให้ H มีมิติจำกัดและ $P_0 = 0$; ในสูตรด้านล่างให้เลือกค่า $f(0)$ ใด ๆ เพื่อขยาย f ไปยัง $\sigma(T) \cup \{0\}$, ซึ่งไม่เปลี่ยน $f(T)$ เพราะผลรวมการฉายมีค่า I. เราใช้ $\|f\|_{\infty} := \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)|$ สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนสเปกตรัม.

ทฤษฎีบท 9.2.1: แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวดำเนินการกระชับปรกติ

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ปรกติ. สำหรับ $f \in C(\sigma(T))$ นิยาม

$$f(T) := f(0)I + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f(\lambda_k) - f(0)\big) P_k = f(0)P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) P_k,$$

โดยอนุกรมรูปแรกใช้สำหรับการลู่ในนอร์ม ส่วนรูปหลังใช้ผลรวมการฉายแบบแรง. แล้ว

(a) อนุกรมรูปแรกลู่ในนอร์มตัวดำเนินการ และ $\|f(T)\| = \|f\|_{\infty}$;

(b) การส่ง $f \mapsto f(T)$ เป็นสาทิสสัณฐานของพีชคณิตแบบอินโวลูทีฟ: $(f+g)(T) = f(T) + g(T)$, $(fg)(T) = f(T)g(T)$ และ $\overline{f}(T) = f(T)^*$;

(c) $1(T) = I$ และ $t(T) = T$ เมื่อ $t(\lambda) = \lambda$;

(d) $f(T)$ ผูกพันในตัวเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจริง, และ $f(T)$ เป็นบวกเมื่อ $f(\lambda) \geq 0$ ทุก $\lambda \in \sigma(T)$;

(e) ถ้าขยาย f ต่อเนื่องไปยัง $\sigma(T) \cup \{0\}$ โดย $f(0) = 0$, แล้ว $f(T)$ กระชับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ทุกอย่างทำทีละโหมด. การฉาย P_k ตั้งฉากกัน จึงบวกกำลังสองของนอร์มได้เหมือนการบวกกำลังสองของพิกัด; ถ้ามีค่าลักษณะเฉพาะไม่เป็นศูนย์อนันต์จำนวนมาก มันลู่ศูนย์และความต่อเนื่องของ f ทำให้อนุกรมลู่.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

1. **การลู่เข้าและนอร์ม.** ถ้ามี λ_k อนันต์จำนวน, $\lambda_k \to 0$ และความต่อเนื่องให้ $f(\lambda_k) \to f(0)$, ดังนั้นนอร์มของส่วนหางไม่เกิน $\sup_{k>N} |f(\lambda_k) - f(0)| \to 0$. ถ้ามีค่าลักษณะเฉพาะไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด อนุกรมสิ้นสุด; ทั้งสองกรณีอนุกรมลู่ในนอร์ม. บน $\ker T$ ตัวดำเนินการทำงานเป็นการคูณด้วย $f(0)$ และบน E_{λ_k} เป็นการคูณด้วย $f(\lambda_k)$, จึงได้ $\|f(T)\| \le \|f\|_\infty$.

$$\left\| \sum_{k=N}^{M} \big(f(\lambda_k) - f(0)\big) P_k x \right\|^2 = \sum_{k=N}^{M} |f(\lambda_k) - f(0)|^2 \|P_k x\|^2 \le \left(\sup_{k>N} |f(\lambda_k) - f(0)| \right)^2 \|x\|^2.$$

   เพื่อได้ขอบเขตล่าง ให้ $\lambda_0 \in \sigma(T)$ เป็นจุดที่ $|f|$ มีค่าสูงสุด. ถ้า $\lambda_0 \neq 0$ แล้ว $\lambda_0 = \lambda_k$ สำหรับบาง k; เลือก $x \in E_{\lambda_k}$ หนึ่งหน่วย จะได้ $\|f(T)x\| = |f(\lambda_k)| = \|f\|_\infty$. ถ้า $\lambda_0 = 0$ และ $P_0 \neq 0$, เลือก $x \in P_0 H$ หนึ่งหน่วย; ได้ $\|f(T)x\| = |f(0)| = \|f\|_\infty$. ถ้า $\lambda_0 = 0$ และ $P_0 = 0$, แล้ว $0 \in \sigma(T)$ ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะ; จึงมีลำดับย่อย $\lambda_{k_j} \to 0$. เลือก $x_j \in E_{\lambda_{k_j}}$ หนึ่งหน่วย; แล้ว $\|f(T)x_j\| = |f(\lambda_{k_j})| \to |f(0)| = \|f\|_\infty$. รวมกับขอบเขตบนได้ความเท่ากัน.

2. **พีชคณิต.** บนแต่ละ E_{λ_k} ตัว $f(T)$ คือการคูณด้วย $f(\lambda_k)$; บน $\ker T$ คือการคูณด้วย $f(0)$. การบวกและการคูณจึงทำทีละโหมดและตรงกับการคูณฟังก์ชัน. ส่วนอินโวลูชันตามมาจาก $(\overline{f})(T) = f(T)^*$: บน E_{λ_k} ทั้งสองข้างคือการคูณด้วย $\overline{f(\lambda_k)}$, และบน $\ker T$ คือการคูณด้วย $\overline{f(0)}$; การฉายตั้งฉากเป็นตัวผูกพันในตัว.

3. **เอกลักษณ์และ T.** ฟังก์ชันคงที่ 1 ให้ I; ฟังก์ชัน $t(\lambda) = \lambda$ ให้ $0P_0 + \sum_k \lambda_k P_k = T$.

4. **ความกระชับเมื่อ $f(0) = 0$.** ในกรณีนี้ $f(T) = \sum_k f(\lambda_k) P_k$ และไม่มีพจน์บน $\ker T$. ถ้ามี $\lambda_k \neq 0$ อนันต์จำนวน, ความต่อเนื่องให้ $f(\lambda_k) \to f(0) = 0$. ดังนั้นผลรวมจำกัด $\sum_{k=1}^{N} f(\lambda_k) P_k$ ซึ่งมีอันดับจำกัดตามทฤษฎีบทสเปกตรัม ลู่สู่ $f(T)$ ในนอร์มตัวดำเนินการ; จึงกระชับ. ถ้ามีค่าลักษณะเฉพาะไม่เป็นศูนย์เพียงจำนวนจำกัด ผลรวมก็จำกัดและกระชับเช่นกัน.

5. **ความเป็นจริงและความเป็นบวก.** ถ้า f เป็นจริง ทุก $f(\lambda_k)$ และ $f(0)$ เป็นจริง; ผลรวมของการฉายตั้งฉากที่ผูกพันในตัวจึงผูกพันในตัว. ถ้า $f \ge 0$ แล้ว

$$\langle f(T)x, x \rangle = f(0)\|P_0 x\|^2 + \sum_k f(\lambda_k)\|P_k x\|^2 \ge 0.$$

สรุป: แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันทำกับแต่ละโหมดแยกกัน รักษาการบวกและการคูณ และส่งสเปกตรัมตามฟังก์ชัน. □

ทฤษฎีบท 9.2.2: ทฤษฎีบทการส่งสเปกตรัมสำหรับแคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ปรกติ และ $f \in C(\sigma(T))$. แล้ว

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ถ้า $c = f(\lambda)$, โหมดที่มีค่า λ ทำให้ $f(T) - cI$ ไม่ผกผัน; เมื่อ $\lambda = 0$ ไม่ใช่ค่าเฉพาะ ใช้ลำดับค่าลักษณะเฉพาะที่ลู่ศูนย์. ในทิศกลับ ถ้า $f - c$ ไม่เป็นศูนย์บนสเปกตรัม ฟังก์ชันส่วนกลับจะสร้างตัวผกผัน.

ให้ $c \in f(\sigma(T))$. เลือก $\lambda_0 \in \sigma(T)$ ซึ่ง $f(\lambda_0) = c$. ถ้า $\lambda_0 \neq 0$, แล้ว λ_0 เป็นค่าลักษณะเฉพาะ และ $f(T) - cI$ มีเคอร์เนลบน E_{λ_0}. ถ้า $\lambda_0 = 0$ และ $\ker T \neq \{0\}$, มันมีเคอร์เนลบน $\ker T$. กรณีที่เหลือคือ $0 \in \sigma(T)$ แต่ $\ker T = \{0\}$; เลือกค่าลักษณะเฉพาะ $\lambda_{k_j} \to 0$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $x_j \in E_{\lambda_{k_j}}$. จากความต่อเนื่องของ f,

$$\|(f(T) - cI)x_j\| = |f(\lambda_{k_j}) - f(0)| \longrightarrow 0.$$

ดังนั้น $f(T) - cI$ ไม่มีตัวผกผันที่มีขอบเขต. ได้ $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$.

ตัวอย่าง Preprint 2026-10-24

กลับกัน ให้ $c \notin f(\sigma(T))$. ฟังก์ชัน $g = f - c$ ไม่มีศูนย์บนเซตกระชับ $\sigma(T)$, จึงมี $h = 1/g \in C(\sigma(T))$. จากสมบัติพีชคณิตของแคลคูลัส, $h(T)g(T) = g(T)h(T) = I$; ตรวจได้บนทุกปริภูมิลักษณะเฉพาะและบน $\ker T$ เมื่อ $0 \in \sigma(T)$. ดังนั้น $f(T) - cI = g(T)$ มีตัวผกผันที่มีขอบเขต, จึง $c \notin \sigma(f(T))$. ได้อสมการอีกทิศและความเท่ากัน. □

ทฤษฎีบท 9.2.3: รากที่สองบวกของตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกมีเพียงหนึ่งเดียว

ให้ $T \in \mathcal{K}(H)$ ผูกพันในตัวและเป็นบวก. แล้วมีตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวก S เพียงตัวเดียวซึ่ง $S^2 = T$. เราเขียน $S = \sqrt{T}$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ $f(t) = \sqrt{t}$ กับแคลคูลัส; ความเป็นเอกลักษณ์ตามมาจากการที่ตัวดำเนินการที่เป็นบวกทุกตัวมีฐานลักษณะเฉพาะและค่าลักษณะเฉพาะไม่ติดลบ.

1. ให้ $f(t) = \sqrt{t}$ บน $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. ถ้ามีค่า $\lambda_k > 0$ อนันต์จำนวน, แล้ว $\lambda_k \to 0$ และ $\sqrt{\lambda_k} \to 0$; ดังนั้น $S = f(T) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} P_k$ เป็นลิมิตในนอร์มของผลรวมจำกัดซึ่งมีอันดับจำกัด. ถ้ามีค่า $\lambda_k > 0$ เพียงจำนวนจำกัด ผลรวมนี้เป็นผลรวมจำกัดโดยตรง. ในทั้งสองกรณี S กระชับ. ทฤษฎีบทให้ S เป็นบวก และ $S^2 = (f^2)(T) = T$ เพราะ $f^2(t) = t$.

2. ให้ S_1 เป็นตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกที่ $S_1^2 = T$. แล้ว $S_1 T = S_1^3 = T S_1$; โดยเฉพาะ S_1 ส่งปริภูมิลักษณะเฉพาะ $E_\lambda(T)$ เข้าในตัวเอง. ถ้า $\lambda > 0$, แล้ว $E_\lambda(T)$ มีมิติจำกัด และบนปริภูมินี้ $S_1^2 = \lambda I$. เพราะ S_1 ผูกพันในตัวและเป็นบวก ค่าลักษณะเฉพาะของ S_1 บน $E_\lambda(T)$ เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบและยกกำลังสองได้ λ; จึงเท่ากับ $\sqrt{\lambda}$ ทุกตัว. ตัว S_1 ซึ่งผูกพันในตัวจึงเป็นการคูณด้วย $\sqrt{\lambda}$ บน $E_\lambda(T)$. บน $\ker T$,

$$\|S_1 x\|^2 = \langle S_1^2 x, x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$$

สำหรับทุก $x \in \ker T$, ดังนั้น $S_1 = 0$ บน $\ker T$. เพราะ $H = \ker T \oplus_2 \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\lambda>0} E_\lambda(T)$ และ S_1 มีขอบเขตตัว S_1 ถูกกำหนดค่าเดียวกันกับ $\sqrt{T}$ ทุกประการ.

สรุป: รากที่สองถูกสร้างโดยการใส่ฟังก์ชันรากที่สองลงในแต่ละโหมด และมีเพียงตัวเดียวเมื่อต้องการตัวดำเนินการที่เป็นบวก. □

ตัวอย่าง: ใส่ฟังก์ชันลงในเมทริกซ์

ให้

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

เมทริกซ์ A มีค่าลักษณะเฉพาะ $1, 3$ และ $A = P_1 + 3P_3$. เมื่อ $f(t) = 1/(1+t)$, แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันจึงให้

$$f(A) = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_3 = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 \\ -1/8 & 3/8 \end{pmatrix} = (I + A)^{-1}.$$

เมทริกซ์เดียวกันยังให้รากที่สอง

$$\sqrt{A} = P_1 + \sqrt{3}P_3 = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})/2 & (\sqrt{3}-1)/2 \\ (\sqrt{3}-1)/2 & (1+\sqrt{3})/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.36602540 & 0.36602540 \\ 0.36602540 & 1.36602540 \end{pmatrix}.$$

สำหรับฟังก์ชันความร้อน $f(t) = e^{-0.1t}$, ค่าลักษณะเฉพาะ 1 และ 3 ถูกคูณด้วย $e^{-0.1}$ และ $e^{-0.3}$ ตามลำดับ:

$$e^{-0.1A} = e^{-0.1}P_1 + e^{-0.3}P_3 = \begin{pmatrix} 0.82282782 & -0.08200960 \\ -0.08200960 & 0.82282782 \end{pmatrix}.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ดังนั้นการใส่ฟังก์ชันลงในเมทริกซ์ไม่ได้หมายถึงการคำนวณฟังก์ชันแยกตามช่อง; เราคำนวณบนแต่ละโหมด แล้วประกอบกลับด้วยการฉาย. ทั้งสามผลลัพธ์ข้างต้นตรวจได้โดยตรงจากสูตรการฉาย, และแยกตรวจด้วยเมทริกซ์ผกผันหรือการแยกค่าเฉพาะเชิงตัวเลข.

ตัวอย่าง: ตัวดำเนินการแนวทแยงกระชับบน ℓ^2

ให้ $(e_n)_{n\ge 1}$ เป็นฐานมาตรฐานของ ℓ^2 และนิยาม

$$De_n = 2^{-(n-1)} e_n \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

ค่าลักษณะเฉพาะบวกคือ $1, 1/2, 1/4, \dots$ และลู่ศูนย์; ดังนั้น D กระชับ. สเปกตรัมคือ $\{1, 1/2, 1/4, \dots\} \cup \{0\}$, แต่ 0 ไม่ใช่ค่าลักษณะเฉพาะ เพราะ $Dx = 0$ บังคับให้ทุกพิกัดของ x เป็นศูนย์. เมื่อใส่ $f(t) = \sqrt{t}$, เราได้

$$\sqrt{D}\, e_n = 2^{-(n-1)/2} e_n.$$

สี่พิกัดแรกของรากที่สองคือ $1,\ 0.70710678,\ 0.5,\ 0.35355339$. สัมประสิทธิ์ยังลู่ศูนย์, จึงเห็นโดยตรงว่า $\sqrt{D}$ กระชับเช่นกัน. ตัวอย่างนี้แสดงว่าฟังก์ชันต่อเนื่องที่มี $f(0) = 0$ รักษาความกระชับ; ถ้าเลือก $f \equiv 1$, เราจะได้เอกลักษณ์ซึ่งไม่กระชับบน ℓ^2.

นิยาม 9.2.1: การวัดสเปกตรัม

ให้ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ เป็นซิกมา-พีชคณิตบอเรลบน $\mathbb{R}$. **การวัดสเปกตรัม** (spectral measure) คือการส่ง $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$ ซึ่ง

(a) $E(B)$ เป็นการฉายเชิงตั้งฉากทุกเซตบอเรล B;

(b) $E(\varnothing) = 0$ และ $E(\mathbb{R}) = I$;

(c) สำหรับเซตไม่ทับกัน $B_1, B_2, \dots$,

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) x = \sum_{j=1}^{\infty} E(B_j)x \qquad (x \in H),$$

โดยอนุกรมลู่ในนอร์ม.

ตัวอย่าง: การวัดสเปกตรัมแบบวิยุตของตัวดำเนินการกระชับ

สำหรับ $T \in \mathcal{K}(H)$ ผูกพันในตัวและ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ นิยาม

$$E_T(B) := \sum_{\lambda_k \in B} P_k + \mathbf{1}_{\{0 \in B\}} P_0.$$

แล้ว E_T เป็นการวัดสเปกตรัม และ

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_T(\lambda), \qquad f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE_T(\lambda)$$

สำหรับ f ต่อเนื่อง. ในกรณีนี้ปริพันธ์คือผลบวกวิยุตบนสเปกตรัม ซึ่งมีศูนย์เป็นจุดสะสมเพียงจุดเดียว. เราไม่ต้องสร้างทฤษฎีปริพันธ์แบบนามธรรมเพิ่ม เพราะทุกอย่างลดเหลือผลรวมของการฉายที่พิสูจน์แล้ว.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 9.2.4: ขอบเขตของสเปกตรัมของตัวดำเนินการผูกพันในตัวที่มีขอบเขต

ให้ $T \in \mathcal{L}(H)$ ผูกพันในตัว และกำหนด

$$m := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, \qquad M := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle.$$

แล้ว $\sigma(T) \subset [m, M]$.

พิสูจน์. ให้ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$. สำหรับ $x \neq 0$ นิยามของ m และ M ให้ $\langle Tx, x\rangle / \|x\|^2 \in [m, M]$ ซึ่งอยู่ห่างจาก λ อย่างน้อย $\operatorname{dist}(\lambda, [m, M])$; กรณี $x = 0$ ชัดเจน. ดังนั้นสำหรับทุก $x \in H$,

$$\|(T - \lambda I)x\| \, \|x\| \geq |\langle (T - \lambda I)x, x\rangle| \geq \operatorname{dist}(\lambda, [m, M]) \|x\|^2.$$

ถ้า $\lambda \notin \mathbb{R}$, ส่วนจินตภาพของผลคูณภายในให้

$$\|(T - \lambda I)x\| \, \|x\| \geq |\langle (T - \lambda I)x, x\rangle| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \, \|x\|^2.$$

ดังนั้น $T - \lambda I$ ถูกจำกัดจากด้านล่าง จึงหนึ่งต่อหนึ่งและมีพิสัยปิด. ตัวผูกพัน $(T - \lambda I)^* = T - \bar{\lambda} I$ ก็ถูกจำกัดจากด้านล่างด้วยเหตุผลเดียวกัน, จึงมีเคอร์เนลศูนย์. จาก $\operatorname{ran}(T - \lambda I)^\perp = \ker(T - \bar{\lambda} I)$ พิสัยจึงหนาแน่นและปิด; ดังนั้นเท่ากับ H. ตัวผกผันมีขอบเขตจากอสมการข้างต้น, จึง $\lambda \notin \sigma(T)$. □

ทฤษฎีบท 9.2.5: ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการผูกพันในตัวที่มีขอบเขต (รูปการวัดสเปกตรัม)

ให้ $T \in \mathcal{L}(H)$ ผูกพันในตัว. แล้วมีการวัดสเปกตรัม E เพียงหนึ่งเดียวบน $\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$Tx = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda) x \qquad (x \in H),$$

และสำหรับฟังก์ชันบอเรลที่มีขอบเขต f,

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\langle E(\lambda)x, y\rangle.$$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า H แยกได้, ตัวดำเนินการผูกพันในตัวเป็นยูนิแทรีสมมูลกับ**ตัวดำเนินการคูณ** (multiplication operator) $M_g \varphi = g\varphi$ บนปริภูมิ $L^2(\mu)$ ที่มีการวัด σ-จำกัดบางปริภูมิ สำหรับฟังก์ชันจริงที่มีขอบเขต g.

ข้อควรระวัง

ทฤษฎีบทนี้เป็นทฤษฎีบทสำหรับตัวดำเนินการที่มีขอบเขตทั่วไป และเรา**ไม่พิสูจน์ในบทนี้**. แนวคิดหนึ่งของการสร้างคือ สำหรับ $x \in H$, ฟังก์ชันนัล $p \mapsto \langle p(T)x, x\rangle$ เป็นบวกและมีขอบเขตบน $C(\sigma(T))$; ทฤษฎีบทแทนค่าของรีส์ซซ์ให้การวัดบวก μ_x. การทำโพลาไรเซชันให้การวัดเชิงซ้อน $\langle E(\,\cdot\,)x, y\rangle$; จากนั้นสร้างการฉาย $E(B)$ และพิสูจน์การบวกได้แบบนับได้. ขั้นสุดท้ายนี้ต้องใช้ทฤษฎีการวัด จึงอ้างผลเต็มจาก Werner. กรณีกระชับซึ่งเป็นกรณีที่เราใช้คำนวณได้พิสูจน์เต็มแล้วในหัวข้อนี้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ตัวอย่าง: การลดลงของฮาร์มอนิกภายใต้แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน

ให้ T เป็นตัวดำเนินการแนวทแยงบน $\mathbb{C}^3$ ที่มีค่าลักษณะเฉพาะ $4, 1, 1/4$ และให้ $f(t) = e^{-0.1t}$. แล้ว

$$f(T) = \operatorname{diag}(e^{-0.4}, e^{-0.1}, e^{-0.025}) = \operatorname{diag}(0.67032005, 0.90483742, 0.97530991).$$

โหมดที่มีค่าลักษณะเฉพาะมากที่สุดลดลงเหลือประมาณสองในสามในเวลา 0.1 วินาที; โหมดเล็กสุดยังเหลือเกือบทั้งหมด. นี่คือคำตอบเชิงแบบจำลองสำหรับคำถามเปิดบท: แอปไม่ต้องติดตามแต่ละฮาร์มอนิกแยกกันด้วยกฎที่ต่างกัน เพราะ e^{-tT} ใช้ฟังก์ชันเดียวกันกับทุกโหมด แต่ละโหมดเห็นค่า λ_k ของตัวเอง. ตัวเลขทั้งสามมีแบบทดสอบยืนยัน.

ข้อควรระวัง

e^{-tT} ในที่นี้เป็นเพียงสัญลักษณ์จากแคลคูลัสเชิงฟังก์ชันบนแบบจำลองวิยุต. เราไม่ได้อ้างว่าเสียงกีตาร์จริงลดลงตามฟังก์ชันนี้ หรือแอปเพลงใดใช้ตัวแบบนี้. การลดลงของเสียงจริงขึ้นกับวัสดุสาย การยึดปลาย และการสูญเสียพลังงานหลายทาง.

สรุปใจความ

- สำหรับ f ต่อเนื่องบนสเปกตรัมของ T กระชับปรกติ, $f(T)$ นิยามโดยใส่ f ลงในแต่ละการฉายลักษณะเฉพาะ.
- $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$; การส่ง $f \mapsto f(T)$ รักษาการบวก การคูณ และการผูกพัน.
- สเปกตรัมส่งตามฟังก์ชัน: $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$; ฟังก์ชันจริงให้ตัวดำเนินการผูกพันในตัว และฟังก์ชันไม่ติดลบให้ตัวดำเนินการที่เป็นบวก.
- การวัดสเปกตรัมในกรณีกระชับคือผลรวมของการฉายบนค่าลักษณะเฉพาะที่อยู่ในเซตบอเรล.
- ทฤษฎีบทการวัดสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการมีขอบเขตทั่วไปและรูปตัวดำเนินการคูณอ้างโดยไม่พิสูจน์; เราใช้เพียงเพื่อเชื่อมไปยังกรณีไม่มีขอบเขต.

อ่านต่อ

แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันตอบคำถามว่า “ทำฟังก์ชันกับตัวดำเนินการทั้งตัว” หมายความว่าอะไร. แต่ตัวดำเนินการลาปลาซไม่ต่อเนื่องบน L^2 ทั้งปริภูมิ; เราจึงต้องเลือกโดเมนและระวังว่าตัวผกผันหรือตัวดำเนินการผูกพันนิยามบนเวกเตอร์ใด. หัวข้อถัดไปจะวางนิยามของตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต ตัวดำเนินการปิด และตัวดำเนินการผูกพันในตัว แล้วใช้ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลเป็นตัวอย่างหลัก.

ต้นฉบับ · Preprint · 2026-10-21

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $T = \operatorname{diag}(4, 1, 1/4)$ และ $f(t) = 1/(1+t)$. จงหา $f(T)$ และตรวจว่าค่าลักษณะเฉพาะของมันคือ f ของค่าลักษณะเฉพาะเดิม.
2. ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. จงใช้แคลคูลัสเชิงฟังก์ชันหา $\sqrt{A}$ และตรวจว่า $\sqrt{A}$ เป็นบวกและยกกำลังสองได้ A.
3. ให้ $p(t) = t^2 - 3t + 2$ และ $T = \operatorname{diag}(2, -1, 0)$. จงหา $p(T)$ และตรวจสูตรการส่งสเปกตรัม $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.

4. ให้ $T = \mathrm{diag}(4, 1, 1/4)$ และ $f(t) = e^{-0.1t}$. ถ้าเราเก็บเพียงสองโหมดแรก ความคลาดเคลื่อนเชิงสัมพัทธ์ของตัวคูณโหมดที่ถูกตัดคือเท่าไร?

5. ให้ $T = \mathrm{diag}(2, -1, 0)$ บน $\mathbb{C}^3$ และ $B = (-\infty, 0]$. จงหา $E_T(B)$ และตรวจว่า $E_T(B)^2 = E_T(B)$.

6. จงพิสูจน์สูตรการส่งสเปกตรัม $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ สำหรับ T กระชับปรกติ โดยใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมโดยตรง.

7. ให้ V เป็นตัวดำเนินการโวลแตร์ราที่ไม่เป็นศูนย์บน $L^2(0,1)$ ซึ่งกระชับและมีสเปกตรัม $\{0\}$. จงอธิบายว่าทำไมสมการ $\|f(V)\| = \|f\|_\infty$ สำหรับทุก f ต่อเนื่องเป็นไปไม่ได้. (ไม่ต้องพิสูจน์ว่าโวลแตร์รากระชับ.)

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ฟังก์ชันตรรกยะ.** ใช้ f กับค่า $4, 1, 1/4$:
$$f(T) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right) = \mathrm{diag}(0.2, 0.5, 0.8).$$
ค่าลักษณะเฉพาะทั้งสามคือ $0.2, 0.5, 0.8$ ตรงกับ $f(4), f(1), f(1/4)$.

2. **รากที่สอง.** ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ 3 และ 1, ดังนั้น $\sqrt{A}$ มีค่าลักษณะเฉพาะ $\sqrt{3}$ และ 1. เขียน
$$\sqrt{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.36602540, \quad b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0.36602540.$$
ตรวจได้ $\sqrt{A}^{\,2} = A$; ค่าตัวเลขมีแบบทดสอบยืนยัน. ตัวดำเนินการนี้เป็นบวกเพราะค่าลักษณะเฉพาะทั้งสองเป็นบวก.

3. **พหุนาม.** คำนวณ
$$p(2) = 0, \qquad p(-1) = 1 + 3 + 2 = 6, \qquad p(0) = 2.$$
ดังนั้น $p(T) = \mathrm{diag}(0, 6, 2)$. สเปกตรัมของ T คือ $\{2, -1, 0\}$ และ p ของเซตนี้คือ $\{0, 6, 2\}$; ตรงกับสเปกตรัมของ $p(T)$.

4. **การตัดโหมด.** เก็บโหมดค่า 4 และ 1; โหมดที่ถูกตัดมีค่า $1/4$. ตัวคูณที่ยังเหลือของโหมดนั้นคือ
$$e^{-0.1 \cdot (1/4)} = e^{-0.025} = 0.97530991.$$
เมื่อตัดโหมดนี้ ตัวประมาณแทนตัวคูณด้วย 0; ความคลาดเคลื่อนเชิงสัมพัทธ์เทียบกับค่าจริงจึงเป็น
$$\frac{|0 - e^{-0.025}|}{e^{-0.025}} = 1.$$

5. **การฉายสเปกตรัม.** เซต $B = (-\infty, 0]$ เก็บค่า -1 และ 0 ไม่เก็บ 2. ดังนั้น
$$E_T(B) = P_{-1} + P_0 = \mathrm{diag}(0, 1, 1).$$
เมทริกซ์นี้ยกกำลังสองได้ตัวเอง และฉายลงบนปริภูมิที่แผ่โดยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ -1 และ 0.

6. **การส่งสเปกตรัม.** กำหนด $\Lambda := \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \neq 0\}$. ค่าทุกตัวใน Λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ และถ้า Λ มีอนันต์สมาชิก จะเรียงเป็นลำดับ $\lambda_k \to 0$; สเปกตรัมคือ Λ หรือ $\Lambda \cup \{0\}$ ตามว่า 0 อยู่ในสเปกตรัมหรือไม่. ให้ $c \in \mathbb{C}$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

- ถ้า $c \in f(\sigma(T))$, เลือก $\lambda \in \sigma(T)$ ที่ $f(\lambda) = c$. ถ้า $\lambda = \lambda_k \neq 0$, เวกเตอร์ใน E_{λ_k} เป็นเคอร์เนลของ $f(T) - cI$. ถ้า $\lambda = 0$ และ $\ker T \neq \{0\}$, เวกเตอร์ในเคอร์เนลก็ให้ข้อสรุปเดียวกัน. ถ้า $\lambda = 0$ แต่ $\ker T = \{0\}$, เลือก $\lambda_{k_j} \to 0$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $x_j \in E_{\lambda_{k_j}}$; ความต่อเนื่องของ f ให้ $\|(f(T) - cI)x_j\| = |f(\lambda_{k_j}) - f(0)| \to 0$. ในทุกกรณี $f(T) - cI$ ไม่มีตัวผกผันที่มีขอบเขต, จึง $c \in \sigma(f(T))$. ได้ $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$.
- กลับกัน ถ้า $c \notin f(\sigma(T))$, ฟังก์ชัน $g = f - c$ ไม่มีศูนย์บน $\sigma(T)$. ดังนั้น $h = 1/g$ ต่อเนื่องบนเซตกระชับนี้. จากสมบัติพีชคณิตที่พิสูจน์แล้ว $h(T)g(T) = g(T)h(T) = I$, โดยตรวจได้บน $\ker T$ และทุก E_{λ_k}. จึง $g(T) = f(T) - cI$ มีตัวผกผันที่มีขอบเขต, ดังนั้น $c \notin \sigma(f(T))$.

จึงได้ $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

7. **ความล้มเหลวของแคลคูลัสบนตัวดำเนินการไม่ปรกติ.** ถ้ากฎดังกล่าวมีจริงกับ $f(t) = t$ จะได้ $f(V) = V$. แต่ $\sigma(V) = \{0\}$ ดังนั้น $\|f\|_\infty = |f(0)| = 0$. สมการ $\|f(V)\| = \|f\|_\infty$ จะให้ $\|V\| = 0$, ขัดกับ $V \neq 0$. ความขัดแย้งนี้แสดงว่าต้องมีสมมติฐานเพิ่มเติม เช่น ความปรกติหรือความเป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว ก่อนจะได้แคลคูลัสแบบมีนอร์มเท่ากัน.

9.3 ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต: โดเมน ตัวดำเนินการปิด และลาปลาซที่ผูกพันในตัว

ภาพรวมก่อนอ่าน

ตัวดำเนินการที่มีขอบเขตนิยามบนทั้งปริภูมิและมีค่าคงตัวคุมขนาดของภาพ. ตัวดำเนินการอนุพันธ์ไม่เป็นเช่นนั้น: ฟังก์ชันที่เล็กมากอาจมีอนุพันธ์ใหญ่ได้ ถ้าเราเปลี่ยนฟังก์ชันให้สั่นเร็วขึ้นโดยไม่เพิ่มขนาด อนุพันธ์ก็โตขึ้นโดยไม่มีขอบเขต. แต่เราไม่สามารถนิยามอนุพันธ์บนทุกฟังก์ชันใน L^2 เพราะฟังก์ชัน L^2 ไม่จำเป็นต้องมีอนุพันธ์. เราจึงต้องระบุ**โดเมน** (domain) ซึ่งเป็นปริภูมิย่อยของฟังก์ชันที่อนุพันธ์มีอยู่ และตรวจว่าโดเมนนั้น “หนาแน่น” พอที่ตัวผูกพันจะนิยามได้. ภาพที่ต้องจำคือ: **ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต** (unbounded operator) ไม่ใช่สัตว์ประหลาดที่นิยามไม่ได้; มันคือตัวดำเนินการที่มีโดเมนแคบและมีเงื่อนไขขอบที่สำคัญมาก.

นิยาม 9.3.1: ตัวดำเนินการบนโดเมน โดเมนหนาแน่น และส่วนขยาย

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต. **ตัวดำเนินการ** $T : H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ คือการส่งเชิงเส้นซึ่งนิยามบนปริภูมิย่อย $\mathrm{dom}(T)$ ของ H. เรากล่าวว่า T **นิยามบนเซตหนาแน่น** (densely defined) เมื่อ $\overline{\mathrm{dom}(T)} = H$.
ถ้า S, T เป็นตัวดำเนินการและ $\mathrm{dom}(T) \subset \mathrm{dom}(S)$ กับ $Sx = Tx$ ทุก $x \in \mathrm{dom}(T)$, เราเรียก S ว่า**ส่วนขยาย** (extension) ของ T และเขียน $T \subset S$. ตัวดำเนินการสองตัวเท่ากันเมื่อแต่ละตัวเป็นส่วนขยายของอีกตัว.

นิยาม 9.3.2: ตัวดำเนินการสมมาตรและตัวดำเนินการผูกพันของตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต

ให้ $T : H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ นิยามบนเซตหนาแน่น. เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการสมมาตร** (symmetric operator) เมื่อ

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{สำหรับทุก } x, y \in \mathrm{dom}(T).$$

นิยาม $\mathrm{dom}(T^*)$ เป็นเซตของ $y \in H$ ซึ่งฟังก์ชัน $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ต่อเนื่องบน $\mathrm{dom}(T)$ พร้อมด้วยโทโพโลยีจาก H. สำหรับ y เช่นนั้น มี $z \in H$ เพียงตัวเดียวซึ่ง

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad \text{สำหรับทุก } x \in \mathrm{dom}(T),$$

ร่างเพื่อการอ่าน · Preprint · 2026-10-24

และเรานิยาม $T^*y := z$. ตัวดำเนินการ T^* ชื่อ**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) ของ T. เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการผูกพันในตัว** (self-adjoint operator) เมื่อ $T = T^*$; โดยเฉพาะโดเมนต้องเท่ากันด้วย.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

"สมมาตร" อ่อนกว่า "ผูกพันในตัว" ในกรณีไม่มีขอบเขต. ตัวดำเนินการสมมาตรมีเพียง $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ บนโดเมนของมัน; ตัวดำเนินการผูกพันในตัวต้องมีโดเมนเท่ากับโดเมนของตัวผูกพันด้วย. ตัวอย่างคลาสสิกคือ $T = i\,d/dx$ บนฟังก์ชันที่หายที่ปลายทั้งสอง: มันสมมาตร แต่ถ้าเราใช้โดเมนเล็กเกินไป ตัวผูกพันจะมีฟังก์ชันที่ปลายไม่หายเพิ่มเข้ามา. การเลือกโดเมนจึงไม่ใช่รายละเอียดทางเทคนิค; มันเปลี่ยนคำตอบว่าตัวดำเนินการผูกพันในตัวหรือไม่.

นิยาม 9.3.3: ตัวดำเนินการปิดและกราฟ

ให้ $T : H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$. **กราฟ** (graph) ของ T คือ

$$\Gamma(T) := \{(x, Tx) : x \in \mathrm{dom}(T)\} \subset H \oplus H.$$

เราเรียก T ว่า**ตัวดำเนินการปิด** (closed operator) เมื่อ $\Gamma(T)$ เป็นเซตปิดใน $H \oplus H$. กล่าวแบบลำดับ: ถ้า $x_n \in \mathrm{dom}(T)$, $x_n \to x$ และ $Tx_n \to y$, แล้ว $x \in \mathrm{dom}(T)$ และ $Tx = y$.

บทตั้ง 9.3.1: ตัวผูกพันของตัวดำเนินการที่นิยามบนเซตหนาแน่นเป็นตัวดำเนินการปิด

ให้ $T : H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ นิยามบนเซตหนาแน่น. แล้ว T^* เป็นตัวดำเนินการปิด.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ความต่อเนื่องของผลคูณภายในและนิยามของ T^* ผ่านสองลิมิต.

1. ให้ $y_n \in \mathrm{dom}(T^*)$, $y_n \to y$ และ $T^*y_n \to z$. สำหรับ $x \in \mathrm{dom}(T)$,

   $$\langle Tx, y_n\rangle = \langle x, T^*y_n\rangle.$$

   เพราะ $y_n \to y$ และ $T^*y_n \to z$, สองข้างลู่เข้า $\langle Tx, y\rangle$ และ $\langle x, z\rangle$ ตามลำดับ. ดังนั้น

   $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$$

   สำหรับทุก $x \in \mathrm{dom}(T)$.

2. สมการนี้แสดงว่าฟังก์ชัน $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ต่อเนื่อง (มีค่าคงตัว z เป็นตัวแทน) และ $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ กับ $T^*y = z$. กราฟของ T^* จึงปิด.

สรุป: ลิมิตของคู่ (y_n, T^*y_n) ให้คู่ (y, T^*y); ตัวผูกพันจึงปิดเสมอเมื่อโดเมนของ T หนาแน่น. □

ตัวอย่าง: ตัวดำเนินการอนุพันธ์ไม่มีขอบเขต

บน $H = L^2(0,1)$ ให้ $\mathrm{dom}(T) = H^1(0,1)$ และ $Tf = f'$. สำหรับ $n \geq 1$ ให้

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 4n^2\pi^2}}\big(\cos(2n\pi x) + 2n\pi \sin(2n\pi x)\big).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ฟังก์ชันนี้อยู่ใน H^1 และ $\|f_n\|_{L^2} = 1$. อนุพันธ์คือ

$$f_n'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+4n^2\pi^2}}\big(-2n\pi\sin(2n\pi x) + (2n\pi)^2\cos(2n\pi x)\big).$$

จาก $\int_0^1 \sin^2(2n\pi x)\,dx = \int_0^1 \cos^2(2n\pi x)\,dx = 1/2$ และอินทิกรัลผสมเป็นศูนย์ ได้เมื่อ $a := 2n\pi$

$$\|f_n'\|_{L^2}^2 = \frac{2}{1+a^2}\cdot\frac{a^2+a^4}{2} = a^2,$$

ดังนั้น $\|f_n'\|_{L^2} = 2n\pi \to \infty$ เมื่อ $n\to\infty$. ดังนั้น T ไม่มีขอบเขต. เราใช้ทั้งลำดับ (f_n) ไม่ใช่เวกเตอร์เดียว: ความไม่มีขอบเขตหมายความว่าไม่มีค่าคงตัว C คุมอัตราส่วนนี้ทุก n.

ข้อควรระวัง

ตัวอย่างข้างต้นไม่ได้บอกว่า f_n “เล็ก” ในความหมายทุกอย่าง. มันมีนอร์ม L^2 เท่ากับหนึ่ง แต่มีการสั่นถี่ขึ้นและอนุพันธ์ใหญ่ขึ้น. ถ้าเราเลือกเวกเตอร์เดียวและคำนวณอัตราส่วนเดียว เราไม่สามารถสรุปความไม่มีขอบเขตได้; ต้องมีลำดับที่อัตราส่วนโตไม่จำกัด.

ทฤษฎีบท 9.3.2: เกณฑ์พิสัยของตัวดำเนินการผูกพันในตัว

ให้ $T : H \supset \mathrm{dom}(T) \to H$ สมมาตรและนิยามบนเซตหนาแน่น. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน:

(i) T เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว;

(ii) T เป็นตัวดำเนินการปิด และ $\ker(T^* + i) = \ker(T^* - i) = \{0\}$;

(iii) $\mathrm{ran}(T+i) = \mathrm{ran}(T-i) = H$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้เอกลักษณ์ $\|(T\pm i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$ ซึ่งทำให้ $T\pm i$ ไม่มีเคอร์เนลและมีพิสัยปิด; แล้วเชื่อมพิสัยกับเคอร์เนลของตัวผูกพันผ่านการตั้งฉาก.

ก่อนอื่น บันทึกสองข้อที่ใช้ตลอดการพิสูจน์. สำหรับ $x \in \mathrm{dom}(T)$,

$$\|(T+i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle Tx, ix\rangle = \|Tx\|^2 + \|x\|^2, \tag{9.1}$$

เพราะ $\langle Tx, ix\rangle = -i\langle Tx, x\rangle$ และ $\langle Tx, x\rangle$ เป็นจำนวนจริง; สมการเดียวกันจริงกับ $T - i$. โดยเฉพาะ $\|(T\pm i)x\| \geq \|x\|$, ดังนั้น $T\pm i$ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่ง. สำหรับ $y \in H$,

$$y \perp \mathrm{ran}(T+i) \iff y \in \mathrm{dom}(T^*) \text{ และ } T^*y = iy, \tag{9.2}$$

และเช่นเดียวกัน $y \perp \mathrm{ran}(T-i)$ ก็ต่อเมื่อ $y\in\mathrm{dom}(T^*)$ และ $T^*y = -iy$. พิสูจน์ (2): สมการ $\langle (T+i)x, y\rangle = 0$ ทุก $x\in\mathrm{dom}(T)$ เขียนได้เป็น $\langle Tx, y\rangle = -i\langle x, y\rangle = \langle x, iy\rangle$; นิยามของ T^* จึงให้ $y\in\mathrm{dom}(T^*)$ และ $T^*y = iy$. อีกเครื่องหมายได้จากการแทน i ด้วย $-i$.

1. **(i) ⇒ (ii).** ถ้า $T = T^*$ แล้ว T เป็นตัวดำเนินการปิดตามบทตั้งก่อนหน้า. จาก (9.1), $\ker(T\pm i) = \{0\}$; เพราะ $T = T^*$, จึงได้ $\ker(T^*\pm i) = \ker(T\pm i) = \{0\}$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

2. **(ii) ⇒ (iii).** ให้ $y \perp \operatorname{ran}(T+i)$. จาก (9.2), $T^*y = iy$, นั่นคือ $y \in \ker(T^* - i) = \{0\}$. ดังนั้น $\operatorname{ran}(T+i)$ หนาแน่น. เราจะแสดงว่ามันปิด. ให้ $x_n \in \operatorname{dom}(T)$ กับ $(T+i)x_n \to z$. จาก (9.1),

$$\|x_n - x_m\| \le \|(T+i)(x_n - x_m)\| \longrightarrow 0,$$

ดังนั้น $x_n \to x$ สำหรับบาง $x \in H$. แล้ว $Tx_n = (T+i)x_n - ix_n \to z - ix$. เพราะ T ปิด, $x \in \operatorname{dom}(T)$ และ $Tx = z - ix$; จึง $z = (T+i)x$. พิสัยของ $T+i$ ปิดและหนาแน่น จึงเท่ากับ H. อีกเครื่องหมายทำเหมือนกัน.

3. **(iii) ⇒ (i).** ให้ $y \in \operatorname{dom}(T^*)$. เพราะ $\operatorname{ran}(T-i) = H$, มี $x \in \operatorname{dom}(T)$ ซึ่ง

$$(T-i)x = (T^* - i)y.$$

เพราะ $T \subset T^*$, สมการนี้ให้ $(T^* - i)(y - x) = 0$. จาก (9.2), $\ker(T^* - i) = \operatorname{ran}(T+i)^{\perp}$. เพราะสมมติฐาน (iii) ให้ $\operatorname{ran}(T+i) = H$, ส่วนตั้งฉากนี้เป็น $\{0\}$; ดังนั้น $y - x = 0$. จึง $y = x \in \operatorname{dom}(T)$. นั่นคือ $\operatorname{dom}(T^*) \subset \operatorname{dom}(T)$; ผกผันกับ $T \subset T^*$ ให้ $T = T^*$.

สรุป: ตัวดำเนินการสมมาตรจะเป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัวเมื่อกราฟปิดและตัวดำเนินการ $T \pm i$ มีพิสัยเต็ม; เอกลักษณ์นอร์มเป็นตัวเชื่อมทั้งสามข้อ. □

ทฤษฎีบท 9.3.3: ตัวผกผันของตัวดำเนินการ $-\Delta + I$ เป็นตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวก

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เปิด มีขอบเขต และมีขอบลิพชิทซ์. สำหรับ $f \in L^2(\Omega)$ ให้ $Bf = u$ เป็นฟังก์ชันเดียวใน $H_0^1(\Omega)$ ซึ่ง

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \int_\Omega u\bar{v} = \int_\Omega f\bar{v} \quad \text{สำหรับทุก } v \in H_0^1(\Omega).$$

แล้ว $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขต ผูกพันในตัว บวก หนึ่งต่อหนึ่ง และกระชับ. ยิ่งไปกว่านั้น $\|B\| \le 1$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมกับรูปแบบพลังงานที่บวกพจน์ $u\bar{v}$; ความกระชับมาจากการฝังตัว $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทเรลลิช–คอนดราคอฟ.

1. **มีคำตอบเดียว.** รูปแบบ

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \int_\Omega u\bar{v}$$

เป็นเซสควิลิเนียร์ มีขอบเขต และเป็นโคเออร์ซีฟบน H_0^1 เพราะ $a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$. บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม (บทการลู่เข้าแบบอ่อนและค่าต่ำสุด) ให้ u เพียงตัวเดียวสำหรับแต่ละ f. จึงได้ B เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น. เพื่อดูว่ามีขอบเขต ให้ $u = Bf$; จาก $a(u,u) = \langle f, u\rangle$ และ $|\langle f,u\rangle| \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$ กับ $\|u\|_{L^2} \le a(u,u)^{1/2}$ ได้ $a(u,u) \le \|f\|_{L^2} a(u,u)^{1/2}$ จึง $a(u,u)^{1/2} \le \|f\|_{L^2}$ (หารด้วย $a(u,u)^{1/2}$ เมื่อไม่เป็นศูนย์; ถ้าเป็นศูนย์ก็ชัดเจน) และ $\|Bf\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$. ดังนั้น $\|B\| \le 1$.

2. **สมมาตรและบวก.** สำหรับ $f, g \in L^2$, นิยามของ B ให้

$$a(Bf, Bg) = \langle f, Bg\rangle, \qquad a(Bg, Bf) = \langle g, Bf\rangle.$$

เพราะ a สมมาตร, $a(Bf,Bg) = \overline{a(Bg,Bf)}$; ดังนั้น $\langle f, Bg\rangle = \overline{\langle g, Bf\rangle} = \langle Bf, g\rangle$. จึง $B^* = B$. แล้ว

$$\langle Bf, f\rangle = \langle f, Bf\rangle = a(Bf,Bf) = \|Bf\|_{H^1}^2 \ge 0,$$

โดยใช้ $B^* = B$ ในสมการแรก. ตัว B จึงเป็นตัวดำเนินการเป็นบวก.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-21

3. **หนึ่งต่อหนึ่ง.** ถ้า $Bf = 0$ แล้ว $a(0, v) = 0 = \int f\overline{v}$ ทุก $v \in H_0^1$. เพราะ H_0^1 หนาแน่นใน L^2, $f = 0$.

4. **กระชับ.** ตัวดำเนินการ B แยกเป็นการส่ง $f \mapsto u$ ใน H_0^1 แล้วฝัง $H_0^1 \hookrightarrow L^2$. การฝังตัวแบบกระชับนี้เป็นทฤษฎีบทเรลลิช–คอนดราคอฟบนโดเมนมีขอบเขต (เราไม่พิสูจน์ในบทนี้), และการส่ง $f \mapsto u$ มีขอบเขต. องค์ประกอบของการส่งที่มีขอบเขตกับการฝังตัวแบบกระชับจึงกระชับ.

สรุป: $B = (-\Delta + I)^{-1}$ เป็นตัวดำเนินการเป็นบวกกระชับและหนึ่งต่อหนึ่ง; ความกระชับมาจากการฝังตัวแบบกระชับของ H_0^1 ลงใน L^2. □

ทฤษฎีบท 9.3.4: ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลเป็นตัวดำเนินการปิดและผูกพันในตัว

ให้ Ω เป็นโดเมนมีขอบเขตและมีขอบลิพชิทซ์ และให้ $B = (-\Delta + I)^{-1}$ เป็นตัวผกผันในทฤษฎีบทก่อนหน้า. นิยาม

$$\operatorname{dom}(A) := \operatorname{ran}(B), \qquad A(Bf) := f - Bf.$$

แล้ว A เป็นตัวดำเนินการปิด นิยามบนเซตหนาแน่น และผูกพันในตัว. สำหรับ $u = Bf$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \int_\Omega (f - u)\overline{v} \quad (v \in H_0^1),$$

ดังนั้น $Au = f - u = -\Delta u$ ในความหมายอ่อน. เราเรียก A ว่า**ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล** (Dirichlet Laplacian); โดเมนอยู่ใน $H_0^1(\Omega)$ จึงมีเทรซศูนย์บนขอบ คือ**เงื่อนไขขอบแบบดีรีเคล** (Dirichlet condition).

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน B ในฐานลักษณะเฉพาะของมัน; A กลายเป็นตัวดำเนินการแนวทแยงที่มีค่า $1/\mu_n - 1$. โดเมนถูกกำหนดด้วยเงื่อนไขผลรวมถ่วงน้ำหนักที่ทำให้การกระทำมีขอบเขต. ความสมมาตรและความปิดตรวจได้ทีละพิกัด.

1. **ฐานลักษณะเฉพาะของ B.** จากทฤษฎีบทก่อนหน้า B กระชับ ผูกพันในตัว เป็นบวก และหนึ่งต่อหนึ่ง. ทฤษฎีบทสเปกตรัมให้ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (e_n) และค่า $\mu_n > 0$ ซึ่ง $Be_n = \mu_n e_n$ และ $\mu_n \to 0$. เพราะ B หนึ่งต่อหนึ่ง ไม่มีค่า $\mu_n = 0$; ระบบ (e_n) จึงครบใน H. ทุก $x \in H$ เขียน $x = \sum_n c_n e_n$ กับ $c_n := \langle x, e_n\rangle$. เพราะ B ผูกพันในตัวและหนึ่งต่อหนึ่ง,
$$(\operatorname{ran} B)^\perp = \ker B^* = \ker B = \{0\},$$
ดังนั้น $\operatorname{dom}(A) = \operatorname{ran}(B)$ หนาแน่นใน H. เพราะ B หนึ่งต่อหนึ่ง, $A(Bf) = f - Bf$ นิยามได้ดี.

2. **โดเมน.** $x \in \operatorname{ran}(B)$ ก็ต่อเมื่อ $x = By = \sum_n \mu_n d_n e_n$ สำหรับ $y = \sum_n d_n e_n \in L^2$, นั่นคือ $c_n = \mu_n d_n$ กับ $\sum_n |d_n|^2 < \infty$. เงื่อนไขนี้สมมูลกับ
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{\mu_n^2} < \infty.$$
บนเวกเตอร์ฐาน $Ae_n = (1/\mu_n - 1)e_n$.

3. **สมมาตร.** ให้ $\alpha_n := 1/\mu_n - 1 \in \mathbb{R}$. สำหรับ $x, y \in \operatorname{dom}(A)$,
$$\langle Ax, y\rangle = \sum_n \alpha_n c_n \overline{d_n} = \langle x, Ay\rangle,$$
โดยอนุกรมลู่เพราะ Cauchy–Schwarz กับ $\sum |\alpha_n c_n|^2$ และ $\sum |\alpha_n d_n|^2$ มีขอบเขต.

4. **ปิด.** ให้ $x_m \in \operatorname{dom}(A)$, $x_m \to x$ และ $Ax_m \to z$. เขียน $c_{m,n} = \langle x_m, e_n\rangle$. สำหรับแต่ละ n, $\langle Ax_m, e_n\rangle = \alpha_n c_{m,n} \to \langle z, e_n\rangle =: z_n$. ดังนั้น $c_{m,n} \to c_n := \langle x, e_n\rangle$ และ $z_n = \alpha_n c_n$. เพราะกราฟลู่เข้า,

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

$\sup_m(\|x_m\|^2 + \|Ax_m\|^2) < \infty$. ตัดทอนที่ N (อสมการเบสเซลกับ x_m และ Ax_m ให้ $\sum_{n\le N}(1+\alpha_n^2)|c_{m,n}|^2 \le \|x_m\|^2 + \|Ax_m\|^2$):

$$\sum_{n=1}^{N}(1+\alpha_n^2)|c_n|^2 = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(1+\alpha_n^2)|c_{m,n}|^2 \le \sup_m(\|x_m\|^2+\|Ax_m\|^2) < \infty.$$

ตั้ง $a_n := 1/\mu_n$, จึง $\alpha_n = a_n - 1$ และ

$$1+\alpha_n^2 = 1+(a_n-1)^2 \ge \frac{a_n^2}{2},$$

เพราะผลต่างข้างขวากับข้างซ้ายเทียบเท่ากับ $\frac{1}{2}(a_n-2)^2 \ge 0$. ดังนั้น $\sum_n |c_n|^2/\mu_n^2 \le 2\sum_n(1+\alpha_n^2)|c_n|^2 < \infty$. ให้ $N\to\infty$ ได้ $x \in \mathrm{dom}(A)$ และ $Ax = z$. กราฟจึงปิด.

5. **ผูกพันในตัว.** ให้ $y \in \mathrm{dom}(A^*)$. สำหรับทุก $x \in \mathrm{dom}(A)$, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. เลือก $x = e_n$ (ซึ่งอยู่ในโดเมน): $\alpha_n\langle e_n, y\rangle = \langle e_n, A^*y\rangle$. ดังนั้นถ้า $y = \sum_n d_n e_n$ และ $A^*y = \sum_n z_n e_n$, การคอนจูเกตสมการพิกัดให้ $z_n = \alpha_n d_n$. เพราะ $y, A^*y \in H$, $\sum_n(1+\alpha_n^2)|d_n|^2 < \infty$. อสมการข้างต้นจึงให้ $\sum_n |d_n|^2/\mu_n^2 < \infty$; ดังนั้น $y \in \mathrm{dom}(A)$ และ $Ay = A^*y$. ผกผันกับ $A \subset A^*$ ให้ $A = A^*$.

6. **สมการอ่อน.** สำหรับ $u = Bf$ และ $v \in H_0^1$, นิยามของ B ให้

$$\int \nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \int u\overline{v} = \int f\overline{v}.$$

ย้ายพจน์ $u\overline{v}$ ไปขวาได้ $\int \nabla u\cdot\overline{\nabla v} = \int (f-u)\overline{v}$. เพราะ $Au = f - u$, นี่คือสมการอ่อน $-\Delta u = Au$.

สรุป: ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลคือ $B^{-1} - I$; ในฐานลักษณะเฉพาะของ B มันเป็นตัวดำเนินการแนวทแยงจริง ปิด และผูกพันในตัว. □

ทำไมต้องมี $+I$

บนโดเมนมีขอบเขต อสมการปวงกาเรทำให้รูป $\int_\Omega |\nabla u|^2$ โคเออร์ซีฟบน H_0^1 อยู่แล้ว. การเติม $+I$ ทำให้รูป $a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2$ ตรงกับนอร์ม H^1 และได้ขอบเขตง่าย ๆ $\|B\| \le 1$ สำหรับ $B = (-\Delta + I)^{-1}$. การเลื่อนสเปกตรัมนี้ไม่เปลี่ยนเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และเลื่อนค่าลักษณะเฉพาะ λ ของ $-\Delta$ ไปเป็น $\lambda + 1$ ของ $-\Delta + I$; ตัวผกผันจึงมีค่าลักษณะเฉพาะ $1/(\lambda+1)$.

ตัวอย่าง: ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลหนึ่งมิติและค่าลักษณะเฉพาะ

บน $(0,1)$ ตัวดำเนินการ $B = (-\Delta + 1)^{-1}$ มี $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และ

$$Be_n = \frac{1}{n^2\pi^2 + 1}e_n.$$

ดังนั้น $A = B^{-1} - I$ มีค่า $n^2\pi^2$. ค่าแรกสามค่าคือ

$$9.86960440, \qquad 39.47841760, \qquad 88.82643961.$$

ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน. ความกระชับของ B มาจากการฝังตัวแบบกระชับของ H_0^1 ลงใน L^2. เพราะ B กระชับและหนึ่งต่อหนึ่ง ค่าลักษณะเฉพาะบวกของมันลู่สู่ศูนย์; ค่าลักษณะเฉพาะของ $A = B^{-1} - I$ จึงเพิ่มไม่จำกัดและแยกกัน. เราไม่อ้างทฤษฎีบทสเปกตรัมทั่วไปสำหรับตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต; ในตัวอย่างนี้เราใช้ฐานลักษณะเฉพาะที่ได้จาก B ซึ่งพิสูจน์แล้ว.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ตัวอย่าง: ดิแรกเดลตาที่จุดครึ่งไม่ใช่ภาพของตัวดำเนินการอินทิกรัล (ผู้เรียบเรียง)

ให้ $\Omega = (0,1)$ และ $X = H^1_0(0,1)$. ฟังก์ชันนัล $\delta_{1/2}(v) := v(1/2)$ ต่อเนื่องบน X เพราะ

$$|v(1/2)| = \left| \int_0^{1/2} v'(s)\, ds \right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|v'\|_{L^2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1}.$$

ไม่มี $f \in L^2$ ที่ทำให้ $\delta_{1/2}(v) = \int_\Omega f \bar{v}$ สำหรับทุก $v \in H^1_0$. ถ้ามี, สำหรับฟังก์ชันทดสอบ v ที่ตัวรองรับไม่แตะจุด $1/2$ จะได้ $\int f\bar{v} = 0$; ดังนั้น $f = 0$ เกือบทุกแห่ง (ฟังก์ชันทดสอบเช่นนี้หนาแน่นใน $L^2(0,1)$ เพราะจุดเดียวมีการวัดศูนย์) ซึ่งขัดกับ $\delta_{1/2}(v) \neq 0$ สำหรับฟังก์ชันบางตัวที่ไม่เป็นศูนย์ ณ จุดนั้น. นี่คือเหตุที่ทฤษฎีบทก่อนหน้ากล่าวเพียงว่าการส่ง $f \mapsto u$ ต่อเนื่องและหนึ่งต่อหนึ่ง ไม่ได้กล่าวว่าพิสัยคือ H^{-1} ทั้งหมด. ตัวผกผันที่อ่อนไม่สามารถแทน “การอ่านค่าที่จุดหนึ่ง” ได้.

ข้อควรระวัง

ข้อความ “ตัวผกผันของลาปลาซ” ต้องระบุโดเมนและเงื่อนไขขอบเสมอ. บนทั้งเส้นตรง ตัวผกผันไม่กระชับเพราะไม่มีโดเมนมีขอบเขต; บนช่วงเปิดที่มีขอบ แต่ใช้เงื่อนไขขอบต่างกัน สเปกตรัมและตัวผกผันก็ต่างกัน. ตัวอย่างดิแรกเดลตาข้างต้นเตือนว่าแม้ฟังก์ชันนัลต่อเนื่องทุกตัวบน H^1_0 ไม่จำเป็นต้องเป็นภาพของฟังก์ชัน L^2 ผ่านตัวผกผัน.

สรุปใจความ

- ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขตต้องมีโดเมน; โดเมนต้องหนาแน่นเพื่อนิยามตัวผูกพัน.
- ตัวดำเนินการสมมาตรมี $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ บนโดเมน; ตัวดำเนินการผูกพันในตัวต้องมี $T = T^*$ รวมทั้งโดเมน.
- ตัวผูกพันของตัวดำเนินการที่นิยามบนเซตหนาแน่นเป็นตัวดำเนินการปิด; เกณฑ์พิสัยใช้ตรวจความเป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัว.
- ตัวผกผัน $B = (-\Delta + 1)^{-1}$ บนโดเมนมีขอบเขตเป็นตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกและหนึ่งต่อหนึ่ง; $A = B^{-1} - I$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลที่ปิดและผูกพันในตัว.
- บน $(0,1)$ ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $n^2\pi^2$; ตัวผกผันมีค่า $1/(n^2\pi^2+1)$ และกระชับ.

อ่านต่อ

เราเห็นแล้วว่าตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคลมี “โหมด” ที่แยกจากกัน แม้ตัวมันเองไม่มีขอบเขต. คำถามต่อไปคือ: เมื่อโดเมนเป็นกราฟจำกัด ซึ่งทุกอย่างเป็นเมทริกซ์ เราจะใช้โหมดเหล่านี้แบ่งกลุ่มข้อมูลได้อย่างไร? และเมื่อโดเมนเป็นสายต่อเนื่อง คำตอบของลาปลาซให้ความถี่ฮาร์มอนิกตามสูตรใด? หัวข้อสุดท้ายจะตอบทั้งสองคำถามโดยแยกกรณีมิติจำกัดออกจากกรณีไม่จำกัดอย่างชัดเจน.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้ $Tf = f'$ บน $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$. จงใช้ลำดับ $f_n(x) = \sin(n\pi x)/\|\sin(n\pi x)\|$ เพื่อแสดงว่า T ไม่มีขอบเขต. อัตราส่วน $\|Tf_n\|/\|f_n\|$ เท่ากับเท่าไร?
2. ให้ $T = i\,d/dx$ บน $\mathrm{dom}(T) = \{f \in H^1(0,1) : f(0) = f(1) = 0\}$. จงแสดงว่า T สมมาตร. จงหาว่า T^*

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

มีโดเมนกว้างกว่าอย่างไร และเพราะเหตุใด T จึงไม่ผูกพันในตัว.

3. จงพิสูจน์ว่าถ้า T นิยามบนเซตหนาแน่น แล้ว T^* เป็นตัวดำเนินการปิด.

4. ให้ $\Omega = (0,1)$ และ $\delta_{1/2}(v) = v(1/2)$. จงแสดงว่า $\delta_{1/2}$ ต่อเนื่องบน $H^1_0(0,1)$ แต่ไม่เป็นภาพของ $v \mapsto \int_0^1 f\overline{v}$ สำหรับ $f \in L^2$.

5. ให้ $B = (-\Delta + 1)^{-1}$ บน $(0,1)$. จงหาค่าลักษณะเฉพาะสามค่าแรกของ B และค่าลักษณะเฉพาะสามค่าแรกของ $A = B^{-1} - I$. ตรวจว่าค่าเหล่านั้นสัมพันธ์กันตาม $\lambda_A = 1/\mu_B - 1$.

6. ให้ T เป็นตัวดำเนินการที่ปิดและสมมาตรบนเซตหนาแน่น. จงอธิบายว่าทำไมการพิสูจน์ว่า $T = T^*$ ต้องตรวจทั้งโดเมน ไม่ใช่เพียง $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ บนเวกเตอร์ทดสอบ.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **อนุพันธ์ไม่มีขอบเขต.** ให้ $f_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$; $\|f_n\|_{L^2} = 1$. แล้ว $f_n' = n\pi\sqrt{2}\cos(n\pi x)$ และ $\|f_n'\|_{L^2} = n\pi$. อัตราส่วนคือ $n\pi$; ที่ $n = 10$ ได้ 31.41592654. ลำดับอัตราส่วนโตไม่จำกัด จึงไม่มีค่าคงตัว C ซึ่ง $\|Tf\| \le C\|f\|$ ทุก f.

2. **โมเมนตัมกับขอบดีรีเคล.** สำหรับ f, g ที่หายที่ปลายทั้งสอง, การแยกส่วนให้

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 if'(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f(x)\overline{ig'(x)}\,dx = \langle f, Tg\rangle.$$

ดังนั้น T สมมาตร. ตัวผูกพัน T^* นิยามบน $H^1(0,1)$ ทั้งหมด (ไม่มีเงื่อนไขค่าขอบ) และ $T^*g = ig'$. ฟังก์ชันคงที่ $g = 1$ อยู่ในโดเมนของ T^* แต่ไม่อยู่ในโดเมนของ T; โดเมนจึงไม่เท่ากัน และ $T \neq T^*$.

3. **ความปิดของตัวผูกพัน.** ให้ $y_n \in \mathrm{dom}(T^*)$, $y_n \to y$, $T^*y_n \to z$. สำหรับ $x \in \mathrm{dom}(T)$,

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_n \langle Tx, y_n\rangle = \lim_n \langle x, T^*y_n\rangle = \langle x, z\rangle.$$

สมการนี้แสดงว่า $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ และ $T^*y = z$. กราฟจึงปิด.

4. **ดิแรกเดลตา.** ขอบเขต $|v(1/2)| \le (1/\sqrt{2})\|v'\|_{L^2}$ มาจากทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัสและอสมการโคชี–ชวาร์ซ; จึงต่อเนื่องบน H^1_0. สมมติว่า $\delta_{1/2}(v) = \int_0^1 f\overline{v}$ สำหรับ $f \in L^2$ บางตัว และเลือก $v \in C_c^\infty(0,1)$ ที่ตัวรองรับไม่แตะ $1/2$. แล้ว

$$0 = \delta_{1/2}(v) = \int_0^1 f(x)\overline{v(x)}\,dx.$$

เพราะ v เช่นนั้นมีอยู่มากมายและหนาแน่นใน L^2 บนเซตที่ห่างจาก $1/2$, $f = 0$ เกือบทุกแห่งบน $(0,1)$. แต่แล้ว $\int_0^1 f\overline{v} = 0$ ขณะที่ $\delta_{1/2}(v) = v(1/2) \neq 0$ สำหรับบาง v; ขัดแย้ง.

5. **ค่าลักษณะเฉพาะคู่กัน.** จาก $Be_n = 1/(n^2\pi^2 + 1)e_n$ ได้

$$\mu_1 = 0.09199967, \quad \mu_2 = 0.02470452, \quad \mu_3 = 0.01113258,$$

และ

$$\lambda_1 = 9.86960440, \quad \lambda_2 = 39.47841760, \quad \lambda_3 = 88.82643961.$$

ตรวจความสัมพันธ์: $1/0.09199967 - 1 = 9.8696044$, และเช่นเดียวกันสำหรับอีกสองค่า.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. **โดเมนสำคัญ.** การมี $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ บนโดเมนของ T แสดงเพียง $T \subset T^*$. การจะเป็น $T = T^*$ ต้องพิสูจน์ว่าทุก $y \in \mathrm{dom}(T^*)$ อยู่ใน $\mathrm{dom}(T)$ ด้วย. ตัวอย่าง $T = i\,d/dx$ ที่มีเงื่อนไขขอบดีรีเคลแสดงว่าโดเมนของ T^* กว้างกว่าจริง; ถ้าไม่ตรวจโดเมน เราจะสรุปผิดว่า T ผูกพันในตัว.

9.4 ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟและโหมดการสั่น

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในหัวข้อก่อน เราใช้ตัวผกผันกระชับของลาปลาซเพื่อได้ฐานของโหมดสำหรับโดเมนต่อเนื่อง. ในหัวข้อนี้ เราจะทำสองสิ่ง. อย่างแรก ใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมมิติจำกัดกับกราฟซึ่งมีจุดยอดจำนวนจำกัด: ทุกอย่างกลายเป็นเมทริกซ์สมมาตรจริง และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะตัวที่สองบอกวิธีแบ่งกราฟออกเป็นสองกลุ่ม. อย่างที่สอง กลับไปที่สายสั่น ซึ่งเป็นโดเมนต่อเนื่องหนึ่งมิติ และเขียนความถี่ฮาร์มอนิกเป็น $f_n = nf_1$ อย่างชัดเจน. ภาพที่ควรจำคือ: กรณีกราฟเป็นมิติจำกัดและพิสูจน์ได้ครบ; กรณีสายใช้ตัวผกผันกระชับที่พิสูจน์แล้วในหัวข้อก่อน; ส่วนทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการไม่มีขอบเขตทั่วไปเป็นเพียงการอ้างอิงที่เราระบุไว้ต่างหาก.

กลับไปที่สถานการณ์ที่สองของบท: พิกเซลแต่ละจุดเป็นจุดยอดของกราฟ และน้ำหนักของเส้นเชื่อมบอกว่าสีสองจุดใกล้กันเพียงใด. เราต้องการเวกเตอร์หนึ่งตัวที่ให้ค่าคล้ายกันกับพิกเซลในกลุ่มเดียวกัน และค่าต่างกันกับอีกกลุ่ม. ในหัวข้อนี้ ทุกกราฟมีจุดยอดจำนวนจำกัด; เราจะไม่ใช้ผลกราฟนี้เป็นหลักฐานสำหรับข้อความอนันต์มิติใด ๆ.

นิยาม 9.4.1: กราฟถ่วงน้ำหนักและตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ

ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟไม่ระบุทิศทางเชิงง่าย (simple undirected graph) ที่มีจุดยอด $1, \dots, n$ และให้ $w_{ij} = w_{ji} > 0$ เป็นน้ำหนักของเส้นเชื่อม ij; ถ้าไม่มีเส้นเชื่อม ให้ $w_{ij} = 0$. เราเรียก G พร้อมน้ำหนักว่า**กราฟถ่วงน้ำหนัก** (weighted graph). ดีกรีของจุดยอด i คือ $d_i := \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$. ให้ $W = (w_{ij})$ เป็นเมทริกซ์ประชิดและ $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$. **ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ** คือ

$$L := D - W.$$

อ่านแบบเข้าใจง่าย

เขียนการกระทำทีละจุดยอดได้ง่ายมาก:

$$(Lx)_i = d_i x_i - \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_i - x_j).$$

แต่ละเทอมบอกว่า “จุดยอด i ต่างจากเพื่อนบ้าน j แค่ไหน” คูณด้วยน้ำหนักของเส้นเชื่อม. เมื่อรวมทุกจุดยอด จะได้พลังงาน

$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{i<j} w_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0.$$

พลังงานเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ ทุกเส้นเชื่อม นั่นคือ x คงที่บนแต่ละองค์ประกอบเชื่อมโยง. เวกเตอร์คงที่จึงอยู่ในเคอร์เนลของ L เสมอ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 9.4.1: สเปกตรัมของตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ

ให้ G เป็นกราฟถ่วงน้ำหนักเชื่อมโยงด้วยเส้นเชื่อมที่มีน้ำหนักบวก และมี $n \geq 2$ จุดยอด; ให้ L เป็นตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ. แล้ว L มีค่าลักษณะเฉพาะจริง

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

และมีฐานเชิงตั้งฉากปรกติ $v_1, \ldots, v_n$ ของ $\mathbb{R}^n$ ซึ่ง $Lv_k = \lambda_k v_k$ และ $v_1 = \mathbf{1}/\sqrt{n}$. ยิ่งไปกว่านั้น

$$\lambda_2 = \min_{\substack{x \perp \mathbf{1} \\ x \neq 0}} \frac{x^{\mathsf{T}} L x}{x^{\mathsf{T}} x}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** มอง L เป็นตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัวบนปริภูมิมิติจำกัด แล้วใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมของหัวข้อแรก; พลังงานที่ไม่ติดลบให้ค่าลักษณะเฉพาะไม่ติดลบ และความเชื่อมโยงบังคับให้เคอร์เนลมีมิติหนึ่ง.

1. **ฐานลักษณะเฉพาะ.** เมทริกซ์ L เป็นจริงและสมมาตร เพราะ D และ W สมมาตร. มอง L เป็นตัวดำเนินการบน $\mathbb{C}^n$; มันกระชับ (มิติจำกัด) และผูกพันในตัว. ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัวให้ฐานเชิงตั้งฉากปรกติและค่าลักษณะเฉพาะจริง. เพราะ L มีค่าจริง เราจึงเลือกเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะให้เป็นจำนวนจริงได้.

2. **ค่าลักษณะเฉพาะไม่ติดลบ.** จากเอกลักษณ์พลังงานในกรอบข้างต้น, $x^{\mathsf{T}} L x \geq 0$ ทุก x. ถ้า $Lx = \lambda x$ กับ $x \neq 0$ แล้ว $\lambda \|x\|^2 = x^{\mathsf{T}} L x \geq 0$. ดังนั้น $\lambda_k \geq 0$.

3. **ศูนย์และความเชื่อมโยง.** เพราะ $L\mathbf{1} = 0$, ค่า 0 เป็นค่าลักษณะเฉพาะและ $\mathbf{1}/\sqrt{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย. ถ้า $Lx = 0$ แล้ว $x^{\mathsf{T}} L x = 0$; จากผลบวกของเทอมที่ไม่ติดลบ, $x_i = x_j$ ทุกเส้นเชื่อม. เพราะกราฟเชื่อมโยง, x คงที่ทุกจุดยอด. เคอร์เนลจึงมีมิติหนึ่ง และ $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$.

4. **สูตรเรย์ลี.** เขียน $x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$. ถ้า $x \perp \mathbf{1}$ แล้ว $c_1 = 0$. ดังนั้น

$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} c_k^2 = \lambda_2 \|x\|^2.$$

   เลือก $x = v_2$ ให้ความเท่ากัน. สูตรขั้นต่ำจึงตามมา.

สรุป: ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟมีสเปกตรัมจริงไม่ติดลบ; ความเชื่อมโยงทำให้เคอร์เนลมีมิติหนึ่ง และ λ_2 คือผลหารเรย์ลีที่ต่ำที่สุดบนเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับค่าคงที่. □

เราเรียกเวกเตอร์หนึ่งหน่วย v_2 ที่คู่กับ λ_2 ว่า**เวกเตอร์ฟีดเลอร์** (Fiedler vector). ถ้าองค์ประกอบของ v_2 ไม่เป็นศูนย์ เราแบ่งจุดยอดเป็นสองกลุ่มตามเครื่องหมาย: $S_+ = \{i : v_2(i) > 0\}$ และ $S_- = \{i : v_2(i) < 0\}$. ในตัวอย่างต่อไปนี้ การแบ่งกลุ่มนี้ตรงกับสองกลุ่มที่เห็นด้วยตา. แต่เราไม่ควรอ่านมากเกินกว่านั้น.

ข้อควรระวัง

การแบ่งกลุ่มด้วยเครื่องหมายของเวกเตอร์ฟีดเลอร์เป็นวิธีฮิวริสติก ไม่ใช่การพิสูจน์ว่าตัดกราฟได้ดีที่สุด. λ_2 วัดพลังงานของการเชื่อมข้ามกลุ่มในทิศที่เลือก แต่ไม่ได้บอกว่าการแบ่งกลุ่มที่ดีที่สุดของกราฟทั่วไปคืออะไร. ถ้าองค์ประกอบเป็นศูนย์ ต้องมีกฎจัดกลุ่มล่วงหน้า; ในตัวอย่างของเราไม่มีองค์ประกอบเป็นศูนย์. ข้อสรุปทั้งหมดในหัวข้อนี้เป็นมิติจำกัด และไม่ใช่หลักฐานสำหรับทฤษฎีบทอนันต์มิติ.

ร่างบันทึก · Preprint · 2026-10-21

ตัวอย่าง: กราฟสองสามเหลี่ยมที่เชื่อมด้วยสะพานเบา

ให้จุดยอด $1, 2, 3$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีเส้นเชื่อมน้ำหนัก 1 ทั้งสามเส้น และจุดยอด $4, 5, 6$ เป็นอีกสามเหลี่ยมหนึ่งที่มีน้ำหนัก 1 ทั้งสามเส้น. เชื่อมจุดยอด 3 กับ 4 ด้วยเส้นน้ำหนัก 0.15. ดีกรีคือ

$$(d_1, \dots, d_6) = (2,\ 2,\ 2.15,\ 2.15,\ 2,\ 2).$$

เมทริกซ์ลาปลาซคือ

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2.15 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.15 & 2.15 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ค่าลักษณะเฉพาะเรียงจากน้อยไปมากคือ

$$0, \qquad 0.0935617584, \qquad 3, \qquad 3, \qquad 3, \qquad 3.2064382416.$$

เวกเตอร์ฟีดเลอร์หนึ่งหน่วย (เลือกเครื่องหมายให้องค์ประกอบแรกเป็นบวก) คือ

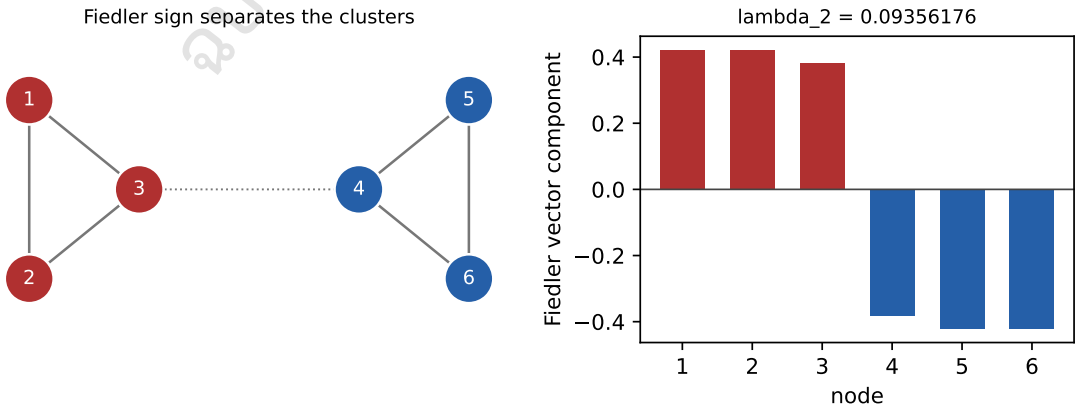
$$v_2 = (0.4209542980,\ 0.4209542980,\ 0.3815690737,\\ -0.3815690737,\ -0.4209542980,\ -0.4209542980).$$

เครื่องหมายแบ่งจุดยอดเป็น $\{1, 2, 3\}$ กับ $\{4, 5, 6\}$ ซึ่งตรงกับสองสามเหลี่ยม. เพราะ $\|v_2\| = 1$,

$$v_2^{\mathsf{T}} L v_2 = \lambda_2 = 0.0935617584.$$

ถ้าเราแบ่งแบบหยาบ ๆ ด้วยเวกเตอร์ $(1, 1, 1, -1, -1, -1)/\sqrt{6}$ พลังงานจะเป็น 0.1 ซึ่งมากกว่า λ_2; เวกเตอร์ฟีดเลอร์จึงหาทิศที่ประหยัดกว่าการตัดตรง ๆ ระหว่างสองสามเหลี่ยม. ตัวเลขทั้งหมดในตัวอย่างนี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 9.2: กราฟสองสามเหลี่ยมที่เชื่อมด้วยสะพานน้ำหนัก 0.15 และเวกเตอร์ฟีดเลอร์. เครื่องหมายขององค์ประกอบแยกจุดยอดออกเป็นสองกลุ่ม; แท่งทางขวาแสดงค่าพิกัดพร้อมเครื่องหมายของแต่ละจุดยอด.

9.4.1 โหมดของสายและความถี่ฮาร์มอนิก

กลับไปที่สายซึ่งปลายทั้งสองถูกยึดไว้. ให้ความยาวเป็น L, ความตึงเป็น T และความหนาแน่นเชิงเส้นเป็น μ. การสั่นเล็ก ๆ ของสายอธิบายด้วยสมการคลื่น

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad c := \sqrt{T/\mu},$$

พร้อมเงื่อนไขขอบ $u(0,t) = u(L,t) = 0$. ลองหาคำตอบที่แยกตัวประกอบเป็น $u(x,t) = v(x)\cos(\omega t)$. แทนลงในสมการแล้วหารด้วย $\cos(\omega t)$ ได้

$$-v'' = \frac{\omega^2}{c^2} v, \qquad v(0) = v(L) = 0.$$

คำตอบที่ไม่เป็นศูนย์คือ $v_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ กับ $\omega_n = n\pi c/L$, $n = 1, 2, \dots$. เราเรียกคำตอบที่แยกตัวประกอบเช่นนี้ว่า**โหมดสั่น** (standing mode)ของสาย. ความถี่ที่ได้ยินคือ

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = n f_1.$$

สำหรับ $L = 0.65$ เมตร, $T = 70$ นิวตัน และ $\mu = 0.004$ กิโลกรัมต่อเมตร, ความถี่หกโหมดแรกคือ

$$101.7596658, \quad 203.5193316, \quad 305.2789974,$$

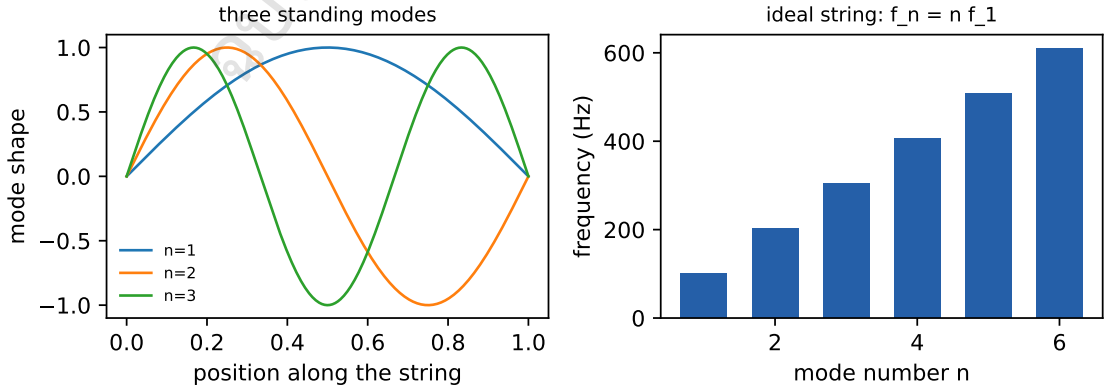
$$407.0386632, \quad 508.7983291, \quad 610.5579949 \text{ เฮิรตซ์}.$$

อัตราส่วน f_n/f_1 เท่ากับ n ทุก n; ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ทำไมโหมดจึงมีจำนวนนับได้? ให้ $A = -d^2/dx^2$ บนโดเมน $H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ และให้ $B = (A+1)^{-1}$. จากหัวข้อก่อน B เป็นตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกและหนึ่งต่อหนึ่ง; ค่าลักษณะเฉพาะของมันคือ

$$\mu_n = \frac{1}{(n\pi/L)^2 + 1},$$

และ $\mu_n \to 0$. ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการกระชับให้ฐานเชิงตั้งฉากปรกติของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ และเพราะ $\lambda_n = 1/\mu_n - 1$ เราได้ $\lambda_n \to \infty$. ความนับได้และความเป็นจำนวนเท่า ๆ ของความถี่จึงมาจากสเปกตรัมของตัวผกผันกระชับ ไม่ใช่จากการเดาสูตร.



รูปที่ 9.3: โหมดสั่นสามโหมดแรกของสายในอุดมคติ และความถี่ $f_n = n f_1$ ของแบบจำลอง. แกนขวาใช้พารามิเตอร์ $L = 0.65$ เมตร, $T = 70$ นิวตัน และ $\mu = 0.004$ กิโลกรัมต่อเมตร.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): รูปตัวดำเนินการคูณสำหรับตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต

ให้ A เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัวซึ่งอาจไม่มีขอบเขตบนปริภูมิฮิลเบิร์ต H. ทฤษฎีบทสเปกตรัมในรูปตัวดำเนินการคูณกล่าวว่า มีปริภูมิวัด (Ω, Σ, μ), ฟังก์ชันจริงที่วัดได้ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ และตัวดำเนินการยูนิแทรี $U : H \to L^2(\mu)$ ซึ่ง

$$x \in \operatorname{dom}(A) \iff f \cdot Ux \in L^2(\mu), \qquad UAU^{-1}\varphi = f\varphi$$

บนโดเมน $\{\varphi \in L^2(\mu) : f\varphi \in L^2(\mu)\}$. นอกจากนี้ยังมีการวัดสเปกตรัม E เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle E_\lambda x, y\rangle \quad (x \in \operatorname{dom}(A),\ y \in H),$$

และสำหรับฟังก์ชันบอเรล h ที่นิยามบนสเปกตรัม, $h(A)$ เป็นตัวดำเนินการผูกพันในตัวบนโดเมนที่เหมาะสม. เราใช้ข้อความนี้เป็นการอ้างอิงจาก Werner 2007, ทฤษฎีบท VII.3.1 และ VII.3.2; **ไม่พิสูจน์ในบทนี้**. ผลกราฟในหัวข้อนี้เป็นมิติจำกัดและไม่ใช่หลักฐานสำหรับทฤษฎีบทนี้.

9.4.2 กลับไปที่คำถามเปิดบท

คำถามแรกถามว่าทำไมสายจึงมีโหมดเป็นจำนวนนับได้ และทำไมความถี่เรียงเป็นจำนวนเท่า ๆ ของความถี่มูลฐาน. คำตอบคือตัวผกผัน $B = (A + 1)^{-1}$ กระชับ; สเปกตรัมของมันจึงเป็นลำดับ $\mu_n \downarrow 0$ พร้อมฐานลักษณะเฉพาะ. เมื่อกลับไปที่ A เราได้ $\lambda_n = 1/\mu_n - 1 \to \infty$ และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ $\sin(n\pi x/L)$. ความถี่คือ $f_n = nf_1$ เพราะ ω_n เป็นสัดส่วนกับ n. ความนับได้มาจากความกระชับของตัวผกผัน ไม่ได้มาจากสมมติฐานว่าสายจริงสั่นสะอาดอย่างสมบูรณ์.

คำถามที่สองถามว่าเวกเตอร์หนึ่งตัวจากกราฟบอกกลุ่มได้อย่างไร. ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟเป็นเมทริกซ์จริงสมมาตร; ทฤษฎีบทสเปกตรัมให้ฐานตั้งฉาก $v_1, \dots, v_n$. เวกเตอร์ v_1 เป็นค่าคงที่และไม่แยกอะไร; เวกเตอร์ v_2 เป็นทิศที่ทำให้ผลหารเรย์ลีต่ำที่สุดในบรรดาทิศที่ตั้งฉากกับค่าคงที่. เมื่อน้ำหนักข้ามกลุ่มเล็ก พลังงานจะต่ำเมื่อเครื่องหมายเปลี่ยนเฉพาะตรงสะพาน; เครื่องหมายของ v_2 จึงแยกสองกลุ่มในแบบจำลองนี้. นี่เป็นคำอธิบายของแบบจำลอง ไม่ใช่การรับประกันว่าการแบ่งกลุ่มจะดีที่สุดสำหรับกราฟทุกกราฟ.

สรุปใจความ

- กราฟถ่วงน้ำหนักให้ลาปลาซ $L = D - W$ ซึ่งสมมาตรจริงและมีพลังงาน $x^{\mathsf{T}}Lx = \sum_{i<j} w_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0$.
- สำหรับกราฟเชื่อมโยง $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$; เวกเตอร์ฟีดเลอร์ v_2 ทำให้ผลหารเรย์ลีต่ำที่สุดบนเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับค่าคงที่.
- เครื่องหมายของ v_2 ใช้แบ่งกลุ่มได้ในแบบจำลองนี้ แต่เป็นฮิวริสติกและไม่รับประกันการตัดที่ดีที่สุด.
- สายในอุดมคติมีโหมด $\sin(n\pi x/L)$ และความถี่ $f_n = nf_1$; ความนับได้มาจากตัวผกผันกระชับของลาปลาซ.
- ทฤษฎีบทสเปกตรัมสำหรับตัวดำเนินการไม่มีขอบเขตทั่วไปถูกอ้างอิงในรูปตัวดำเนินการคูณและไม่พิสูจน์ในบทนี้; ผลกราฟเป็นมิติจำกัด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. ให้กราฟเป็นเส้นทางสามจุดยอด $1-2-3$ โดยเส้นเชื่อม 1–2 มีน้ำหนัก 1 และเส้นเชื่อม 2–3 มีน้ำหนัก 2. จงเขียน L, หาค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมด, หาเวกเตอร์ฟีดเลอร์หนึ่งหน่วย และบอกการแบ่งกลุ่มตามเครื่องหมาย.

2. จงพิสูจน์ว่า $L\mathbf{1} = 0$ และ $x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{i<j} w_{ij}(x_i - x_j)^2$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}^n$.

3. จงพิสูจน์ว่าถ้ากราฟเชื่อมโยงและ $Lx = 0$ แล้ว x ต้องเป็นเวกเตอร์คงที่. อธิบายว่าทำไมข้อนี้ให้ $\lambda_2 > 0$.

4. สำหรับกราฟสองสามเหลี่ยมในตัวอย่าง จงตรวจว่า v_2 ที่ให้มาเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ λ_2 และคำนวณ $v_2^{\mathsf{T}} L v_2$ โดยตรง.

5. ให้สายมีความยาว $L = 0.65$ เมตร, ความตึง $T = 70$ นิวตัน และความหนาแน่น $\mu = 0.004$ กิโลกรัมต่อเมตร. จงหา f_1, f_3 และ f_6 และตรวจว่า $f_3/f_1 = 3$.

6. ให้ v_2 เป็นเวกเตอร์ฟีดเลอร์. จงแสดงว่า $-v_2$ ก็เป็นเวกเตอร์ฟีดเลอร์หนึ่งหน่วย และการแบ่งกลุ่มตามเครื่องหมายสลับสองกลุ่ม. เพราะเหตุใดเราจึงต้องกำหนดเครื่องหมายล่วงหน้าเมื่อรายงานผล.

7. จงพิสูจน์สูตรเรย์ลี $\lambda_2 = \min_{x \perp \mathbf{1},\, x \neq 0} x^{\mathsf{T}} L x / \|x\|^2$ แล้วใช้เวกเตอร์ $(1, 1, 1, -1, -1, -1)/\sqrt{6}$ กับกราฟสองสามเหลี่ยมเพื่อแสดงว่าพลังงาน 0.1 มากกว่า λ_2.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **เส้นทางสามจุดยอด.** ลาปลาซคือ
$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $-\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 6)$, ดังนั้นค่าลักษณะเฉพาะคือ 0, $3 - \sqrt{3} = 1.2679491924$ และ $3 + \sqrt{3} = 4.7320508076$. เวกเตอร์ฟีดเลอร์หนึ่งหน่วย (เลือกองค์ประกอบแรกเป็นบวก) คือ
$$(0.7886751346,\ -0.2113248654,\ -0.5773502692).$$
เครื่องหมายแบ่งเป็น $\{1\}$ กับ $\{2, 3\}$; พลังงานคือ $\lambda_2 = 1.2679491924$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

2. **เอกลักษณ์พลังงาน.** เพราะผลรวมของทุกแถวของ L เป็นศูนย์, $L\mathbf{1} = 0$. สำหรับพลังงาน, เขียนผลรวมสองชั้นแล้วจับคู่ (i, j) กับ (j, i):
$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{i,j} w_{ij} x_i (x_i - x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i<j} w_{ij} (x_i - x_j)^2.$$
ทุกเทอมไม่ติดลบ เพราะ $w_{ij} \geq 0$.

3. **เคอร์เนลของกราฟเชื่อมโยง.** ถ้า $Lx = 0$ แล้ว $x^{\mathsf{T}} L x = 0$. จากผลบวกของเทอมที่ไม่ติดลบ, ทุกเทอมเป็นศูนย์; จึง $x_i = x_j$ ทุกเส้นเชื่อม ij. เพราะกราฟเชื่อมโยง, ทุกจุดยอดเชื่อมกันด้วยเส้นทาง และค่า x จึงเท่ากันตลอดเส้นทาง. ดังนั้น x คงที่. เคอร์เนลมีมิติหนึ่ง; ค่าลักษณะเฉพาะ 0 มีปริภูมิลักษณะเฉพาะมิติหนึ่ง และค่าถัดไป λ_2 ต้องมากกว่าศูนย์.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. **ตรวจเวกเตอร์ฟีดเลอร์.** ให้ $a = 0.4209542980$ และ $b = 0.3815690737$. ที่จุดยอด 1,

$$(Lv_2)_1 = 2a - a - b = a - b = 0.0393852243 = \lambda_2 a.$$

ที่จุดยอด 3,

$$(Lv_2)_3 = 2.15b - a - a - 0.15(-b) = 2.3b - 2a = 0.0357002747 = \lambda_2 b.$$

สมมาตรทำให้สมการที่จุดยอด $2, 4, 5, 6$ ตามมา. เพราะ $\|v_2\| = 1$,

$$v_2^{\mathsf{T}} L v_2 = \lambda_2 \|v_2\|^2 = 0.0935617584.$$

5. **ความถี่ของสาย.** จาก $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{T/\mu}$,

$$f_1 = 101.7596658102, \qquad f_3 = 305.2789974305, \qquad f_6 = 610.5579948611.$$

เพราะ $f_n = n f_1$, $f_3/f_1 = 3$ และ $f_6/f_1 = 6$. ตัวเลขมีแบบทดสอบยืนยัน.

6. **เครื่องหมาย.** ถ้า $Lv_2 = \lambda_2 v_2$ แล้ว $L(-v_2) = -\lambda_2 v_2 = \lambda_2(-v_2)$. นอร์มยังเป็นหนึ่ง และ $-v_2$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{1}$ เพราะ v_2 ตั้งฉาก. เซต S_+ กับ S_- สลับกันเมื่อเปลี่ยนเครื่องหมาย. จึงต้องกำหนดกฎเครื่องหมายก่อนรายงานผล เช่น ให้องค์ประกอบแรกเป็นบวก.

7. **สูตรเรย์ลีและตัวอย่าง.** เขียน $x = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$ โดย v_k เป็นฐานลักษณะเฉพาะเชิงตั้งฉากปรกติ. ถ้า $x \perp \mathbf{1}$ แล้ว $c_1 = 0$, ดังนั้น

$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} c_k^2 = \lambda_2 \|x\|^2.$$

เลือก $x = v_2$ ให้ความเท่ากัน. สำหรับเวกเตอร์ $x = (1, 1, 1, -1, -1, -1)/\sqrt{6}$, ทุกเส้นเชื่อมภายในสามเหลี่ยมมีผลต่าง 0; มีเพียงสะพาน 3–4 ที่มีผลต่าง 2 กับน้ำหนัก 0.15. ดังนั้น

$$x^{\mathsf{T}} L x = \frac{0.15 \cdot 2^2}{6} = 0.1 > \lambda_2 = 0.0935617584.$$

นี่แสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์ฟีดเลอร์ประหยัดกว่าการแบ่งแบบหยาบที่ตัดตรงกลางสะพาน.

ร่างต้น · Preprint · 2026-10-24

สูตรสรุป

- ตัวดำเนินการกระชับผูกพันในตัว: $T = \sum_k \lambda_k P_k$, $\|T\| = \sup_k |\lambda_k|$; ตัวดำเนินการกระชับที่เป็นบวกมีฐานลักษณะเฉพาะและ $\sqrt{T}$ มีเพียงตัวเดียว.
- แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน: $f(T) = f(0)P_0 + \sum_k f(\lambda_k)P_k$; $\|f(T)\| = \|f\|_\infty$ และ $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.
- ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล: $B = (-\Delta + 1)^{-1}$ กระชับ เป็นบวก หนึ่งต่อหนึ่ง; $A = B^{-1} - I$ ปิดและผูกพันในตัว; บน $(0, 1)$, $\lambda_n = n^2\pi^2$.
- กราฟ: $L = D - W$, $x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{i<j} w_{ij}(x_i - x_j)^2$; $0 = \lambda_1 < \lambda_2$ สำหรับกราฟเชื่อมโยง; $\lambda_2 = \min_{x \perp \mathbf{1}} x^{\mathsf{T}} L x / \|x\|^2$.
- สาย: $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ และ $f_n = n f_1 = \frac{n}{2L}\sqrt{T/\mu}$.

อ่านต่อ

บทนี้ตอบคำถามเปิดบททั้งสองข้อ: สายมีโหมดนับได้เพราะตัวผกผันของลาปลาซกระชับ และกราฟบอกกลุ่มได้เพราะเวกเตอร์ฟีดเลอร์. บทถัดไปจะขยายความคิดนี้ไปสู่ดิสทริบิวชันและปริภูมิโซโบเลฟ.

ภาค IV

ดิสทริบิวชัน สมการอ่อน และจุดตรึง

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

บทที่ 10

ดิสทริบิวชันและโซโบเลฟ

สถานการณ์สมมติ: แรงกระแทกในหนึ่งเฟรม

สมมติว่าเกมแอ็กชันหนึ่งใช้ระบบฟิสิกส์ที่เดินเวลาทีละขั้นเท่า ๆ กัน. ตัวละครเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 0 จนถึงเฟรมหนึ่ง. ในเฟรมถัดไปมีแรงกระแทกจากการฟันดาบ ทำให้ความเร็วเปลี่ยนเป็น 1 หน่วยต่อวินาทีในทันที. หน้าจอวาดตำแหน่งของตัวละครทุกเฟรม; กราฟตำแหน่งจึงเป็นเส้นตรงสองช่วงที่มีมุมหนึ่งจุดตรงรอยต่อ.

ถ้าเราถามว่า “ความเร่งที่เฟรมนั้นเท่าไร” แล้วประมาณด้วยผลต่างของความเร็วหารด้วยช่วงเวลา Δt เราจะได้ $1/\Delta t$. เมื่อเกมเพิ่มอัตราเฟรมให้ถี่ขึ้น Δt เล็กลง และคำตอบนี้โตขึ้นไม่หยุด. มันไม่มีค่าจำกัดที่เป็นจำนวนจริง. การเพิ่มความละเอียดของเวลาไม่ได้ทำให้แรงกระแทกกลายเป็นฟังก์ชันความเร่งธรรมดา; มันเพียงทำให้ค่าประมาณสูงขึ้น.

สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้กล่าวอ้างว่าเกมหรือเอนจินใดใช้แบบจำลองนี้จริง และไม่มีตัวเลขจากการวัดในเกม. เราใช้การกระแทกในหนึ่งเฟรมเป็นชื่อของ*การเปลี่ยนความเร็วทันที*: ฟังก์ชันความเร็วกระโดดที่เวลา t_0. คำถามของบทนี้คือ: วัตถุทางคณิตศาสตร์ใดทำหน้าที่เป็นอนุพันธ์ของการกระโดดนี้, ทำไมอนุพันธ์นั้นจึงไม่ใช่ฟังก์ชัน, และเมื่อใดที่เรายังได้ฟังก์ชันกลับคืนมาถ้าเรายอมให้ฟังก์ชันนั้น “หยาบ” ได้บ้าง.

คำตอบจะมาจาก**ดิสทริบิวชัน** (distribution): กฎเชิงเส้นที่อ่านค่าของ**ฟังก์ชันทดสอบ** (test function) แทนการอ่านค่าที่จุด. จากนั้น**อนุพันธ์อ่อน** (weak derivative)จะยอมให้เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีมุมหรือรอยพับ โดยไม่ต้องผ่านจุดที่อนุพันธ์ธรรมดาไม่มี. สุดท้าย**ปริภูมิโซโบเลฟ** (Sobolev space)จะบอกว่าเราต้องการอนุพันธ์กี่อันและต้องมีขนาดแบบใด จึงจะได้ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องหรือมีค่าที่ขอบได้.

ตัวเลขทุกตัวที่อ้างว่ามาจากการคำนวณในบทนี้ผลิตโดย `code/funkana/ch10.py` และมีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch10.py`. ตัวเลขจากการจำลองจึงเป็นตัวเลขของแบบจำลองเรา ไม่ใช่การวัดจากเกม กล้อง หรือเซนเซอร์จริง.

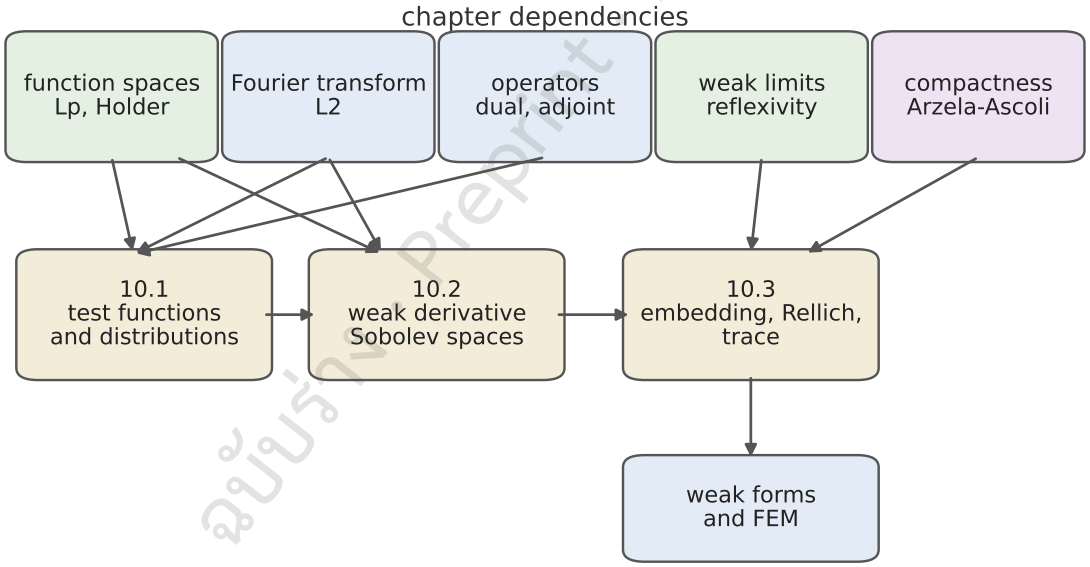
ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

ภาพรวมบท

ในโลกของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด อนุพันธ์ของขั้นบันไดไม่มีอยู่ที่จุดกระโดด. แต่ภาพและเสียงที่เราวาดบนหน้าจอเต็มไปด้วยขั้นบันไดจากการสุ่มตัวอย่าง. ถ้าเราเก็บเฉพาะฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกจุด เราจะทิ้งขอบคมทุกขอบ. ดิสทริบิวชันแก้ปัญหานี้โดยเปลี่ยนคำถาม: อนุพันธ์ไม่ใช่ตัวเลขที่อ่านค่าที่จุด แต่เป็นกฎที่รับฟังก์ชันทดสอบแล้วตอบเป็นตัวเลข. เส้นทางของบทมีสามขั้น. ขั้นแรก สร้างปริภูมิของฟังก์ชันทดสอบที่เรียบและมี**ตัวรองรับกระชับ** (compact support) แล้วนิยามดิสทริบิวชันเป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบนปริภูมินี้. ขั้นที่สอง แปลงสูตรการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนให้เป็นนิยามของอนุพันธ์อ่อน และสร้างปริภูมิโซโบเลฟที่ควบคุมทั้งฟังก์ชันและอนุพันธ์อ่อน. ขั้นที่สาม ใช้**การแปลงฟูเรียร์** (Fourier transformation), **การฝังตัว** (embedding) และ**ความกระชับ** (compactness) เพื่อตอบว่าเมื่อใดฟังก์ชันโซโบเลฟมี**ตัวแทนต่อเนื่อง** (continuous representative) ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่เท่ากับฟังก์ชันเดิมเกือบทุกที่, มีค่าที่ขอบ และมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าในนอร์มที่หยาบกว่า.

เราใช้ผลจากบทก่อน ๆ หลายบท. จากบทตัวดำเนินการ คู่เชิง และฮาห์น–บานาค เราใช้**ตัวดำเนินการผูกพัน** (adjoint) และการทดสอบด้วยฟังก์ชันนัล. จากบทการลู่เข้าแบบอ่อน ความสะท้อนกลับ และค่าต่ำสุด เราใช้**การลู่เข้าแบบอ่อน** (weak convergence) และความสะท้อนกลับของปริภูมิฮิลเบิร์ต. จากบทตัวดำเนินการกระชับ เฟรดโฮล์ม และการคลายเบลอ เราใช้**ทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี** (Arzelà–Ascoli theorem) และความกระชับ. เราไม่ต้องใช้ทฤษฎีสเปกตรัมในบทนี้.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24



รูปที่ 10.1: บทก่อนหน้าเรื่องปริภูมิของฟังก์ชัน ฐานเชิงตั้งฉาก ตัวดำเนินการ การลู่เข้าแบบอ่อน และตัวดำเนินการกระชับปูพื้นให้หน่วยทั้งสาม และบทนี้เตรียมแนวคิดสำหรับบทถัดไป.

เราจะสรุปเส้นทางของบทอีกครั้งที่ท้ายบท. ตอนนี้ให้จำภาพหลักว่าเราอ่านค่าผ่านฟังก์ชันทดสอบ แล้วค่อยย้ายการหาอนุพันธ์ไปยังตัวทดสอบ.

10.1 ฟังก์ชันทดสอบและดิสทริบิวชัน

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพว่าเรามีหัววัดที่ไม่สามารถแตะฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่งได้. เรามีเพียงแท่งวัดเรียบ ๆ ที่เลื่อนไปทั่วโดเมน แล้วรายงานค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของฟังก์ชันใต้แท่งนั้น. ถ้าแท่งเล็กลงเรื่อย ๆ ค่าเฉลี่ยจะเข้าใกล้ค่าที่จุดหนึ่ง. ฟังก์ชันทดสอบคือแท่งวัดเหล่านี้. การอ่านค่าผ่านแท่งวัดทำให้เรานิยาม “อนุพันธ์” ของวัตถุที่ไม่มีค่าที่จุดได้ เช่น การกระโดดของความเร็วหรือแรงกระแทก.

ภาพที่ต้องจำคือ: ดิสทริบิวชันไม่ใช่ฟังก์ชันบนโดเมน แต่เป็นเครื่องอ่านที่ตอบเลขเมื่อป้อนฟังก์ชันทดสอบ. อนุพันธ์ของดิสทริบิวชันคือเครื่องอ่านอีกเครื่องหนึ่ง ซึ่งย้ายอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันทดสอบและเพิ่มเครื่องหมายตามจำนวนครั้งที่หาอนุพันธ์.

10.1.1 ฟังก์ชันทดสอบและเกณฑ์การเป็นดิสทริบิวชัน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด. เราเขียน $\operatorname{supp}\varphi$ แทนส่วนปิดของเซตที่ φ ไม่เป็นศูนย์. จำจากบทปริภูมิของฟังก์ชันว่า $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ คือเซตของฟังก์ชันเรียบทุกอันดับที่มี**ตัวรองรับกระชับ** (compact support) อยู่ใน Ω.

สำหรับเซตกระชับ $K \subset \Omega$ ให้

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subset K\},$$

และสำหรับ $m \in \mathbb{N}_0$ ให้

$$p_{K,m}(\varphi) := \sup_{x\in K}\ \sup_{|\alpha|\le m} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

เรากล่าวว่า $\varphi_j \to \varphi$ ใน $\mathcal{D}(\Omega)$ เมื่อมีเซตกระชับ $K \subset \Omega$ หนึ่งเซตซึ่ง $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ ทุก j และ $p_{K,m}(\varphi_j - \varphi) \to 0$ สำหรับทุก m. เกณฑ์ลำดับนี้สมมูลกับความต่อเนื่องเทียบกับทอพอโลยีแบบจำกัดเฉพาะที่บน $\mathcal{D}(\Omega)$ ที่สร้างโดยกึ่งนอร์ม $p_{K,m}$ ทั้งหมด; ดู Alt 2012, นิยาม 3.20–3.21 และ Werner 2007, บทตั้ง VIII.5.1–VIII.5.2.

นิยาม 10.1.1: ดิสทริบิวชันบนเซตเปิด

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด. **ดิสทริบิวชัน** (distribution) บน Ω คือฟังก์ชันนัลเชิงเส้น $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ ที่ต่อเนื่องตามลำดับ: ถ้า $\varphi_j \to 0$ ใน $\mathcal{D}(\Omega)$ แล้ว $T\varphi_j \to 0$ ใน $\mathbb{C}$. เราเขียน $\mathcal{D}'(\Omega)$ แทนเซตของดิสทริบิวชันทั้งหมดบน Ω.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

เงื่อนไข “ต่อเนื่องตามลำดับ” พูดง่าย ๆ ว่า: ถ้าลำดับของฟังก์ชันทดสอบเล็กลงพร้อมอนุพันธ์ทุกตัวบนเซตกระชับเดียวกัน แล้วค่าที่ดิสทริบิวชันอ่านได้ก็ต้องเล็กลงด้วย. ตัวอย่างที่ควรจำคือ $\delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. มันเป็นเชิงเส้นและต่อเนื่อง เพราะ $|\varphi(0)| \le p_{K,0}(\varphi)$ เมื่อ $0 \in K$. แต่ไม่มีฟังก์ชัน f ที่ทำให้ $\delta_0(\varphi) = \int f\varphi$ สำหรับทุก φ.

ทฤษฎีบท 10.1.1: เกณฑ์การเป็นดิสทริบิวชันด้วยกึ่งนอร์ม

ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ เป็นดิสทริบิวชัน ก็ต่อเมื่อสำหรับเซตกระชับ $K \subset \Omega$ ทุกเซต มีจำนวนเต็ม $m \ge 0$ และค่าคงตัว $C > 0$ ซึ่ง

$$|T\varphi| \le C\, p_{K,m}(\varphi) \qquad \text{สำหรับทุก } \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** บนตัวรองรับกระชับคงที่ ทอพอโลยีถูกสร้างด้วยกึ่งนอร์มที่นับได้; ความต่อเนื่องจึงลดเป็นการควบคุมด้วยกึ่งนอร์มจำนวนจำกัด.

1. **จากอสมการกึ่งนอร์มสู่ความต่อเนื่อง.** สมมติว่าทุกเซตกระชับ K มี m และ C ตามที่กล่าว. ให้ $\varphi_j \to 0$ ใน $\mathcal{D}(\Omega)$. โดยนิยาม มีเซตกระชับ K ซึ่ง $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ ทุก j และ $p_{K,r}(\varphi_j) \to 0$ สำหรับทุก r. เลือก m และ C ที่ใช้ได้กับ K นี้. แล้ว
$$|T\varphi_j| \le C\, p_{K,m}(\varphi_j) \longrightarrow 0.$$
ดังนั้น T ต่อเนื่องตามลำดับ.

2. **จากความต่อเนื่องสู่อสมการกึ่งนอร์ม.** ให้ $K \subset \Omega$ กระชับ. ถ้า $\varphi_j \to 0$ ใน $\mathcal{D}_K(\Omega)$ แล้วลำดับนี้ก็ลู่สู่ศูนย์ใน $\mathcal{D}(\Omega)$ เพราะตัวรองรับอยู่ใน K เดียวกัน. ดังนั้น $T\varphi_j \to 0$. ทอพอโลยีของ $\mathcal{D}_K$ สร้างด้วยกึ่งนอร์มที่นับได้ จึงหาเมตริกได้; ความต่อเนื่องตามลำดับของข้อจำกัดนี้เท่ากับความต่อเนื่องที่ศูนย์.

3. **อ่านค่าคงตัว.** ความต่อเนื่องเชิงเส้นที่ศูนย์ให้ดัชนีจำนวนจำกัด $j_1,\dots,j_r$ และ $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_r > 0$ ซึ่งถ้า $p_{K,j_\ell}(\varphi) < \varepsilon_\ell$ สำหรับทุก ℓ แล้ว $|T\varphi| \le 1$. ใส่ $m := \max_\ell j_\ell$ และ $\delta := \min_\ell \varepsilon_\ell$. เพราะ $p_{K,j_\ell}(\varphi) \le p_{K,m}(\varphi)$, เงื่อนไข $p_{K,m}(\varphi) < \delta$ ทำให้ $|T\varphi| \le 1$.

4. **ปรับขนาด.** ให้ $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ และ $\varphi \neq 0$. ถ้า $p_{K,m}(\varphi) = 0$ แล้วโดยเฉพาะ $\varphi = 0$ บน K; นอก K ก็เป็นศูนย์เพราะ $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. จึง $\varphi = 0$ ทุกจุด ซึ่งขัดกับ $\varphi \neq 0$. ดังนั้น $p_{K,m}(\varphi) > 0$. สำหรับ $\psi := \dfrac{\delta}{2p_{K,m}(\varphi)}\varphi$ มี $p_{K,m}(\psi) = \delta/2 < \delta$, ดังนั้น $|T\psi| \le 1$ และ
$$|T\varphi| \le \frac{2}{\delta} p_{K,m}(\varphi).$$
นี่คืออสมการที่ต้องการ ด้วย $C = 2/\delta$.

สรุป: ดิสทริบิวชันถูกควบคุมด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชันทดสอบจำนวนจำกัดบนแต่ละเซตกระชับ; จำนวนอนุพันธ์นี้อาจขึ้นกับเซตกระชับ. □

10.1.2 ตัวอย่าง: ฟังก์ชันปรกติและเดลตา

ถ้า $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ เรานิยาม
$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$
สำหรับเซตกระชับ $K \subset \Omega$,
$$|T_f(\varphi)| \le \Big(\int_K |f(x)|\,dx\Big) p_{K,0}(\varphi),$$
ดังนั้น T_f เป็นดิสทริบิวชัน. เราเรียกมันว่า**ดิสทริบิวชันปรกติ** (regular distribution). ทฤษฎีบทถัดไปบอกว่าฟังก์ชันสองตัวที่ให้ดิสทริบิวชันปรกติตัวเดียวกันต้องเท่ากันเกือบทุกที่.

ทฤษฎีบท 10.1.2: เอกลักษณ์ของดิสทริบิวชันปรกติ

ให้ $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. ถ้า $T_f = T_g$ ใน $\mathcal{D}'(\Omega)$ แล้ว $f = g$ เกือบทุกที่ใน Ω.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. ให้ $h := f - g$ จึง $T_h = 0$. ให้ ρ_ε เป็นลำดับดิแรกมาตรฐานที่เรียบ มีตัวรองรับใน $\{|y| \le \varepsilon\}$ และ $\int \rho_\varepsilon = 1$ (ดูบทปริภูมิของฟังก์ชัน). เลือกเซตเปิด $U \Subset \Omega$ และเซตกระชับ $K \subset U$. สำหรับ $x \in K$ และ $\varepsilon > 0$ เล็กพอ ฟังก์ชัน $y \mapsto \rho_\varepsilon(x - y)$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{D}(\Omega)$; ดังนั้น

$$(h * \rho_\varepsilon)(x) = T_h\big(\rho_\varepsilon(x - \cdot)\big) = 0.$$

การประมาณเฉพาะที่ด้วยลำดับดิแรกให้ $h * \rho_\varepsilon \to h$ ใน $L^1(K)$ เมื่อ $\varepsilon \to 0$ (Alt 2012, ทฤษฎีบท 2.23). เพราะทุกฟังก์ชันทางซ้ายเป็นศูนย์บน K, จึง $\|h\|_{L^1(K)} = 0$. เมื่อเลือกเซตกระชับที่ครอบคลุม Ω, ได้ $h = 0$ เกือบทุกที่. $\square$

สำหรับ $a \in \Omega$ ให้

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a).$$

เพราะ $|\delta_a(\varphi)| \le p_{K,0}(\varphi)$ เมื่อ $a \in K$, δ_a เป็นดิสทริบิวชัน. เราเรียกมันว่า**ดิแรกเดลตา** (Dirac delta)ที่ a. มันไม่ใช่ดิสทริบิวชันปรกติ. ถ้า $\delta_a = T_f$ สำหรับบาง $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ แล้วสำหรับทุก φ ที่ตัวรองรับอยู่ใน $\Omega \setminus \{a\}$ เรามี $T_f(\varphi) = 0$ จึง $f = 0$ เกือบทุกที่บน $\Omega \setminus \{a\}$. เพราะเซต $\{a\}$ มีการวัดศูนย์, $f = 0$ เกือบทุกที่บน Ω ด้วย และจะได้ $\delta_a = 0$ ซึ่งขัดกับ $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ เมื่อเลือก $\varphi(a) = 1$. ดังนั้น δ_a เป็น**ดิสทริบิวชันเอกฐาน** (singular distribution).

ทฤษฎีบท 10.1.3: กล่องประมาณเดลตาลู่เข้าในความหมายของดิสทริบิวชัน

ให้ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ และกำหนด

$$A_\varepsilon(\varphi) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\, dx.$$

แล้ว $A_\varepsilon(\varphi) \to \varphi(0)$ เมื่อ $\varepsilon \to 0^+$; ยิ่งกว่านั้น

$$|A_\varepsilon(\varphi) - \varphi(0)| \le \frac{\varepsilon^2}{6} \|\varphi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

พิสูจน์. เพราะช่วงปริพันธ์สมมาตร,

$$A_\varepsilon(\varphi) - \varphi(0) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \big(\varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0)\big)\, dt.$$

สูตรเทย์เลอร์แบบปริพันธ์ให้

$$\varphi(t) + \varphi(-t) - 2\varphi(0) = \int_0^t (t - s)\big(\varphi''(s) + \varphi''(-s)\big)\, ds,$$

จึงมีค่าสัมบูรณ์ไม่เกิน $t^2 \|\varphi''\|_{L^\infty}$. อินทิเกรตขอบเขตนี้จาก 0 ถึง ε แล้วหารด้วย 2ε ได้อสมการที่ต้องการ; ขอบเขตด้านขวาลู่สู่ศูนย์. $\square$

ลองเอง: การประมาณเดลตาด้วยกล่อง

ให้ $\varphi(x) = e^{-x^2}$ และ

$$\delta_\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

แล้ว

$$\delta_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\varepsilon} \operatorname{erf}(\varepsilon).$$

ที่ $\varepsilon = 0.1$ ค่านี้คือ 0.9966766429; ที่ $\varepsilon = 0.01$ คือ 0.9999666677. ทั้งสองค่าเข้าใกล้ $\varphi(0) = 1$ เมื่อ $\varepsilon \to 0$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

10.1.3 การหาอนุพันธ์ของดิสทริบิวชันและสูตรการกระโดด

นิยาม 10.1.2: อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน

สำหรับ $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ และ พหุดัชนี α เราสร้างตัวอ่านค่าใหม่ชื่อ**อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน** (distributional derivative)อันดับ α โดยกำหนดค่าบนฟังก์ชันทดสอบแต่ละตัวว่า

$$(D^{(\alpha)}T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

บทตั้ง 10.1.4: อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันเป็นดิสทริบิวชัน

การส่ง $D^{(\alpha)} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ นิยามได้ดีและต่อเนื่องตามลำดับ. ยิ่งกว่านั้น $D^{(\alpha)}$ คือตัวดำเนินการผูกพันของ $(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ให้การหาอนุพันธ์ทำหน้าที่บน φ แทนบน T แล้วตรวจว่าผลที่ได้ยังเป็นตัวอ่านค่าที่ต่อเนื่อง.

1. **นิยามได้ดี.** สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^{\alpha}\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ และ $T(D^{\alpha}\varphi)$ นิยามได้. การส่งเป็นเชิงเส้นเพราะ D^{α} เชิงเส้นและ T เชิงเส้น.

2. **ต่อเนื่อง.** ให้ $\varphi_j \to 0$ ใน $\mathcal{D}(\Omega)$ โดยมีตัวรองรับในเซตกระชับ K. แล้ว $D^{\alpha}\varphi_j \to 0$ ใน $\mathcal{D}(\Omega)$ และมีตัวรองรับใน K เดียวกัน. เพราะ T ต่อเนื่องตามลำดับ, $T(D^{\alpha}\varphi_j) \to 0$. ดังนั้น $D^{(\alpha)}T$ เป็นดิสทริบิวชัน.

3. **เป็นตัวดำเนินการผูกพัน.** สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(D^{(\alpha)}T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\varphi) = \big((-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\big)'T(\varphi).$$

นี่คือนิยามของตัวดำเนินการผูกพันบน**ปริภูมิคู่** (dual space) ซึ่งคือปริภูมิของฟังก์ชันนัลต่อเนื่องทั้งหมด.

สรุป: อนุพันธ์ของดิสทริบิวชันไม่ต้องใช้ลิมิตของผลต่าง; มันย้ายอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันทดสอบพร้อมเครื่องหมาย $(-1)^{|\alpha|}$. □

ทฤษฎีบท 10.1.5: สูตรการกระโดดของอนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน

ให้ $-\infty < a < b < \infty$ และ $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ มีอนุพันธ์คลาสสิกต่อเนื่องบน (a,a_0) และ (a_0,b) สำหรับจุด $a_0 \in (a,b)$ หนึ่งจุด. สมมติว่ามีลิมิตด้านซ้ายและขวา $f(a_0-)$ และ $f(a_0+)$ และให้ g เป็นอนุพันธ์คลาสสิกของ f บนสองช่วงดังกล่าว โดย $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. แล้ว $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ และในความหมายของดิสทริบิวชัน

$$(T_f)' = T_g + \big(f(a_0+) - f(a_0-)\big)\delta_{a_0}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** แบ่งปริพันธ์ที่จุดกระโดดแล้วหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนบนสองช่วง. พจน์ขอบที่ปลายช่วงหักล้างกัน เหลือผลต่างของค่าที่กระโดด คูณค่าของฟังก์ชันทดสอบที่จุดนั้น.

1. ก่อนอื่น $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$: ถ้า $[c,d] \subset (a,b)$ แล้ว f ต่อเนื่องบน $[c,a_0)$ และ $(a_0,d]$ และมีลิมิตจำกัดที่ a_0 จากทั้งสองด้าน จึงมีขอบเขตบน $[c,d]$. ให้ $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. โดยนิยามของอนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน,

$$(T_f)'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

2. เลือก $c < a_0 < d$ ใน (a,b) ให้ $\operatorname{supp}\varphi \subset (c,d)$. แบ่งปริพันธ์บน (c,a_0) และ (a_0,d); บนแต่ละช่วง f หาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์คือ g. เมื่อ $0 < \eta < \min(a_0-c, d-a_0)$, การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนบน $[c, a_0-\eta]$ และ $[a_0+\eta, d]$ ให้
$$-\int_c^{a_0-\eta} f\varphi' = -\big[f\varphi\big]_c^{a_0-\eta} + \int_c^{a_0-\eta} g\varphi,$$
$$-\int_{a_0+\eta}^{d} f\varphi' = -\big[f\varphi\big]_{a_0+\eta}^{d} + \int_{a_0+\eta}^{d} g\varphi.$$

3. ให้ $\eta \to 0^+$. เพราะ f มีลิมิตด้านซ้ายและขวาที่ a_0 และ φ ต่อเนื่อง, พจน์ขอบลู่เข้าหา $-f(a_0-)\varphi(a_0)$ และ $f(a_0+)\varphi(a_0)$. ปริพันธ์ของ $g\varphi$ ลู่เข้าหาปริพันธ์บน (a,b) เพราะ $g \in L^1_{\mathrm{loc}}$ และช่วงที่ตัดออกมีความยาว $2\eta \to 0$. ดังนั้น
$$(T_f)'(\varphi) = \int_a^b g\varphi + \big(f(a_0+) - f(a_0-)\big)\varphi(a_0).$$

4. พจน์ขอบที่ c, d เป็นศูนย์เพราะ $\varphi(c) = \varphi(d) = 0$. และ $\operatorname{supp}\varphi \subset (c,d)$ จึงปริพันธ์ของ $g\varphi$ บน (c,d) เท่ากับปริพันธ์บน (a,b). สมการข้างต้นคือ $T_g(\varphi) + (f(a_0+) - f(a_0-))\delta_{a_0}(\varphi)$ สำหรับทุก φ.

สรุป: อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันเห็นทั้งอนุพันธ์ธรรมดาระหว่างช่วงและขนาดของการกระโดดที่รอยต่อ. □

ตอนนี้เราตอบคำถามเปิดบทได้แล้ว. ให้ $v(t) = 0$ สำหรับ $t < t_0$ และ $v(t) = 1$ สำหรับ $t > t_0$ เป็นความเร็วของตัวละคร. ในความหมายของดิสทริบิวชัน
$$v' = \delta_{t_0}.$$
ดังนั้น “ความเร่ง” ที่เฟรมกระแทกไม่ใช่ฟังก์ชันที่มีค่ามาก ๆ ค่าหนึ่ง แต่เป็นเดลตาที่มีมวล 1. การประมาณด้วยผลต่าง $1/\Delta t$ โตขึ้นเพราะมันพยายามแทนเดลตาด้วยก้อนสี่เหลี่ยมสูง $1/\Delta t$ และกว้าง Δt ซึ่งมีมวล 1 เท่ากัน. เมื่อ $\Delta t \to 0$ ก้อนสี่เหลี่ยมไม่ได้ลู่เข้าเป็นฟังก์ชัน; มันลู่เข้าเป็นเดลตาในความหมายของดิสทริบิวชัน.

10.1.4 ปริภูมิคู่ของชวาร์ตซ์และการแปลงฟูเรียร์

การแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันใน L^1 หรือ L^2 ไม่พอสำหรับการกระโดดและเดลตา. เราขยายการแปลงฟูเรียร์ไปยังดิสทริบิวชันที่ “โตช้า ๆ” พอ. ให้ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ เป็นปริภูมิของฟังก์ชันเรียบที่ทุกอนุพันธ์สลายเร็วกว่าพหุนามใด ๆ เราเรียกมันว่า**ปริภูมิชวาร์ตซ์** (Schwartz space) พร้อมกึ่งนอร์ม
$$q_{\alpha,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^m |D^\alpha \varphi(x)|.$$
ให้ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ เป็นปริภูมิคู่ของ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; สมาชิกเรียกว่า**ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ด** (tempered distribution). เพราะ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ หนาแน่นและฝังตัวอย่างต่อเนื่อง, ทุกดิสทริบิวชันเทมเปอร์ดเป็นดิสทริบิวชันบน $\mathbb{R}^n$.

ทฤษฎีบท 10.1.6: การแปลงฟูเรียร์บนดิสทริบิวชันเทมเปอร์ด

การแปลงฟูเรียร์ $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ นิยามโดย
$$(\mathcal{F}T)(\varphi) := T(\mathcal{F}\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$
เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงและต่อเนื่อง และ $\mathcal{F}^{-1}$ ต่อเนื่อง. สำหรับ $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ และพหุดัชนี α,
$$\mathcal{F}(D^{(\alpha)}T) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\, \mathcal{F}T.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. **แนวคิด.** การแปลงฟูเรียร์เป็นโฮมิออมอร์ฟิซึมของ $\mathcal{S}$; ทรานสโพสของมันจึงเป็นโฮมิออมอร์ฟิซึมของปริภูมิคู่. สูตรอนุพันธ์ได้จากการย้ายอนุพันธ์ในคู่.

1. $\mathcal{F}$ **บน** $\mathcal{S}$**.** Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.8: $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงเชิงเส้นต่อเนื่องและมีตัวผกผันต่อเนื่อง.

2. **ทรานสโพส.** สำหรับ $T\in\mathcal{S}'$ และ $\varphi\in\mathcal{S}$, $(\mathcal{F}T)(\varphi)=T(\mathcal{F}\varphi)$ นิยามการส่งเชิงเส้นต่อเนื่อง เพราะ $\mathcal{F}$ ต่อเนื่อง. ถ้า $\mathcal{F}T=0$ แล้ว T หายบน $\mathcal{F}(\mathcal{S})=\mathcal{S}$ จึง $T=0$. ทุก $S\in\mathcal{S}'$ เขียนเป็น $S=\mathcal{F}T$ ด้วย $T=\mathcal{F}^{-1}S$ โดยนิยาม $T(\varphi)=S(\mathcal{F}^{-1}\varphi)$. ดังนั้น $\mathcal{F}$ เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง.

3. **สูตรอนุพันธ์.** สำหรับ $\varphi\in\mathcal{S}$,
$$(\mathcal{F}D^{(\alpha)}T)(\varphi)=(D^{(\alpha)}T)(\mathcal{F}\varphi)=(-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\mathcal{F}\varphi).$$
หาอนุพันธ์ใต้เครื่องหมายปริพันธ์ในนิยามฟูเรียร์ได้
$$D^{\alpha}_{\xi}\mathcal{F}\varphi(\xi)=(-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^{\alpha}\varphi)(\xi).$$
ดังนั้น
$$(\mathcal{F}D^{(\alpha)}T)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(-i)^{|\alpha|}T(\mathcal{F}(\xi^{\alpha}\varphi))=(i^{|\alpha|}\xi^{\alpha}\mathcal{F}T)(\varphi).$$

สรุป: ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ดปิดภายใต้การแปลงฟูเรียร์และการหาอนุพันธ์; นี่คือเหตุผลที่การแปลงฟูเรียร์ของเดลตาเป็นฟังก์ชันคงที่. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): การแปลงฟูเรียร์ของเดลตา

ด้วยการกำหนด $\mathcal{F}f(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int f(x)e^{-ix\xi}\,dx$, สำหรับ $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
$$(\mathcal{F}\delta_0)(\varphi)=\delta_0(\mathcal{F}\varphi)=(\mathcal{F}\varphi)(0)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$$
ดังนั้น $\mathcal{F}\delta_0=(2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$ ในความหมายของดิสทริบิวชัน. ในหนึ่งมิติ ค่าคงที่นี้คือ $(2\pi)^{-1/2}$; โค้ดตรวจการจับคู่กับฟังก์ชันทดสอบเกาส์เซียนโดยเทียบสูตรปิดกับปริพันธ์เชิงตัวเลข.

ข้อควรระวัง: ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ดไม่ใช่ทุกดิสทริบิวชัน

ฟังก์ชัน e^{x^2} หาปริพันธ์ได้เฉพาะที่บน $\mathbb{R}$ จึงนิยามดิสทริบิวชันปรกติบน $\mathcal{D}$ ได้. แต่สำหรับ $\varphi(x)=e^{-x^2/2}\in\mathcal{S}$, $\int_{\mathbb{R}}e^{x^2}\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}e^{x^2/2}\,dx=\infty$; ดังนั้น $T_{e^{x^2}}$ ไม่ได้กำหนดสมาชิกของ $\mathcal{S}'$. เมื่อข้อความกล่าวถึง “การแปลงฟูเรียร์ของดิสทริบิวชัน” ในบทนี้ ให้เข้าใจว่าอยู่ในกรอบเทมเปอร์ดเสมอ.

สรุปใจความ

- ฟังก์ชันทดสอบคือฟังก์ชันเรียบที่มีตัวรองรับกระชับ; ดิสทริบิวชันคือเครื่องอ่านเชิงเส้นที่ต่อเนื่องบนปริภูมินี้.
- ดิสทริบิวชันปรกติมาจากฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้เฉพาะที่; เดลตาเป็นดิสทริบิวชันเอกฐานที่อ่านค่าที่จุด.
- อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันย้ายอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันทดสอบพร้อมเครื่องหมาย $(-1)^{|\alpha|}$; สูตรการกระโดดให้ผลต่างของค่าที่กระโดดคูณเดลตา.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

- ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ดเป็นคู่ของปริภูมิชวาร์ตซ์; การแปลงฟูเรียร์เป็นการส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงบนปริภูมินี้.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(คำนวณมือ)** ให้ $\varphi(x) = x^2 e^{-x^2}$ และ $T = \delta_0' - 2\delta_1$. จงหา $T(\varphi)$.

2. **(ดิสทริบิวชันปรกติ)** จงแสดงว่า $f(x) = x^{-1/2}$ บน $(0,1)$ นิยามดิสทริบิวชันปรกติได้ แม้ $f \notin L^2(0,1)$.

3. **(สูตรการกระโดด)** ให้ $f(x) = 0$ สำหรับ $x < 1$ และ $f(x) = x^2$ สำหรับ $x \geq 1$. จงหา $(T_f)'$ ในรูป $T_g + c\delta_1$ และหาค่า c.

4. **(ข้อความจริงหรือเท็จ)** จงตัดสินข้อความ “ถ้า $(T)' = 0$ แล้ว $T = 0$” พร้อมพิสูจน์หรือตัวอย่างค้าน.

5. **(อันดับ)** จงแสดงว่า δ_0' เป็นดิสทริบิวชันอันดับ 1 และไม่ใช่ดิสทริบิวชันปรกติ.

6. **(ใช้โค้ด)** ใช้ฟังก์ชัน `delta_box_value` ใน `code/funkana/ch10.py` คำนวณการประมาณเดลตาที่ $\varepsilon = 0.1$ และ 0.01 เทียบกับ $\varphi(0) = 1$ แล้วอธิบายว่าผลต่างเปลี่ยนอย่างไรเมื่อ ε เล็กลง.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. สำหรับ $\varphi(x) = x^2 e^{-x^2}$, $\varphi'(x) = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$ จึง $\varphi'(0) = 0$. ดังนั้น $\delta_0'(\varphi) = -\varphi'(0) = 0$. ต่อมา $\delta_1(\varphi) = 1^2 e^{-1} = e^{-1}$. เพราะฉะนั้น

$$T(\varphi) = 0 - 2e^{-1} = -\frac{2}{e} \approx -0.7357588823.$$

   ตัวเลขนี้ตรวจในแบบทดสอบ.

2. ให้ $K = [a,b] \subset (0,1)$ กับ $0 < a < b < 1$. แล้ว

$$\int_K x^{-1/2}\,dx = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) < \infty,$$

   ดังนั้น $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,1)$ และ T_f เป็นดิสทริบิวชันปรกติ. แต่

$$\int_0^1 x^{-1}\,dx = \infty,$$

   จึง $f \notin L^2(0,1)$. ตัวอย่างนี้แสดงว่าดิสทริบิวชันปรกติไม่จำเป็นต้องมาจากฟังก์ชัน L^2.

3. ที่ $x = 1$, $f(1+) - f(1-) = 1 - 0 = 1$. อนุพันธ์คลาสสิกเป็นช่วง ๆ คือ $g(x) = 0$ สำหรับ $x < 1$ และ $g(x) = 2x$ สำหรับ $x > 1$. โดยสูตรการกระโดด,

$$(T_f)' = T_g + \delta_1.$$

   ดังนั้น $c = 1$. ตรวจกับ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$(T_f)'(\varphi) = -\int_1^\infty x^2 \varphi'(x)\,dx = \int_1^\infty 2x\varphi(x)\,dx + \varphi(1),$$

   ซึ่งตรงกับ $T_g(\varphi) + \delta_1(\varphi)$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

4. ข้อความเป็นเท็จ. ถ้า $(T)' = 0$ แล้ว $T(\varphi') = 0$ สำหรับทุก $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. ให้ $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ และ $\int \psi = 0$. เลือก $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$; แล้ว $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ และ $\varphi' = \psi$. ดังนั้น T หายบนฟังก์ชันทดสอบทั้งหมดที่มีปริพันธ์ศูนย์.

   เลือก $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ กับ $\int \chi = 1$. สำหรับ $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ใด ๆ,

$$\psi - \Big(\int \psi\Big)\chi$$

   มีปริพันธ์ศูนย์ จึง

$$T(\psi) = \Big(\int \psi\Big) T(\chi).$$

   นี่คือ $T = T_c$ กับ $c = T(\chi)$ ซึ่งเป็นดิสทริบิวชันปรกติจากฟังก์ชันคงตัว c. ตัวอย่างค้านคือ $T = T_1$: อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัวเป็นศูนย์ แต่ $T \neq 0$. สรุปได้เพียงว่า T เป็นค่าคงตัว ไม่ใช่ศูนย์.

5. ค่าของ δ_0' ถูกควบคุมด้วย $|\varphi'(0)| \le p_{K,1}(\varphi)$ เมื่อ $0 \in K$ จึงเป็นดิสทริบิวชันอันดับไม่เกิน 1. เพื่อแสดงว่าไม่ใช่อันดับ 0 ให้ $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ กับ $\eta(0) = 1$ และ $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\eta(x)\sin(x/\varepsilon)$. แล้ว $\varphi_\varepsilon'(0) = \eta(0) = 1$ แต่ $\sup|\varphi_\varepsilon| \le \varepsilon\|\eta\|_\infty \to 0$. ถ้า $|\delta_0'(\varphi)| \le C\sup|\varphi|$ ทุก φ จะได้ $1 \le C\varepsilon\|\eta\|_\infty \to 0$ ซึ่งขัดแย้ง. ดังนั้นอันดับคือ 1.

   ถ้า $\delta_0' = T_f$ สำหรับบาง $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ แล้วสำหรับ φ ที่ตัวรองรับอยู่ใน $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ จะได้ $T_f(\varphi) = 0$ จึง $f = 0$ เกือบทุกที่บน $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ และเพราะ $\{0\}$ มีการวัดศูนย์, $f = 0$ เกือบทุกที่บน $\mathbb{R}$. แล้ว $T_f = 0$ ซึ่งขัดกับ $\delta_0'(\varphi) = -\varphi'(0) \neq 0$ เมื่อเลือก φ ที่ $\varphi'(0) \neq 0$. ดังนั้น δ_0' ไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ.

6. จากโค้ด: $\delta_{0.1}(\varphi) = 0.9966766429$ และ $\delta_{0.01}(\varphi) = 0.9999666677$. ผลต่างจาก 1 คือ 0.0033233571 และ 0.0000333323; อัตราส่วนของผลต่างเท่ากับ 99.70. จากทฤษฎีบทข้างต้นและ $\varphi''(0) = -2$, คาดได้ว่า $1 - \delta_\varepsilon(\varphi) \sim \varepsilon^2/3$, จึงลดลงประมาณ 100 เท่าเมื่อ ε ลดลงสิบเท่า. สูตรปิดและปริพันธ์เชิงตัวเลขในแบบทดสอบยืนยันทั้งผลต่างและอัตราส่วนนี้.

อ่านต่อ

เราได้เครื่องมือที่อ่านการกระโดดและเดลตาได้แล้ว. แต่ถ้าเราต้องการคูณดิสทริบิวชันด้วยฟังก์ชัน หรือหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีมุมในความหมายของฟังก์ชันปกติ เรายังต้องมีปริภูมิที่ควบคุมอนุพันธ์ได้. หน่วยถัดไปจะนิยามอนุพันธ์อ่อนและปริภูมิโซโบเลฟ ซึ่งเป็นที่ที่คำถามเรื่องขอบภาพและการประมาณด้วยฟังก์ชันเรียบจะได้คำตอบ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

10.2 อนุพันธ์อ่อนและปริภูมิโซโบเลฟ

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในหน่วยที่แล้ว เราแก้ปัญหา “อนุพันธ์ไม่มีอยู่” ด้วยการย้ายอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันทดสอบ. แต่การคำนวณเชิงตัวเลขและสมการเชิงอนุพันธ์ต้องการมากกว่านั้น: เราต้องการฟังก์ชัน g ที่เป็นตัวแทนของอนุพันธ์ และต้องการวัดขนาดของ g ด้วยนอร์ม. ถ้า f มีมุมหรือรอยพับ อนุพันธ์คลาสสิกอาจไม่มีที่จุดหนึ่ง แต่เราอาจพบ g ที่ให้ค่าเดียวกันทุกครั้งที่ทดสอบด้วยฟังก์ชันเรียบ. นั่นคือ*อนุพันธ์อ่อน*.

ภาพที่ต้องจำคือ: อนุพันธ์อ่อนคืออนุพันธ์ที่ “มองไม่เห็น” จุดเดียว. มันถูกกำหนดด้วยสูตรการแยกส่วนบนทุกฟังก์ชันทดสอบ ดังนั้นค่าที่จุดหนึ่งไม่สำคัญ; สิ่งที่สำคัญคือค่าเฉลี่ยบนทุกช่วง. เมื่อเพิ่มเงื่อนไขว่า f และอนุพันธ์อ่อนทุกตัวอยู่ใน L^2 เราได้ปริภูมิโซโบเลฟ ซึ่งเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตที่ทำแคลคูลัสได้สะดวก.

สถานการณ์สมมติ: ขอบภาพที่ตรวจด้วยอนุพันธ์

สมมติว่าเราเขียนโปรแกรมตรวจขอบในภาพ. ภาพทดสอบเป็นสี่เหลี่ยมสีเทาบนพื้นหลังสีขาว. ขอบซ้ายเป็นเส้นตรงที่ $x = 0$; ความสว่างตามแนวนอนคือขั้นบันได $H(x) = 0$ สำหรับ $x < 0$ และ $H(x) = 1$ สำหรับ $x \geq 0$. โปรแกรมประมาณอนุพันธ์ด้วยผลต่าง

$$D_h H(x) := \frac{H(x+h) - H(x)}{h}.$$

ที่ขอบ ค่าของ $D_h H$ สูงประมาณ $1/h$. เมื่อภาพละเอียดขึ้นหรือเราเลือก h เล็กลง ค่าสูงสุดโตขึ้นไม่หยุด; ไม่มีฟังก์ชันอนุพันธ์ที่มีขอบเขตซึ่งเป็นลิมิต.

ถ้าเราเบลอภาพด้วยขอบเรียบ $S_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(x/\varepsilon))$ ก่อนหาอนุพันธ์ จะได้

$$S'_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\operatorname{sech}^2(x/\varepsilon), \qquad \|S'_\varepsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{3\varepsilon}.$$

ที่ $\varepsilon = 0.2, 0.05, 0.01$ นอร์มนี้คือ 1.2909944487, 2.5819888975 และ 5.7735026919 ตามลำดับ; ค่าสูงสุดคือ $1/(2\varepsilon)$ ซึ่งเท่ากับ 10 ที่ $\varepsilon = 0.05$. ยิ่งขอบคมเท่าไร นอร์มของอนุพันธ์ก็ยิ่งใหญ่เท่านั้น.

สาเหตุที่แท้จริงไม่ใช่ความละเอียดของภาพหรือคุณภาพของฟิลเตอร์ แต่คือ: ขอบขั้นบันไดไม่อยู่ในปริภูมิ H^1. อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันของมันเป็นเดลตา ไม่ใช่ฟังก์ชัน. การทำให้เรียบทำให้อนุพันธ์กลายเป็นฟังก์ชันจริง แต่ต้องจ่ายด้วยนอร์มที่โตเมื่อ $\varepsilon \to 0$. นี่คือสถานการณ์สมมติ; เราไม่ได้วัดภาพจากกล้องหรือโปรแกรมตรวจจริง และตัวเลขทั้งหมดมาจากแบบจำลองในโค้ด.

10.2.1 อนุพันธ์อ่อนและเอกลักษณ์

นิยาม 10.2.1: อนุพันธ์อ่อน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด, α เป็นพหุดัชนี และ $f \in L^2(\Omega)$. เราเรียก $g \in L^2(\Omega)$ ว่า**อนุพันธ์อ่อน** (weak derivative) หรืออนุพันธ์ทั่วไปอันดับ α ของ f เมื่อ

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx \qquad \text{สำหรับทุก } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

นี่คือเวอร์ชัน L^2 ที่ใช้ในตำรา Werner 2007. สูตรเดียวกันยังใช้ได้เมื่อแทน L^2 ด้วย L^1_{loc}; สำหรับ $W^{m,p}$ เราใช้สูตรเดียวกันโดยเปลี่ยน L^2 เป็น L^p ตามความหมายของอนุพันธ์อ่อนใน L^p.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

สูตรนี้คือการแยกส่วนที่เราคุ้นเคย

$$\int f'\varphi = -\int f\varphi'$$

แต่เขียนกลับด้าน: เราถือว่าสูตรนี้เป็น*นิยาม*ของ f' ไม่ใช่ผลที่ต้องพิสูจน์. ถ้ามีฟังก์ชัน g ที่ทำให้สูตรเป็นจริงกับทุก φ เราก็เรียก g ว่าอนุพันธ์อ่อน. เราเริ่มจาก L^2 ตามตำรา; สูตรเดียวกันใช้ได้กับ L^1_{loc} และ L^p ตามที่ระบุในนิยาม. เมื่อต้องการปริภูมิโซโบเลฟ เราจะเพิ่มเงื่อนไขว่า f และอนุพันธ์อ่อนทุกตัวอยู่ใน L^p. ฟังก์ชันที่มีมุมหนึ่งจุดอาจมีอนุพันธ์อ่อนได้ ถ้าความชันสองข้างมีขนาดจำกัด; แต่การกระโดดของค่าฟังก์ชันทำให้อนุพันธ์เป็นเดลตา ซึ่งไม่มีทางเป็นฟังก์ชัน L^2.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-04-24

บทตั้ง 10.2.1: อนุพันธ์อ่อนมีเพียงหนึ่งเดียว

ถ้า $g, h \in L^2(\Omega)$ เป็นอนุพันธ์อ่อนอันดับ α ของ $f \in L^2(\Omega)$ ทั้งคู่ แล้ว $g = h$ เกือบทุกที่บน Ω.

พิสูจน์. จากนิยาม,

$$\int_\Omega (g-h)\varphi\,dx = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

ดังนั้นดิสทริบิวชันปรกติ T_{g-h} เป็นศูนย์. โดยข้อเท็จจริงใน §10.1.2 การส่ง $u \mapsto T_u$ หนึ่งต่อหนึ่งบน $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; จึง $g-h=0$ เกือบทุกที่. □

บทตั้ง 10.2.2: อนุพันธ์อ่อนสอดคล้องกับอนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน

ถ้า $f, g \in L^2(\Omega)$ และ g เป็นอนุพันธ์อ่อนของ f อันดับ α แล้ว $T_g = D^{(\alpha)}T_f$ ในความหมายของดิสทริบิวชัน.

พิสูจน์. สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(D^{(\alpha)}T_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f D^\alpha\varphi = \int_\Omega g\varphi = T_g(\varphi).$$

นี่คือความหมายของความเท่ากันของดิสทริบิวชัน. □

บทตั้ง 10.2.3: อนุพันธ์อ่อนที่เป็นศูนย์บังคับค่าคงตัว

ให้ $u \in H^1(0,1)$ และอนุพันธ์อ่อน u' เป็นศูนย์เกือบทุกที่. แล้วมีค่าคงตัว $c \in \mathbb{C}$ ซึ่ง $u = c$ เกือบทุกที่บน $(0,1)$.

พิสูจน์. ให้ $\psi \in \mathcal{D}(0,1)$ และ $\int_0^1 \psi = 0$. ตั้ง

$$\varphi(x) := \int_0^x \psi(t)\,dt.$$

เพราะ ψ มีตัวรองรับกระชับและมีปริพันธ์ศูนย์, φ จึงเป็นศูนย์นอกช่วงที่มีตัวรองรับของ ψ; ดังนั้น $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ และ $\varphi' = \psi$. จากนิยามของอนุพันธ์อ่อน,

$$\int_0^1 u\psi = \int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 u'\varphi = 0.$$

เลือก $\chi \in \mathcal{D}(0,1)$ ที่ $\int_0^1 \chi = 1$ และให้ $c := \int_0^1 u\chi$. สำหรับ $\psi \in \mathcal{D}(0,1)$ ใด ๆ, ฟังก์ชัน $\psi - (\int\psi)\chi$ มีปริพันธ์ศูนย์; จึง

$$\int_0^1 u\psi = \Big(\int_0^1 \psi\Big)c = \int_0^1 c\psi.$$

เพราะฟังก์ชันทดสอบทุกตัวอ่านค่า $u-c$ ได้ศูนย์, ข้อเท็จจริงเรื่องดิสทริบิวชันปรกติใน §10.1.2 ให้ $u = c$ เกือบทุกที่. □

ตัวอย่างที่คำนวณมือได้.

1. ให้ $f(x) = x(1-x)$ บน $(0,1)$. อนุพันธ์คลาสสิกคือ $g(x) = 1-2x$ และอยู่ใน L^2. โดยการแยกส่วน (หรือเพราะ f เรียบและต่อเนื่องถึงขอบ) g เป็นอนุพันธ์อ่อน. เราคำนวณ

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2(1-x)^2dx = \frac{1}{30}, \qquad \|f'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (1-2x)^2dx = \frac{1}{3}.$$

ดังนั้น $\|f\|_{H^1}^2 = \frac{1}{30}+\frac{1}{3} = \frac{11}{30}$ และ $\|f\|_{H^1} = 0.6055300708$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

2. ให้ $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ บน $(-1, 1)$ เป็น**ฟังก์ชันรูปหมวก** (hat function). อนุพันธ์อ่อนคือ

$$g(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 < x < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

ซึ่งเท่ากับอนุพันธ์คลาสสิกเกือบทุกที่. แล้ว

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{3}, \qquad \|g\|_{L^2}^2 = 2,$$

จึง $\|f\|_{H^1}^2 = \frac{8}{3}$ และ $\|f\|_{H^1} = 1.6329931619$. สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$, แยกส่วนบน $(-1,0)$ และ $(0,1)$ แล้วพจน์ขอบที่ 0 หักล้างกันเพราะ f ต่อเนื่อง; ดังนั้นความชันเป็นอนุพันธ์อ่อน. มุมที่ 0 ไม่ทำให้ f หลุดจาก H^1.

3. ให้ $f(x) = |x|$ บน $(-1, 1)$. อนุพันธ์อ่อนคือ $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (นิยามเป็น 1 สำหรับ $x > 0$ และ -1 สำหรับ $x < 0$; ค่าที่ 0 ไม่สำคัญ). เช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปหมวก, $\|f\|_{H^1}^2 = \frac{8}{3}$ และ $\|f\|_{H^1} = 1.6329931619$. แต่ f ไม่อยู่ใน H^2: อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันอันดับสองของ f คือ $2\delta_0$, ซึ่งไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ. เลือก $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$ ที่ $\varphi(0) = 1$; การแยกส่วนสองครั้งบนสองช่วงให้

$$(T_f)''(\varphi) = T_f(\varphi'') = \int_{-1}^{1} |x| \varphi''(x)\, dx = 2\varphi(0) = 2.$$

ถ้ามีอนุพันธ์อ่อนอันดับสอง $h \in L^2$ แล้ว $T_h = (T_f)'' = 2\delta_0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $2\delta_0$ ไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ; ดังนั้น $|x| \notin H^2(-1,1)$. ตัวเลข 2 มีแบบทดสอบยืนยัน.

ข้อสรุปสำคัญคือ: การมีมุมไม่ทำให้หลุดจาก H^1 แต่การกระโดดของค่าฟังก์ชันทำให้หลุด. ให้ $H(x) = 0$ สำหรับ $x < 0$ และ $H(x) = 1$ สำหรับ $x \geq 0$. สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(-1,1)$,

$$(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_0^1 \varphi'(x)dx = \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

ดังนั้นบน $(-1,1)$ อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันของ $H|_{(-1,1)}$ คือ δ_0. เพราะ δ_0 ไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ จึงไม่มีฟังก์ชัน $g \in L^2(-1,1)$ ที่เป็นอนุพันธ์อ่อนของ $H|_{(-1,1)}$; นั่นคือ $H \notin H^1(-1,1)$. นี่คือคำตอบของสถานการณ์ที่สอง: ขอบขั้นบันไดไม่ใช่ฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อ่อนเป็นฟังก์ชัน; อนุพันธ์ของมันเป็นเดลตา. เมื่อเราเบลอด้วย S_ε เราจึงได้ฟังก์ชัน S_ε' ที่มีนอร์ม $1/\sqrt{3\varepsilon}$ ซึ่งโตเมื่อ $\varepsilon \to 0$ และไม่ได้ลู่เข้าใน L^2 ไปยังอนุพันธ์ของขั้นบันได.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

10.2.2 ปริภูมิโซโบเลฟและโครงสร้างฮิลเบิร์ต

นิยาม 10.2.2: ปริภูมิโซโบเลฟ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด, $m \in \mathbb{N}_0$ และ $1 \leq p \leq \infty$. นิยาม

$$W^{m,p}(\Omega) := \big\{ f \in L^p(\Omega) : D^{(\alpha)} f \in L^p(\Omega) \text{ มีอยู่สำหรับทุก } |\alpha| \leq m \big\},$$

พร้อมนอร์ม

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{(\alpha)} f\|_{L^p}^p \Big)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty),$$

และกรณี $p = \infty$ ใช้**ซูพรีมัม** (supremum) ซึ่งเป็นขอบบนที่เล็กที่สุด แทนผลบวกกำลัง p. เราเขียน $H^m(\Omega) :=$

$W^{m,2}(\Omega)$ พร้อมผลคูณภายใน

$$\langle f, g\rangle_{H^m} := \sum_{|\alpha|\le m} \langle D^{(\alpha)} f, D^{(\alpha)} g\rangle_{L^2}.$$

สุดท้าย $H_0^m(\Omega)$ คือส่วนปิดของ $\mathcal{D}(\Omega)$ ใน $H^m(\Omega)$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

H^1 คือเซตของฟังก์ชัน L^2 ที่ตัวมันและอนุพันธ์อ่อนอันดับหนึ่งอยู่ใน L^2. นอร์มของมันวัดทั้ง “ขนาดของค่า” และ “ขนาดของความชัน”. ฟังก์ชันที่มีมุมหนึ่งจุดแต่ความชันมีขอบเขตจึงอยู่ใน H^1; ฟังก์ชันที่กระโดดไม่อยู่ใน H^1. การเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตทำให้เราฉาย ใช้ทฤษฎีบทรีสซ์ และใช้การลู่เข้าแบบอ่อนได้เหมือนในบทก่อน ๆ.

ทฤษฎีบท 10.2.4: ปริภูมิโซโบเลฟเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด. แล้ว $H^m(\Omega)$ และ $H_0^m(\Omega)$ เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต.

พิสูจน์. **แนวคิด.** อ่านลำดับ Cauchy ผ่านอนุพันธ์แต่ละอัน, ใช้ความบริบูรณ์ของ L^2 เพื่อได้ลิมิตของทุกอนุพันธ์, แล้วตรวจว่าลิมิตเหล่านั้นสอดคล้องกันตามนิยามอนุพันธ์อ่อน.

1. **ผลคูณภายใน.** $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^m}$ เป็นผลคูณภายในเพราะเป็นผลบวกของผลคูณภายในบน L^2 และนอร์มที่ได้คือ $\|\cdot\|_{H^m}$.

2. **ลิมิตของแต่ละอนุพันธ์.** ให้ (f_j) เป็นลำดับ Cauchy ใน H^m. สำหรับทุก $|\alpha| \le m$, เพราะ

   $$\|D^{(\alpha)} f_j - D^{(\alpha)} f_k\|_{L^2} \le \|f_j - f_k\|_{H^m},$$

   ลำดับ $(D^{(\alpha)} f_j)$ เป็น Cauchy ใน L^2. โดยความบริบูรณ์ของ L^2 มี $g_\alpha \in L^2$ ซึ่ง $D^{(\alpha)} f_j \to g_\alpha$ ใน L^2. เราเขียน $f := g_0$ สำหรับพหุดัชนีศูนย์.

3. **ตรวจนิยามอนุพันธ์อ่อน.** ให้ $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. จากนิยามของอนุพันธ์อ่อนของ f_j,

   $$\int g_\alpha \varphi = \lim_{j\to\infty} \int D^{(\alpha)} f_j\, \varphi = \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int f_j D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int f D^\alpha \varphi.$$

   การสลับลิมิตทำได้เพราะ $D^{(\alpha)} f_j \to g_\alpha$ และ $f_j \to f$ ใน L^2, ขณะที่ φ และ $D^\alpha\varphi$ เป็นฟังก์ชัน L^2 บนตัวรองรับกระชับ. สมการนี้บอกว่า g_α เป็นอนุพันธ์อ่อนของ f อันดับ α ทุก $|\alpha| \le m$; ดังนั้น $f \in H^m$.

4. **ลู่เข้าในนอร์ม.** จากขั้นที่ 2, $D^{(\alpha)} f_j \to D^{(\alpha)} f$ ใน L^2 ทุก $|\alpha| \le m$; จึง $\|f_j - f\|_{H^m} \to 0$. ดังนั้น H^m บริบูรณ์.

5. H_0^m**.** H_0^m ถูกนิยามให้เป็นส่วนปิดของ $\mathcal{D}(\Omega)$ ภายใน H^m. เพราะ H^m บริบูรณ์และ H_0^m เป็นเซตปิด, ลำดับ Cauchy ใน H_0^m มีลิมิตใน H^m ที่ยังอยู่ใน H_0^m; ผลคูณภายในก็สืบทอดมาจาก H^m. จึงเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต.

สรุป: H^m สืบทอดความบริบูรณ์จาก L^2 ทีละอนุพันธ์; H_0^m ได้จากการปิดปริภูมิของฟังก์ชันทดสอบ. □

ทฤษฎีบท 10.2.5: ความหนาแน่นของฟังก์ชันเรียบในปริภูมิโซโบเลฟ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด และ $1 \le p < \infty$. แล้ว $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ หนาแน่นใน $W^{m,p}(\Omega)$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ร่องพิสูจน์. **แนวคิด.** แบ่ง f เป็นชิ้นที่มีตัวรองรับกระชับ แล้วทำให้แต่ละชิ้นเรียบด้วยการสังวัตนาการ.

เลือกพาร์ทิชันของเอกภาพ $\sum_k \eta_k = 1$ ซึ่งมีตัวรองรับเฉพาะที่ใน Ω; แต่ละ η_k เป็น**ฟังก์ชันตัดตอน** (cut-off function) เรียบ. การคูณ f ด้วย η_k ทำให้ $\eta_k f$ มีอนุพันธ์อ่อนถึงอันดับ m ใน L^p และหายไปนอกเซตกระชับ $\operatorname{supp}\eta_k$; จากการประมาณด้วยลำดับดิแรก (Alt 2012, บทตั้ง 2.23) เลือก ε_k ให้

$$\|\rho_{\varepsilon_k} * (\eta_k f) - \eta_k f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \delta 2^{-k}.$$

เลือก ε_k เล็กพอให้ตัวรองรับของชิ้นที่สังวัตนาการยังอยู่ในย่านที่ครอบครัว $\operatorname{supp}\eta_k$ มีความจำกัดเฉพาะที่. ผลบวกเฉพาะที่

$$f_\delta := \sum_k \rho_{\varepsilon_k} * (\eta_k f)$$

จึงเรียบ และผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนในนอร์ม $W^{m,p}$ น้อยกว่า δ. ดังนั้น $f_\delta \to f$ ใน $W^{m,p}(\Omega)$ เมื่อ $\delta \to 0$. การสร้างพาร์ทิชันและการประมาณเต็มรูปแบบเป็นทฤษฎีบท 2.24 ของ Alt 2012; เราไม่พิสูจน์รายละเอียดเหล่านั้นในบทนี้. □

ทฤษฎีบท 10.2.6: กฎผลคูณสำหรับอนุพันธ์อ่อน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิด, $1 \le p \le \infty$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. ถ้า $f \in W^{m,p}(\Omega)$ และ $g \in W^{m,p'}(\Omega)$ แล้ว $fg \in W^{m,1}(\Omega)$ และสำหรับทุก $|\alpha| \le m$,

$$D^{(\alpha)}(fg) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{(\alpha-\beta)} f \, D^{(\beta)} g$$

เกือบทุกที่.

แนวคิด (ไม่พิสูจน์ในบทนี้). เมื่อ f, g เรียบ สูตรเป็นกฎไลบ์นิซธรรมดา. สำหรับฟังก์ชันโซโบเลฟ ต้องส่งสูตรนี้ผ่านการประมาณและควบคุมผลคูณของอนุพันธ์ทุกอันดับด้วยอสมการโฮลเดอร์; กรณีปลาย $p = 1$ และ $p = \infty$ ต้องระวังการเลือกตัวประกอบที่จะประมาณ. ผลเต็มรูปแบบและบทพิสูจน์อยู่ใน Alt 2012, ทฤษฎีบท 2.25; เราไม่พิสูจน์รายละเอียดในบทนี้. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): กฎลูกโซ่

ถ้า $\tau : \tilde{\Omega} \to \Omega$ เป็นดิฟเฟโอมอร์ฟิซึมแบบ C^1 ที่อนุพันธ์และอนุพันธ์ผกผันมีขอบเขต และ $f \in W^{1,p}(\Omega)$ แล้ว $f \circ \tau \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ พร้อมสูตร

$$\partial_i (f \circ \tau) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f) \circ \tau \, \partial_i \tau_j .$$

ข้อความนี้เป็น Alt 2012, ทฤษฎีบท 2.26. เราไม่ใช้ในบทนี้ จึงไม่พิสูจน์. บทตั้ง 2.27 ในแหล่งเดียวกันกล่าวว่าลิพชิทซ์แมปส่งเซตที่มีการวัดศูนย์ ไปยังเซตที่มีการวัดศูนย์; เราไม่ใช้ผลนี้ในบทนี้.

10.2.3 การแปลงฟูเรียร์กับการนับอนุพันธ์

การแปลงฟูเรียร์เปลี่ยนอนุพันธ์เป็นการคูณด้วย $i\xi$. สำหรับปริภูมิโซโบเลฟ นี่หมายความว่าการนับอนุพันธ์กลายเป็นการชั่งน้ำหนักความถี่สูง. เราจึงสามารถตัดสินว่าฟังก์ชันอยู่ใน H^m หรือไม่โดยดูการสลายของ $\mathcal{F}f$ ที่อินฟินิตี้.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 10.2.7: การแปลงฟูเรียร์บน L^2 และลักษณะของ H^m

ให้ $\mathcal{F}$ เป็นการแปลงฟูเรียร์ที่นิยามบน $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. $\mathcal{F}$ ขยายเป็นการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ และ
$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$
สำหรับ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ และ $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}$.
2. สำหรับ $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ และ $|\alpha| \le m$,
$$\mathcal{F}(D^{(\alpha)}f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}f \qquad \text{เกือบทุกที่.}$$
3. สำหรับ $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ ก็ต่อเมื่อ $(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ยิ่งกว่านั้น
$$\|f\|_{H^m}^2 \asymp \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi,$$
โดยค่าคงตัวสองค่าขึ้นกับ m, n เท่านั้น.

พิสูจน์. 1. **บน $\mathcal{S}$.** Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.8: $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงและรักษานอร์ม L^2. เพราะ $\mathcal{S}$ หนาแน่นใน L^2 (จากความหนาแน่นของ C_c^∞ ในบทปริภูมิของฟังก์ชัน), การส่งนี้ขยายด้วยความต่อเนื่องเป็นการส่งเชิงเส้นต่อเนื่อง $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ ที่รักษานอร์ม. ตัวผกผัน $\mathcal{F}^{-1}$ ขยายในลักษณะเดียวกันและเป็นตัวผกผันของ $\mathcal{F}$ บน L^2 จึงได้การส่งหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง. สูตร $L^1 \to C_0$ คือ Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.2.

2. **สูตรอนุพันธ์.** จากสูตรการแปลงฟูเรียร์ของอนุพันธ์อ่อน (Werner 2007, บทตั้ง V.2.11), หรือจากสูตรบน $\mathcal{S}'$ ที่พิสูจน์ไว้ในหัวข้อ 10.1.3, ถ้า $f \in H^m$ แล้ว
$$\mathcal{F}(D^{(\alpha)}f) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f \qquad (|\alpha| \le m)$$
ในความหมายของดิสทริบิวชัน. ข้างซ้ายอยู่ใน L^2 (การแปลงบน $\mathcal{S}'$ ของฟังก์ชันใน L^2 ตรงกับการแปลงบน L^2) และข้างขวาอยู่ใน L^1_{loc}; เอกลักษณ์ของดิสทริบิวชันปรกติในหัวข้อ 10.1.2 ทำให้ทั้งสองเท่ากันเกือบทุกที่. ดังนั้นข้างขวาก็อยู่ใน L^2 ด้วย.

3. **ทิศกลับ.** สมมติว่า $f \in L^2$ และ $(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}f \in L^2$. สำหรับ $|\alpha| \le m$ กำหนด
$$g_\alpha := \mathcal{F}^{-1}\big((i\xi)^\alpha \mathcal{F}f\big) \in L^2.$$
ให้ $\varphi \in \mathcal{S}$. เอกลักษณ์ปาร์เซวาลและสูตรอนุพันธ์บน $\mathcal{S}$ ให้
$$\int g_\alpha\, \overline{\varphi} = \int (i\xi)^\alpha \mathcal{F}f\, \overline{\mathcal{F}\varphi} = (-1)^{|\alpha|}\int f\, \overline{D^\alpha \varphi}.$$
ดังนั้น, โดยเฉพาะเมื่อ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, g_α เป็นอนุพันธ์อ่อนอันดับ α ของ f. จึง $f \in H^m$.

4. **ความสมมูลของนอร์ม.** สำหรับทุก ξ, $|\xi^\alpha|^2 \le (1+|\xi|^2)^m$ เมื่อ $|\alpha| \le m$. ในทางกลับกัน การกระจายทวินามให้
$$(1+|\xi|^2)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}|\xi^\alpha|^2,$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ซึ่งเป็นผลบวกจำกัดที่มีสัมประสิทธิ์บวก. อินทิเกรตเทียบกับ $|\mathcal{F}f|^2$ และใช้เอกลักษณ์ปาร์เซวาลกับ $D^{(\alpha)}f$ (ข้อ (2)) ได้ความสมมูลของนอร์ม.

สรุป: H^m คือเซตของฟังก์ชัน L^2 ที่การแปลงฟูเรียร์สลายเร็วพอที่จะคูณด้วย $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ แล้วยังอยู่ใน L^2. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): อสมการเฮาส์ดอร์ฟ–ยัง

สำหรับ $1 \le p \le 2$ และเลขชี้กำลังสังยุค q ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), การแปลงฟูเรียร์ขยายเป็นการส่งต่อเนื่อง $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ และ

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^q} \le (2\pi)^{n/2-n/p}\|f\|_{L^p}.$$

นี่คือ Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.10. เราไม่ใช้ในบทนี้และไม่พิสูจน์; กล่าวไว้เพื่อให้เห็นว่าการแปลงฟูเรียร์ไม่ได้จำกัดอยู่บน L^2 เท่านั้น.

ลองเอง: นอร์ม H^1 จากปลองเชอเรล

ให้ $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ บน $\mathbb{R}$. ด้วยการแปลงฟูเรียร์ตาม Werner 2007,

$$\mathcal{F}f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\xi|}.$$

โดยทฤษฎีบทข้างต้น,

$$\|f\|_{H^1}^2=\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)\frac{\pi}{2}e^{-2|\xi|}d\xi=\frac{\pi}{2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big)=\frac{3\pi}{4}.$$

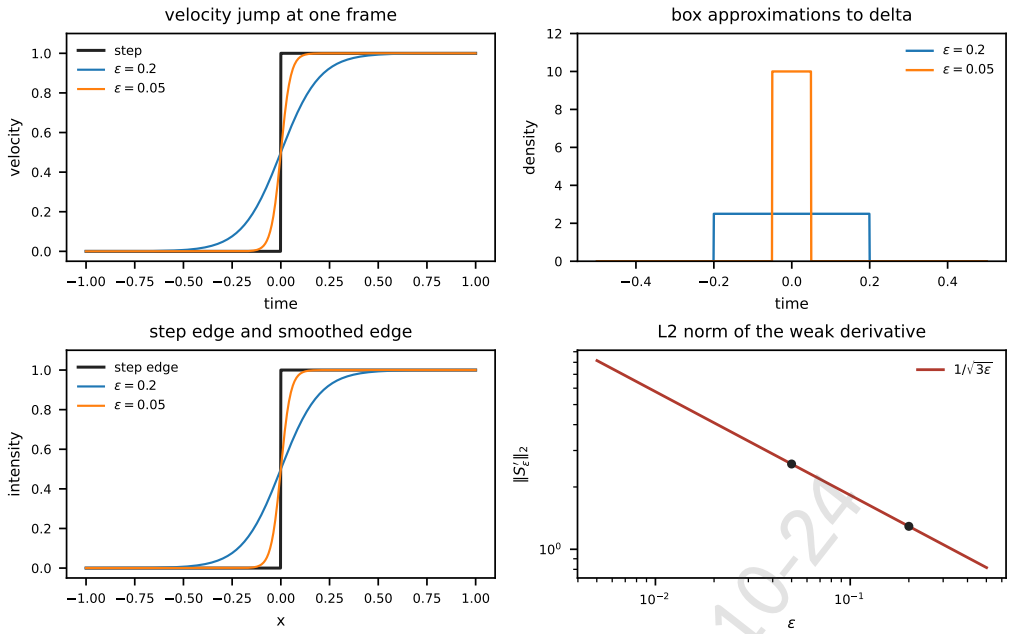
ดังนั้น $\|f\|_{H^1}=\sqrt{3\pi/4}=1.5349900619$. ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยันทั้งสูตรและการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขบนช่วงจำกัด.

รูปที่ 10.2 รวมภาพจากการคำนวณในบท. ซ้ายบนคือความเร็วที่กระโดดหนึ่งครั้งพร้อมการทำให้เรียบ; ขวาบนคือกล่องความสูง $1/(2\varepsilon)$ ซึ่งมีมวลหนึ่งและแคบลงเมื่อ $\varepsilon \to 0$; ล่างซ้ายคือขอบขั้นบันไดซึ่งไม่มีอนุพันธ์อ่อนเป็นฟังก์ชัน; ล่างขวาคือนอร์ม $\|S_\varepsilon'\|_{L^2}=1/\sqrt{3\varepsilon}$ ที่โตเมื่อ ε เล็กลง. สี่ภาพนี้ไม่ใช่ภาพจากกล้องหรือเอนจินจริง แต่มาจากแบบจำลองใน `code/funkana/ch10.py`. ส่วนนี้ผู้เรียบเรียงเพิ่มเข้ามา ไม่มีในต้นฉบับ.

สรุปใจความ

- อนุพันธ์อ่อนคือฟังก์ชัน $g \in L^2$ ที่ทำให้สูตรการแยกส่วนเป็นจริงกับทุกฟังก์ชันทดสอบ; มันมีเพียงหนึ่งเดียวเกือบทุกที่.
- H^m คือเซตของฟังก์ชัน L^2 ที่อนุพันธ์อ่อนทุกอันดับถึง m อยู่ใน L^2; H^m และ H_0^m เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต.
- ฟังก์ชันที่มีมุมแต่ความชันมีขอบเขตอยู่ใน H^1; ฟังก์ชันที่กระโดดไม่อยู่ เพราะอนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันเป็นเดลตา.
- การแปลงฟูเรียร์เปลี่ยน H^m เป็นเงื่อนไขการชั่งน้ำหนักความถี่; นอร์ม H^m สมมูลกับ $\|(1+|\xi|^2)^{m/2}\mathcal{F}f\|_{L^2}$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 10.2: สี่ภาพของสถานการณ์จำลองในบท: การกระโดดของความเร็ว, การประมาณเดลตาด้วยกล่อง, ขอบขั้นบันไดกับการทำให้เรียบ, และการโตของนอร์ม L^2 ของอนุพันธ์เมื่อ ε เล็กลง.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(อนุพันธ์อ่อนจากการแยกส่วน)** ให้ $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$ บน $(-1, 1)$. จงหาอนุพันธ์อ่อน g และพิสูจน์ด้วยการแยกส่วนว่าสูตรนิยามเป็นจริง. แล้วคำนวณ $\|f\|_{H^1}$.

2. **(พหุนาม)** ให้ $f(x) = x(1-x)$ บน $(0, 1)$. จงหาอนุพันธ์อ่อนและคำนวณ $\|f\|_{H^1}^2$.

3. **(ขอบขั้นบันได)** ให้ $H(x) = 0$ สำหรับ $x < 0$ และ $H(x) = 1$ สำหรับ $x \geq 0$. จงแสดงว่า $H \notin H^1(-1, 1)$. แล้วให้ $S_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(x/\varepsilon))$ และคำนวณ $\|S_\varepsilon'\|_{L^2}^2$ พร้อมค่าที่ $\varepsilon = 0.2, 0.05, 0.01$.

4. **(นอร์มของขอบเรียบ)** จงคำนวณ $\|S_\varepsilon\|_{H^1(-1,1)}^2$ จากสูตรปิด และตรวจกับ $\varepsilon = 0.05$ ว่าได้ 7.6416666667.

5. **(กฎผลคูณ)** ให้ $f(x) = |x|$ และ $g(x) = x$ บน $(-1, 1)$. จงหาอนุพันธ์อ่อนของ fg และตรวจสูตรไลบ์นิซเกือบทุกที่. อธิบายว่าเกิดอะไรขึ้นที่ $x = 0$.

6. **(ฟูเรียร์)** ให้ $f(x) = 1/(1 + x^2)$. จงใช้ปลองเชอเรลคำนวณ $\|f\|_{H^1}$ และตรวจคำตอบเชิงตัวเลข.

7. **(H^1 กับ H^2)** จงแสดงว่า $|x| \in H^1(-1, 1)$ แต่ $|x| \notin H^2(-1, 1)$ และหาค่าของ $(T_{|x|})''(\eta)$ เมื่อเลือก $\eta \in \mathcal{D}(-1, 1)$ ที่ $\eta(0) = 1$.

อยู่บ้าน · Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. อนุพันธ์อ่อนคือ $g(x)=1$ บน $(-1,0)$ และ $g(x)=-1$ บน $(0,1)$; ค่าที่ 0 ไม่สำคัญ. สำหรับ $\varphi\in\mathcal{D}(-1,1)$,
$$\int_{-1}^{1} g\varphi = \int_{-1}^{0}\varphi - \int_{0}^{1}\varphi = -\int_{-1}^{1} f\varphi',$$
โดยแยกส่วนบนสองช่วงและใช้ $\varphi(\pm1)=0$; พจน์ขอบที่ 0 หักล้างกันเพราะ f ต่อเนื่อง. ดังนั้น g เป็นอนุพันธ์อ่อน. ต่อมา
$$\|f\|_{L^2}^2=\frac{2}{3},\qquad \|g\|_{L^2}^2=2,$$
จึง $\|f\|_{H^1}^2=\frac{8}{3}$ และ $\|f\|_{H^1}=1.6329931619$.

2. $f'=1-2x$. โดยการแยกส่วน,
$$\int_0^1 (1-2x)\varphi = -\int_0^1 x(1-x)\varphi'$$
สำหรับทุก $\varphi\in\mathcal{D}(0,1)$ เพราะพจน์ขอบที่ $0,1$ หาย. ดังนั้นอนุพันธ์อ่อนคือ $1-2x$. คำนวณ
$$\|f\|_{L^2}^2=\frac{1}{30},\qquad \|f'\|_{L^2}^2=\frac{1}{3},$$
จึง $\|f\|_{H^1}^2=\frac{11}{30}$ และ $\|f\|_{H^1}=0.6055300708$.

3. สำหรับ $\varphi\in\mathcal{D}(-1,1)$,
$$(T_H)'(\varphi) = -\int_0^1 \varphi' = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$
เพราะ δ_0 ไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ (§10.1.2) จึงไม่มี $g\in L^2(-1,1)$ ที่เป็นอนุพันธ์อ่อน; ดังนั้น $H|_{(-1,1)}\notin H^1(-1,1)$. สำหรับ S_ε,
$$S_\varepsilon'(x)=\frac{1}{2\varepsilon}\operatorname{sech}^2(x/\varepsilon),$$
และ
$$\|S_\varepsilon'\|_{L^2}^2=\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sech}^4(x/\varepsilon)\,dx=\frac{1}{4\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sech}^4 u\,du=\frac{1}{3\varepsilon}.$$
ที่ $\varepsilon=0.2,0.05,0.01$, ค่า $\|S_\varepsilon'\|_{L^2}^2=1/(3\varepsilon)$ คือ 1.6666666667, 6.6666666667, 33.3333333333 ตามลำดับ. ค่าสูงสุดของ S_ε' คือ $1/(2\varepsilon)=10$ ที่ $\varepsilon=0.05$; แบบทดสอบยืนยันทั้งสูตรและการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข.

4. จากสูตร
$$\|S_\varepsilon\|_{H^1(-1,1)}^2 = 1-\frac{\varepsilon}{2}\tanh\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon}\Big(\tanh\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{3}\tanh^3\frac{1}{\varepsilon}\Big).$$
ที่ $\varepsilon=0.05$, $\tanh(20)\approx 1$ จึงได้ประมาณ $1-0.025+\frac{1}{0.1}(1-\frac{1}{3})=0.975+6.6666667=7.6416667$. ค่าที่คำนวณจากสูตรและจากการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขตรงกันในแบบทดสอบ.

5. $fg=x|x|$. อนุพันธ์อ่อนคือ $2|x|$ เพราะสำหรับ $x\neq 0$, $(x|x|)'=|x|+x\operatorname{sgn}(x)=2|x|$. ตรวจด้วยการแยกส่วนบน $(-1,0)$ และ $(0,1)$; พจน์ขอบที่ 0 หายเพราะ fg ต่อเนื่อง. สูตรไลบ์นิซ $(fg)'=f'g+fg'$ ให้ $\operatorname{sgn}(x)\cdot x+|x|\cdot 1=2|x|$ เกือบทุกที่. ที่ $x=0$ อนุพันธ์คลาสสิกของ f ไม่มี แต่ค่าเดียวไม่กระทบอนุพันธ์อ่อน.

สมบัติร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. ตามที่คำนวณใน trybox, $\mathcal{F}f = \sqrt{\pi/2}e^{-|\xi|}$ และ

$$\|f\|_{H^1}^2 = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)e^{-2|\xi|}d\xi = \frac{3\pi}{4}.$$

ดังนั้น $\|f\|_{H^1} = 1.5349900619$. การหาปริพันธ์เชิงตัวเลขบน $[-80, 80]$ ให้ค่าใกล้เคียง; แบบทดสอบยืนยันถึงทศนิยม 5 ตำแหน่ง.

7. เราเห็นในตัวอย่างที่ 3 ว่า $|x| \in H^1(-1,1)$ โดยมีอนุพันธ์อ่อน $\operatorname{sgn}(x)$. อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชันของ $\operatorname{sgn}(x)$ คือ $2\delta_0$; จึง $(T_{|x|})'' = 2\delta_0$, ซึ่งไม่เป็นดิสทริบิวชันปรกติ. ถ้ามีอนุพันธ์อ่อนอันดับสอง $h \in L^2$ แล้ว $T_h = (T_{|x|})'' = 2\delta_0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้; ดังนั้น $|x| \notin H^2$. เลือก $\eta \in \mathcal{D}(-1,1)$ ที่ $\eta(0) = 1$. การแยกส่วนสองครั้งบนสองช่วงให้

$$(T_{|x|})''(\eta) = T_{|x|}(\eta'') = \int_{-1}^{1} |x|\eta''(x)\,dx = 2\eta(0) = 2,$$

ตรงกับ $2\delta_0(\eta)$. ตัวเลข 2 มีแบบทดสอบยืนยัน.

อ่านต่อ

ตอนนี้เรามีปริภูมิฮิลเบิร์ตของฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อ่อน และรู้ว่าขอบขั้นบันไดอยู่นอก H^1. คำถามต่อไปคือ: ฟังก์ชันใน H^1 มีค่าที่จุดหรือค่าที่ขอบได้หรือไม่, เมื่อใดมันมีตัวแทนต่อเนื่อง, และการฝังตัวจาก H^1 ไปยังปริภูมิฟังก์ชันที่เรียบกว่ากระชับเพียงใด. หน่วยถัดไปตอบคำถามนี้ด้วยการฝังตัวของโซโบเลฟ, **ทฤษฎีบทเรลลิช** (Rellich theorem) และ**ตัวดำเนินการเทรซ** (trace operator) ซึ่งส่งฟังก์ชันไปยังค่าที่ขอบ.

10.3 การฝังตัว เรลลิช และเทรซ

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในหน่วยที่แล้ว เราเห็นว่า H^1 ยอมให้ฟังก์ชันมีมุมได้ แต่ไม่ยอมให้กระโดด. คำถามธรรมชาติคือ: H^1 บังคับให้ฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่, บังคับให้มีค่าที่ขอบหรือไม่, และถ้าเรามีลำดับที่มีพลังงาน H^1 จำกัด เราจะดึงลำดับย่อยที่ลู่เข้าในนอร์มที่หยาบกว่าได้หรือไม่.

ภาพที่ต้องจำคือ: การฝังตัวของโซโบเลฟบอกว่า “พลังงานที่จำกัดซื้อความเรียบได้บางส่วน”. ในหนึ่งมิติ H^1 ซื้อ**ความต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์** (Hölder continuity) เลขชี้กำลัง $1/2$ ซึ่งหมายถึงผลต่างของค่าไม่เกินค่าคงตัวคูณระยะห่างยกกำลัง $1/2$. ในสองมิติ พลังงาน H^1 ไม่พอที่จะซื้อความต่อเนื่อง: ฟังก์ชันอาจพุ่งไปที่อินฟินิตี้ที่จุดหนึ่งได้. ทฤษฎีบทเรลลิชบอกว่าเมื่อโดเมนมีขอบเขต การฝังตัวลงในปริภูมิที่หยาบกว่านั้นกระชับ. ตัวดำเนินการเทรซขยายการจำกัดฟังก์ชันเรียบบนขอบให้เป็นการส่งต่อเนื่อง $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$.

10.3.1 การฝังตัวในหนึ่งมิติ

ปริภูมิของฟังก์ชันที่อนุพันธ์อันดับสูงสุดต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์เรียกว่า**ปริภูมิโฮลเดอร์** (Hölder space). เราใช้สัญกรณ์ $C^{k,\alpha}$ จากบทปริภูมิของฟังก์ชัน: $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \le 1$, และ $C^{k,\alpha}$ คือฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับ k โดยอนุพันธ์อันดับ k ต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์เลขชี้กำลัง α. เมื่อ $\alpha = 0$ เราเขียน $C^{k,0} := C^k$. บนช่วงปิด $[0,1]$ นอร์มคือผลบวกของซูพรีมัมของอนุพันธ์ถึงอันดับ k กับค่าคงที่โฮลเดอร์ของอนุพันธ์อันดับ k.

ร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 10.3.1: การฝังตัวของ $H^1(0,1)$ ในปริภูมิโฮลเดอร์

ให้ $u \in H^1(0,1)$. แล้ว u มีตัวแทนต่อเนื่องบน $[0,1]$ (ซึ่งเราเขียนด้วย u อีก) และ

1. $|u(x)-u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2(0,1)}$ สำหรับทุก $x, y \in [0,1]$;
2. $\|u\|_{L^\infty(0,1)} \le \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1(0,1)}$.

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow C^{0,1/2}[0,1]$ ต่อเนื่อง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียน u ใหม่เป็นปริพันธ์ของอนุพันธ์อ่อน ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์; แล้วควบคุมขนาดสูงสุดด้วยค่าเฉลี่ยบวกการแกว่ง.

1. **ตัวแทนต่อเนื่อง.** ให้ $U(x) := \int_0^x u'(t)\,dt$. เพราะ $u' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$, ปริพันธ์นิยามได้ทุก x และ U ต่อเนื่อง; ยิ่งกว่านั้น U เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์เพราะ
$$|U(x)-U(y)| \le \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |u'(t)|\,dt \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2}.$$
อนุพันธ์อ่อนของ U คือ u': สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ ฟูบินีให้ $\int_0^1 U\varphi' = \int_0^1 u'(t)\big(\varphi(1)-\varphi(t)\big)\,dt = -\int_0^1 u'\varphi$ เพราะ $\varphi(1)=0$. เพราะ U ต่อเนื่องบนช่วงมีขอบเขต $[0,1]$, $U \in L^2(0,1)$; และ $u' \in L^2(0,1)$ จึง $U \in H^1(0,1)$. ดังนั้นอนุพันธ์อ่อนของ $U-u$ เป็นศูนย์. โดยบทตั้งอนุพันธ์อ่อนที่เป็นศูนย์บังคับค่าคงตัว (§10.2.1), $U-u$ เท่ากับค่าคงตัวเกือบทุกที่; จึงมี c ซึ่ง $U-u=c$ เกือบทุกที่. เลือก $U_c = U-c$; แล้ว $U_c = u$ เกือบทุกที่ และ U_c ต่อเนื่อง. นี่คือตัวแทนต่อเนื่องของ u.

2. **ความต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์.** สำหรับ $x, y \in [0,1]$,
$$|u(x)-u(y)| = |U_c(x)-U_c(y)| \le \Big|\int_y^x |u'(t)|\,dt\Big| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2},$$
โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซ. นี่คือข้อ (1).

3. **ขอบเขตสูงสุด.** เนื่องจาก $|u|^2$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด จึงมีจุด c ที่ทำให้ $|u(c)|^2 = \min_{[0,1]}|u|^2 \le \int_0^1 |u(t)|^2 dt$; อสมการสุดท้ายมาจากค่าต่ำสุดไม่เกินค่าเฉลี่ยบนช่วงยาวหนึ่ง. ดังนั้น $|u(c)| \le \|u\|_{L^2}$. สำหรับ $x \in [0,1]$ ใช้ข้อ (1) กับ $|x-c|^{1/2} \le 1$,
$$|u(x)| \le |u(c)| + |u(x)-u(c)| \le \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}.$$
โดยอสมการ $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$,
$$\|u\|_\infty \le \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \le \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1}.$$

4. **ความต่อเนื่องของการฝังตัว.** จากข้อ (1) และ (2), สำหรับ $\|u\|_{H^1} \le 1$ เราได้ $\|u\|_\infty \le \sqrt{2}$ และกึ่งนอร์ม $C^{0,1/2}$ ไม่เกิน 1. ดังนั้นการฝังตัวมีขอบเขต; ความเป็นเชิงเส้นทำให้ต่อเนื่อง.

สรุป: ในหนึ่งมิติ พลังงาน H^1 ควบคุมทั้งขนาดสูงสุดและการแกว่งแบบรากที่สองของระยะทาง. ค่าคงตัว $\sqrt{2}$ มาจากการพิสูจน์และไม่จำเป็นต้องคม. $\square$

ฉบับร่าง · Preprint 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ถ้า u กระโดดที่จุดหนึ่ง การแกว่ง $|u(x)-u(y)|$ จะไม่เล็กเมื่อ x, y เข้าใกล้จุดกระโดด แม้ $|x-y|\to 0$. แต่ข้อ (1) บังคับให้การแกว่งเล็กลงอย่างน้อยตามรากที่สองของระยะทาง. เลขชี้กำลัง $1/2$ คมจริง: $u(x)=\sqrt{x}/(1-\log x)$ ต่อเนื่องที่ศูนย์และอยู่ใน $H^1(0,1)$, แต่ $u(x)/x^\beta\to\infty$ เมื่อ $x\downarrow 0$ สำหรับทุก $\beta>1/2$. ดังนั้น $H^1(0,1)$ ไม่ฝังใน $C^{0,\beta}[0,1]$ ด้วยเลขชี้กำลังที่มากกว่า $1/2$.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): การฝังตัวทั่วไป

สำหรับ $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ เปิด มีขอบเขต และมี**ขอบลิพชิทซ์** (Lipschitz boundary) ซึ่งเขียนเป็นกราฟของฟังก์ชันลิพชิทซ์ได้เฉพาะที่, $m\ge 1$, $1\le p<\infty$, $k\ge 0$ และ $0\le\alpha\le 1$:

- ถ้า $m-\frac{n}{p}=k+\alpha$ กับ $0<\alpha<1$ แล้ว $W^{m,p}(\Omega)$ ฝังตัวอย่างต่อเนื่องใน $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- ถ้า $m-\frac{n}{p}>k+\alpha$ แล้วการฝังตัวใน $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ ต่อเนื่องและกระชับ.

นี่คือ Alt 2012, ทฤษฎีบท 8.13. กรณี $n=1$, $m=1$, $p=2$ ให้ $m-\frac{n}{p}=\frac{1}{2}$ ซึ่งตรงกับ $k=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$; นั่นคือทฤษฎีบทการฝังตัวของ $H^1(0,1)$ ในปริภูมิโฮลเดอร์ที่เราพิสูจน์ข้างต้น. ผลทั่วไปนี้ไม่พิสูจน์ในบทนี้ เพราะต้องใช้การประมาณบนขอบและการแบ่งพาร์ทิชันของเอกภาพ. Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.12 ให้ตัวแทนต่อเนื่องภายใต้สมมติฐาน $m>k+n/2$; ในกรณี $n=1$, $m=1$, $k=0$ มันยืนยันความต่อเนื่องของตัวแทน, ส่วนขอบเขตโฮลเดอร์เลขชี้กำลัง $1/2$ ที่พิสูจน์ในหัวข้อนี้มาจาก Alt 2012, ทฤษฎีบท 8.13(1).

10.3.2 เลขโซโบเลฟและความคมของเงื่อนไข

นิยาม 10.3.1: เลขโซโบเลฟ

ให้ $m\in\mathbb{N}_0$, $1\le p\le\infty$, $k\in\mathbb{N}_0$ และ $0\le\alpha\le 1$. **เลขโซโบเลฟ** (Sobolev number)ของ $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ คือ

$$m-\frac{n}{p},$$

และของ $C^{k,\alpha}$ คือ $k+\alpha$. จำนวนนี้วัด “ความเรียบ” ของปริภูมิเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของมาตราส่วน: ยิ่งเลขมาก ปริภูมิยิ่งควบคุมอนุพันธ์ได้มากเมื่อเทียบกับมิติ.

ทฤษฎีบท 10.3.2: ความคมของเลขโซโบเลฟในสองมิติ

ให้ $B_1\subset\mathbb{R}^2$ เป็นดิสก์หนึ่งหน่วย. สำหรับ $\varrho\in\mathbb{R}$ กำหนด $f_\varrho(x)=|x|^\varrho$ เมื่อ $x\neq 0$; ถ้า $\varrho>0$ ให้ $f_\varrho(0)=0$ และถ้า $\varrho=0$ ให้ $f_0\equiv 1$. แล้ว

$$f_\varrho\in H^1(B_1)\quad\Longleftrightarrow\quad\varrho\ge 0.$$

พิสูจน์. สำหรับ $\varrho\neq 0$, $\nabla f_\varrho(x)=\varrho|x|^{\varrho-2}x$, จึง

$$|\nabla f_\varrho(x)|^2=\varrho^2|x|^{2\varrho-2}.$$

ในพิกัดเชิงขั้ว $dx=2\pi r\,dr$ บนดิสก์หนึ่งหน่วย,

$$\int_{B_1}|\nabla f_\varrho|^2dx=2\pi\varrho^2\int_0^1 r^{2\varrho-2}r\,dr=2\pi\varrho^2\int_0^1 r^{2\varrho-1}dr.$$

ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-21

ปริพันธ์นี้มีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อ $2\varrho - 1 > -1$, นั่นคือ $\varrho > 0$. ในทางกลับกัน

$$\int_{B_1} |f_\varrho|^2 dx = 2\pi \int_0^1 r^{2\varrho+1} dr$$

มีค่าจำกัดเมื่อ $2\varrho + 1 > -1$, นั่นคือ $\varrho > -1$. ถ้า $\varrho > 0$, อินทิเกรตโดยส่วนบน $B_1 \setminus \overline{B_\varepsilon}$ แล้วพจน์ขอบด้านในมีขนาดไม่เกิน $2\pi\varepsilon^{\varrho+1}\|\varphi\|_\infty$ สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(B_1)$. มันลู่สู่ศูนย์; ดังนั้นเกรเดียนต์คลาสสิกเป็นอนุพันธ์อ่อนบนทั้ง B_1, และปริพันธ์สองตัวที่คำนวณไว้ให้ $f_\varrho \in H^1$. ถ้า $-1 < \varrho < 0$, อนุพันธ์อ่อนบนดิสก์เจาะรูต้องตรงกับเกรเดียนต์คลาสสิกที่คำนวณไว้, ซึ่งไม่มีนอร์ม L^2 จำกัด; จึง $f_\varrho \notin H^1$. ถ้า $\varrho \le -1$ ฟังก์ชันไม่อยู่ใน L^2 ตั้งแต่แรก. ส่วน $\varrho = 0$ ใช้ $f_0 \equiv 1$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวและอยู่ใน H^1. รวมทุกกรณีได้ $f_\varrho \in H^1$ ก็ต่อเมื่อ $\varrho \ge 0$. □

ข้อควรระวัง: เลขโซโบเลฟกับกรณี วิกฤต

เลขโซโบเลฟของ $H^1(\mathbb{R}^2)$ คือ $1 - \frac{2}{2} = 0$. ค่าที่ $\varrho = 0$ เป็นกรณี วิกฤต: ฟังก์ชันคงตัวยังอยู่ใน H^1 แต่ฟังก์ชันที่มีภาวะเอกฐานแรงกว่าเล็กน้อยอาจหลุด. ตัวอย่าง $\log(-\log r)$ ข้างล่างแสดงว่าความเรียบที่เลข 0 ไม่พอสำหรับความต่อเนื่อง. อย่าอ่านเลขโซโบเลฟว่า “$\varrho > 0$ ทุกกรณี”; ต้องตรวจฟังก์ชันที่จุดวิกฤตแยกกัน.

ทฤษฎีบท 10.3.3: ฟังก์ชัน H^1 ที่ไม่มีขอบเขตในสองมิติ

ให้ $B_{1/2} \subset \mathbb{R}^2$ เป็นดิสก์รัศมี $1/2$ และ

$$f(x) := \log(-\log|x|) \qquad (0 < |x| < 1/2), \qquad f(0) := 0,$$

โดยใช้ค่า $f(0) = 0$ เป็นตัวแทนบนจุดกำเนิด. แล้ว $f \in H^1(B_{1/2})$ แต่ f ไม่มีขอบเขตเมื่อ $|x| \to 0$. โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $H^1(B_{1/2}) \not\subset L^\infty(B_{1/2})$.

พิสูจน์.

1. **ขนาด.** เพราะ f ต่อเนื่องและมีขอบเขตบนวงแหวน $1/4 \le |x| < 1/2$, $\int |f|^2$ บนบริเวณนั้นมีจำกัด. ใกล้ 0, $|f(r)| = \log(-\log r)$. ให้ $u = -\log r \to \infty$; แล้ว $\int_0^{1/4} r \log^2(-\log r)\, dr$ มีจำกัดเพราะ $\log^2 u$ โตช้ากว่ากำลังใด ๆ ของ u เมื่อ $u \to \infty$. เราจึงได้ $f \in L^2$.

2. **เกรเดียนต์.** สำหรับ $0 < r < 1/2$,

$$\partial_r f(r) = \frac{1}{r \log r}, \qquad |\nabla f(x)|^2 = \frac{1}{r^2 (\log r)^2}.$$

ดังนั้นสำหรับ $0 < \rho < 1/2$,

$$\int_{|x|<\rho} |\nabla f|^2 dx = 2\pi \int_0^\rho \frac{r\, dr}{r^2(\log r)^2} = 2\pi \int_0^\rho \frac{dr}{r(\log r)^2} = \frac{2\pi}{-\log \rho}.$$

ปริพันธ์มีค่าจำกัดเมื่อ $\rho > 0$; ที่ $\rho = 1/2$ ได้ $2\pi/\log 2 = 9.0647202837$. บนวงกลมรัศมี ε พจน์ขอบจากการแยกส่วนถูกคุมด้วย $2\pi\varepsilon \log(-\log\varepsilon)\|\varphi\|_\infty$ สำหรับ $\varphi \in \mathcal{D}(B_{1/2})$, ซึ่งลู่สู่ศูนย์. ดังนั้นเกรเดียนต์คลาสสิกเป็นอนุพันธ์อ่อนทั่วดิสก์; พลังงานเกรเดียนต์มีค่าจำกัดและ $f \in H^1(B_{1/2})$.

3. **ไม่มีขอบเขต.** เมื่อ $r \to 0^+$, $-\log r \to \infty$ และ $\log(-\log r) \to \infty$. ดังนั้น f ไม่มีขอบเขตใกล้จุดกำเนิด. ถ้ามีตัวแทนต่อเนื่อง มันต้องตรงกับ f ทุกจุดที่ไม่ใช่จุดกำเนิด เพราะทั้งสองต่อเนื่องที่นั่นและเท่ากันเกือบทุกที่; แต่นั่นขัดกับการที่ $f(r) \to \infty$. จึงไม่มีตัวแทนต่อเนื่อง และ H^1 ในสองมิติไม่ฝังใน L^∞.

สรุป: เลขโซโบเลฟ $m - n/p$ ทำนายว่าปริภูมิควบคุมความเรียบได้แค่ไหน. ในสองมิติ H^1 อยู่ที่เลข 0 พอดี; จึงไม่สามารถควบคุมซูพรีมัมของ $|f|$ ได้ และมีฟังก์ชันที่พุ่งไปที่อินฟินิตี้ได้. □

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ตัวอย่าง $f = \log(-\log r)$ โตช้ามากจนพลังงานของเกรเดียนต์ยังหาปริพันธ์ได้: เกรเดียนต์เป็น $1/(r\log r)$ ซึ่งใหญ่ที่ 0 แต่เมื่อคูณกับพื้นที่ $2\pi r\,dr$ แล้ว ตัวส่วน r หายไป เหลือ $dr/(r\log^2 r)$ ที่หาปริพันธ์ได้. นี่คือเหตุผลที่ “พลังงานจำกัด” ไม่ได้แปลว่า “มีขอบเขต” ในสองมิติ. ในหนึ่งมิติ เราไม่มีพื้นที่วงกลม $r\,dr$ มาช่วยลดกำลังของ r; จึงได้ความต่อเนื่อง.

10.3.3 ทฤษฎีบทเรลลิช: ความกระชับของการฝังตัว

ทฤษฎีบท 10.3.4: เรลลิชในหนึ่งมิติ

การฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ. ยิ่งกว่านั้น การฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0[0,1]$ ก็กระชับ.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้การควบคุมสองอย่างจาก Sobolev embedding: ขนาดสูงสุดและอัตราการแกว่ง. สองอย่างนี้ทำให้กลุ่มมีสมมติฐานของ Arzelà–Ascoli; เมื่อช่วงยาวจำกัด, การลู่เข้าเอกรูปของลำดับย่อยจึงเพียงพอให้ลู่เข้าใน L^2 ด้วย.

1. สมมติว่า $\|u_j\|_{H^1} \le M$ สำหรับทุก j. อสมการจากการฝังตัวในหนึ่งมิติให้

$$\|u_j\|_\infty \le \sqrt{2}M, \qquad |u_j(x) - u_j(y)| \le M|x-y|^{1/2}.$$

   บรรทัดแรกคุมขนาดของทุกพจน์พร้อมกัน; บรรทัดที่สองบอกว่า**มอดุลัสความต่อเนื่อง** (modulus of continuity) ของทุกพจน์ถูกคุมด้วยมอดุลัสเดียวกัน $\omega(\delta) = M\delta^{1/2}$.

2. พิจารณาเซต $K := \overline{\{u_j : j \ge 1\}}$ ใน $C^0[0,1]$. ขอบเขตซูพรีมัมและอสมการมอดุลัสข้างต้นยังจริงสำหรับลิมิตเอกรูปของลำดับใน $\{u_j\}$; ดังนั้น K มีขอบเขต ต่อเนื่องเท่ากัน และปิด. โดยทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี (Werner 2007, ทฤษฎีบท II.3.4), K กระชับ. จึงมีลำดับย่อย (u_{j_k}) และ $u \in C^0[0,1]$ ซึ่ง u_{j_k} ลู่เข้าเอกรูปสู่ u. เพราะช่วงมีความยาวจำกัด,

$$\|u_{j_k} - u\|_{L^2} \le \|u_{j_k} - u\|_\infty \longrightarrow 0.$$

   ลำดับย่อยนี้จึงลู่เข้าใน L^2 ด้วย. เนื่องจากเริ่มจากลำดับมีขอบเขตใด ๆ ใน H^1, ภาพของบอลหนึ่งหน่วยใน H^1 มีส่วนปิดกระชับใน L^2; การฝังตัวจึงกระชับ. การลู่เข้าเอกรูปคือการลู่เข้าใน C^0, ดังนั้นการฝังตัวใน C^0 ก็กระชับ.

สรุป: ความต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์ที่ได้จาก Sobolev embedding คือกุญแจของ Arzelà–Ascoli; มันเปลี่ยนขอบเขต H^1 เป็นความต่อเนื่องเท่ากัน แล้วให้ลำดับย่อยลู่เข้า. □

ทฤษฎีบท 10.3.5: เรลลิชสำหรับโดเมนมีขอบเขต

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดมีขอบเขต. สำหรับ $m \ge 1$ การฝังตัว $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow H_0^{m-1}(\Omega)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ. ถ้าเพิ่มเติม Ω มีขอบลิพชิทซ์, $m_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p_i < \infty$, $m_1 > m_2$ และ

$$m_1 - \frac{n}{p_1} > m_2 - \frac{n}{p_2},$$

แล้วการฝังตัว $W^{m_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{m_2,p_2}(\Omega)$ เป็นตัวดำเนินการกระชับ. ผลส่วนนี้ไม่พิสูจน์ในบทนี้.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. ข้อความนี้เป็น Werner 2007, ทฤษฎีบท V.2.13 และ Alt 2012, ทฤษฎีบท 8.9. ทั้งกรณี H^m_0 และกรณีทั่วไป $W^{m_1,p_1} \hookrightarrow W^{m_2,p_2}$ ไม่พิสูจน์ในบทนี้. กรณีหนึ่งมิติที่พิสูจน์ข้างต้นแสดงกลไกหลัก: Sobolev embedding ให้ความต่อเนื่องเท่ากัน แล้ว Arzelà–Ascoli ให้ลำดับย่อยลู่เข้า. ในมิติสูง การพิสูจน์ต้องประมาณบนลูกบาศก์เล็ก ๆ และใช้การฝังตัวในแต่ละชิ้น. □

ลองเอง: เรลลิชล้มเหลวบนโดเมนไม่จำกัด

ให้ $\varphi \in C^\infty_c(0,1)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ และ $u_n(x) := \varphi(x-n)$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots$. แต่ละ u_n มีตัวรองรับใน $(n, n+1)$ และ

$$\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{H^1(0,1)}$$

ทุก n. แต่สำหรับ $n \neq m$, ตัวรองรับของ u_n และ u_m ไม่ทับกัน ดังนั้น

$$\|u_n - u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n\|^2_{L^2} + \|u_m\|^2_{L^2} = 2\|\varphi\|^2_{L^2}.$$

ลำดับนี้มีขอบเขตใน H^1 แต่ไม่มีลำดับย่อยใดลู่เข้าใน L^2 เพราะระยะห่างระหว่างสมาชิกต่างกันไม่เล็กกว่าค่าคงตัวบวก. นี่แสดงว่าเงื่อนไข “Ω มีขอบเขต” ในทฤษฎีบทเรลลิชจำเป็น; การฝังตัวบน $\mathbb{R}$ ไม่กระชับ.

10.3.4 เทรซ: ค่าที่ขอบของฟังก์ชัน H^1

ฟังก์ชันใน $H^1(0,1)$ มีตัวแทนต่อเนื่อง ดังนั้นการอ่านค่าที่จุดปลายจึงนิยามได้. ในมิติสูง ฟังก์ชัน H^1 ไม่จำเป็นต้องต่อเนื่อง (ตัวอย่าง $\log(-\log r)$); แต่ทฤษฎีบทเทรซขยายการจำกัดฟังก์ชันเรียบบนขอบให้เป็นค่าลิมิตในนอร์ม $L^p(\partial\Omega)$.

ทฤษฎีบท 10.3.6: นอร์มของการอ่านค่าที่จุดในหนึ่งมิติ

ให้ $E_0 : H^1(0,1) \to \mathbb{C}$ นิยามโดย $E_0 u := u(0)$ โดยเลือก u เป็นตัวแทนต่อเนื่องบน $[0,1]$ จากการฝังตัวในหนึ่งมิติ. แล้ว E_0 เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง และ

$$\|E_0\| = \frac{1}{\sqrt{\tanh 1}} = 1.1458775177.$$

ค่าคงตัวนี้คม: มี $u \in H^1(0,1)$ ซึ่ง $|u(0)| = \|E_0\|\,\|u\|_{H^1}$.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ก่อนอื่นให้การฝังตัวนิยาม E_0 และบอกว่ามันต่อเนื่อง. จากนั้นหาเวกเตอร์ v ที่แทน E_0 ด้วยผลคูณภายในผ่านการแยกส่วน; สุดท้ายใช้ Cauchy–Schwarz และทดสอบกับ v เองเพื่อดูว่าค่าคงตัวคม.

1. **ความต่อเนื่อง.** การฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0[0,1]$ ในหัวข้อ 10.3.1 เป็นเชิงเส้นและต่อเนื่อง. การอ่านค่าที่จุดปลาย $u \mapsto u(0)$ เป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน $C^0[0,1]$; องค์ประกอบของสองการส่งนี้คือ E_0 จึงต่อเนื่อง.

2. **ฟังก์ชันทดสอบคู่.** ให้

$$v(x) := \frac{\cosh(1-x)}{\cosh 1}.$$

แล้ว $v(0) = 1$, $v'(1) = 0$ และ $-v'' + v = 0$. คำนวณ

$$\|v\|^2_{H^1} = \int_0^1 \big(v^2 + (v')^2\big)\,dx = \int_0^1 \frac{\cosh^2(1-x) + \sinh^2(1-x)}{\cosh^2 1}\,dx = \tanh 1.$$

(ใช้ $\cosh^2 + \sinh^2 = \cosh(2\,\cdot)$ และหาปริพันธ์ของ $\cosh(2(1-x))$.)

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. **แทนฟังก์ชันนัล.** เซต $C^\infty[0,1]$ หนาแน่นใน $H^1(0,1)$ (แนวคิด): สะท้อน u ข้ามจุดปลายทั้งสองให้เป็นฟังก์ชันใน $H^1(-1,2)$ แล้วเฉลี่ยด้วยเคอร์เนลเรียบ; การหดกลับมาที่ $[0,1]$ ให้ฟังก์ชันเรียบที่ลู่เข้าในนอร์ม H^1. สำหรับ $u \in C^\infty[0,1]$,

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_0^1 (uv + u'v')dx = \big[uv'\big]_0^1 + \int_0^1 u(-v'' + v)dx = u(1)v'(1) - u(0)v'(0).$$

เพราะ $v'(0) = -\tanh 1$ และ $v'(1) = 0$, จึง

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = u(0)\tanh 1.$$

4. **ขยายความเท่าเทียม.** จากขั้นที่แล้ว $u(0) = \dfrac{1}{\tanh 1}\langle u, v\rangle_{H^1}$ สำหรับ u เรียบ. ทั้งสองข้างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $H^1(0,1)$ (ฝั่งซ้ายตามการฝังตัวใน §10.3.1 และฝั่งขวาตามอสมการโคชี–ชวาร์ซ); เพราะ $C^\infty[0,1]$ หนาแน่น สมการเดียวกันจึงเป็นจริงบน $H^1(0,1)$ ทั้งหมด. นี่ระบุเวกเตอร์ v ที่แทน E_0 ผ่านผลคูณภายใน.

5. **ขอบเขตและความคม.** โดย Cauchy–Schwarz,

$$|u(0)| \le \frac{1}{\tanh 1}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} = \frac{\sqrt{\tanh 1}}{\tanh 1}\|u\|_{H^1} = \frac{1}{\sqrt{\tanh 1}}\|u\|_{H^1}.$$

ถ้า $u = v$ แล้ว $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = \tanh 1$ และ $v(0) = 1$; ดังนั้นอสมการเป็นสมการ. ค่าคงตัวจึงคม.

สรุป: การอ่านค่าที่จุดเป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน H^1; นอร์มของมันคือ $1/\sqrt{\tanh 1}$ และฟังก์ชัน $\cosh(1-x)/\cosh 1$ เป็นตัวทำให้เกิดสมการ. □

ลองเอง: เปรียบเทียบค่าที่จุดกับนอร์ม

ให้ $u(x) = 1 - x$. แล้ว $u(0) = 1$ และ

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_0^1 (1-x)^2 dx + \int_0^1 (-1)^2 dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

ดังนั้นอัตราส่วน $|u(0)|/\|u\|_{H^1} = \sqrt{3}/2 = 0.8660254038$, ซึ่งน้อยกว่า $\|E_0\| = 1.1458775177$. ตัวเลขทั้งสองมีแบบทดสอบยืนยัน.

ทฤษฎีบท 10.3.7: ทฤษฎีบทเทรซ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดมีขอบเขต ซึ่ง $\partial\Omega$ เป็นขอบลิพชิทซ์ และ $1 \le p \le \infty$. มีการส่งเชิงเส้นต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว

$$S : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

โดยที่ $Su = u|_{\partial\Omega}$ สำหรับทุก $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. เราเรียก S ว่า**ตัวดำเนินการเทรซ** (trace operator)และเรียก Su ว่า**ค่าเทรซ** (trace value)ของ u. สำหรับ $p = 2$ มีค่าคงตัว C ซึ่ง

$$\|Su\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

ถ้าเพิ่มเติม $1 \le p < \infty$ และ $u_k \rightharpoonup u$ แบบอ่อนใน $W^{1,p}(\Omega)$ แล้ว $Su_k \to Su$ แบบเข้มใน $L^p(\partial\Omega)$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์. ส่วนแรกคือ Alt 2012, ทฤษฎีบท A6.6. ข้อความเกี่ยวกับการลู่เข้าแบบอ่อนเมื่อ $1 \le p < \infty$ คือ Alt 2012, ทฤษฎีบท A6.13. เราไม่พิสูจน์ในบทนี้ เพราะต้องใช้การประมาณบนขอบลิพชิทซ์ การแบ่งพาร์ทิชันของเอกภาพ และการประมาณเทรซบนแต่ละแผ่นกราฟ. ในหนึ่งมิติ ตัวอย่างที่เห็นกลไกได้คือการฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0[0,1]$ และการอ่านค่าที่จุดปลายในหัวข้อนี้; การอ่านค่านั้นเป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่อง. □

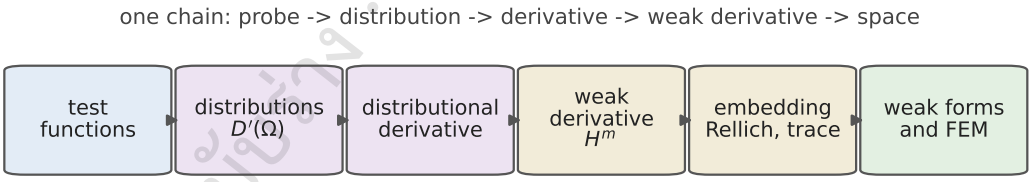
ข้อควรระวัง: เทรซไม่ใช่การอ่านค่าทีละจุด

ในมิติสูง ฟังก์ชัน H^1 อาจไม่มีค่าที่จุดขอบในความหมายปกติ. ค่าเทรซ Su จึงไม่ใช่การแทนค่า $u(x)$ ที่ทุกจุด $x \in \partial\Omega$ แต่เป็นคลาสใน $L^p(\partial\Omega)$ ซึ่งกำหนดโดยลิมิตของการประมาณด้วยฟังก์ชันต่อเนื่อง. การเขียน "$u = 0$ บน $\partial\Omega$" ในสมการอ่อนหมายถึง $Su = 0$ ใน $L^p(\partial\Omega)$, ไม่ได้หมายถึงค่าทุกจุด. ฟังก์ชันใน $H^1_0(\Omega)$ มีเทรซเป็นศูนย์เพราะเป็นลิมิตของฟังก์ชันทดสอบที่มีตัวรองรับใน Ω และ S ต่อเนื่อง; เราไม่กล่าวย้อนกลับว่าทุกฟังก์ชันที่เทรซเป็นศูนย์อยู่ใน H^1_0 เว้นแต่จะพิสูจน์เพิ่ม.

สรุปใจความ

- $H^1(0,1)$ ฝังตัวอย่างต่อเนื่องใน $C^{0,1/2}[0,1]$: ฟังก์ชันมีการแกว่งไม่เกิน $\sqrt{|x-y|}$ คูณนอร์มของอนุพันธ์.
- เลขโซโบเลฟ $m - n/p$ อธิบายความเรียบที่ปริภูมิควบคุมได้; ในสองมิติ H^1 ไม่ควบคุมซูพรีมัมของ $|f|$ และมีฟังก์ชัน $\log(-\log r)$ ที่ไม่มีขอบเขต.
- การฝังตัว $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ กระชับ (เรลลิช); บนโดเมนไม่จำกัด ข้อสรุปนี้ล้มเหลว เพราะลำดับที่เลื่อนหลุดไปไม่บรรจบ.
- ตัวดำเนินการเทรซอ่านค่าที่ขอบได้อย่างต่อเนื่อง; ในหนึ่งมิติ นอร์มของการอ่านค่าที่จุดคือ $1/\sqrt{\tanh 1} = 1.1458775177$ และค่าคงตัวนี้คม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 10.3: เส้นทางจากฟังก์ชันทดสอบและดิสทริบิวชัน ผ่านอนุพันธ์อ่อนและปริภูมิโซโบเลฟ ไปยังการฝังตัวและสมการอ่อนในบทถัดไป.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(การฝังตัวในหนึ่งมิติ)** จงพิสูจน์ว่าสำหรับ $u \in H^1(0,1)$,

$$\|u\|_\infty \le \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1} \quad \text{และ} \quad |u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2}.$$

   แล้วตรวจอัตราส่วนสำหรับ $u(x) = 1 - x$ ว่าเป็น 0.8660254038.

2. **(ความคม)** ให้ $u_\alpha(x) = x^\alpha$ บน $(0,1)$. จงหาช่วงของ α ที่ $u_\alpha \in H^1(0,1)$. จากนั้นตรวจว่า $u(x) = \sqrt{x}/(1-\log x)$ อยู่ใน $H^1(0,1)$ แต่ไม่อยู่ใน $C^{0,\beta}[0,1]$ เมื่อ $\beta > 1/2$.

3. **(นอร์มของการอ่านค่าที่จุด)** จงหาฟังก์ชัน $v \in H^1(0,1)$ ที่ทำให้ $|v(0)|/\|v\|_{H^1} = 1/\sqrt{\tanh 1}$ และตรวจว่าค่าคงตัวนี้มากกว่าอัตราส่วนของ $u = 1 - x$.

4. **(สองมิติ)** จงคำนวณพลังงานเกรเดียนต์ของ $f(x) = \log(-\log|x|)$ บนดิสก์รัศมี $1/2$ และแสดงว่าพลังงานมีค่าจำกัดแต่ f ไม่มีขอบเขต. ใช้ค่าที่ $\rho = 1/2$ คือ 9.0647202837.

5. **(เรลลิช)** ให้ $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ ไม่เป็นศูนย์ และ $u_n(x) = \varphi(x-n)$. จงแสดงว่า (u_n) มีขอบเขตใน $H^1(\mathbb{R})$ แต่ไม่มีลำดับย่อยลู่เข้าใน $L^2(\mathbb{R})$.

6. **(เทรซ)** ให้ $u(x) = 1 - x$ บน $(0,1)$. จงหาค่าเทรซที่ 0 และ 1, คำนวณนอร์ม L^2 ของเทรซ และตรวจว่าอัตราส่วนต่อนอร์ม H^1 ไม่เกิน $1/\sqrt{\tanh 1}$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. เราเขียน u เป็นตัวแทนต่อเนื่องและใช้ fundamental theorem:
$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt.$$
โดย Cauchy–Schwarz,
$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2}.$$
สำหรับขอบเขตสูงสุด ทำตามขั้นที่ 3 ของการพิสูจน์ทฤษฎีบทในหัวข้อ 10.3.1 ซึ่งให้ $\|u\|_\infty \le \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}$. สำหรับ $u = 1-x$, $\|u\|_{H^1} = \sqrt{4/3} = 1.1547005384$ และ $u(0) = 1$; อัตราส่วนคือ $1/\sqrt{4/3} = \sqrt{3}/2 = 0.8660254038$.

2. เมื่อ $\alpha = 0$, $u_\alpha \equiv 1 \in H^1$. ถ้า $\alpha \neq 0$, เงื่อนไข $u_\alpha \in L^2$ คือ $\alpha > -1/2$, ส่วน
$$\int_0^1 |u_\alpha'|^2 dx = \alpha^2 \int_0^1 x^{2\alpha-2}dx$$
มีค่าจำกัดก็ต่อเมื่อ $\alpha > 1/2$. ดังนั้น $u_\alpha \in H^1(0,1)$ ก็ต่อเมื่อ $\alpha = 0$ หรือ $\alpha > 1/2$. ให้ $u(x) = \sqrt{x}/(1-\log x)$ และกำหนด $u(0) = 0$. เพราะ $1 - \log x \ge 1$, $\int_0^1 |u|^2 dx \le \int_0^1 x\,dx < \infty$. ถ้า $L = 1 - \log x$, แล้ว
$$u'(x) = x^{-1/2}\left(\frac{1}{2L} + \frac{1}{L^2}\right), \qquad |u'(x)|^2 \le \frac{9}{4xL^2}.$$
และ $\int_0^1 \frac{dx}{x(1-\log x)^2} = 1$, จึง $u \in H^1(0,1)$. แต่เมื่อ $\beta > 1/2$,
$$\frac{|u(x)-u(0)|}{x^\beta} = \frac{x^{1/2-\beta}}{1-\log x} \longrightarrow \infty \quad (x \downarrow 0),$$
ดังนั้น u ไม่เป็นโฮลเดอร์เลขชี้กำลัง β. นี่พิสูจน์ว่าขอบเขต $1/2$ ในทฤษฎีบทคม.

3. ให้
$$v(x) = \frac{\cosh(1-x)}{\cosh 1}.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แล้ว $v(0)=1$, $v'(1)=0$ และ

$$\|v\|_{H^1}^2 = \tanh 1.$$

จากสูตรในบท,

$$v(0) = \frac{1}{\tanh 1}\langle v, v\rangle_{H^1} = \frac{\|v\|_{H^1}^2}{\tanh 1} = \frac{\tanh 1}{\tanh 1} = 1,$$

และ อัตราส่วน $v(0)/\|v\|_{H^1} = 1/\sqrt{\tanh 1} = 1.1458775177$. สำหรับ $u = 1-x$ อัตราส่วนคือ 0.8660254038, น้อยกว่า.

4. ในพิกัดเชิงขั้ว,

$$\int_{|x|<\rho} |\nabla f|^2 dx = 2\pi \int_0^{\rho} \frac{dr}{r(\log r)^2} = \frac{2\pi}{-\log \rho}.$$

ที่ $\rho = 1/2$ ได้ $2\pi/\log 2 = 9.0647202837$, ดังนั้นพลังงานเกรเดียนต์มีค่าจำกัด. แต่ $f(r) = \log(-\log r) \to \infty$ เมื่อ $r \to 0$, ดังนั้น f ไม่มีขอบเขต. นี่แสดงว่า H^1 ในสองมิติไม่ฝังใน L^∞.

5. ให้ $M = \|\varphi\|_{H^1(0,1)}$. แล้ว $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R})} = M$ ทุก n. สำหรับ $n \neq m$ ตัวรองรับของ u_n และ u_m ไม่ทับกัน จึง

$$\|u_n - u_m\|_{L^2}^2 = 2\|\varphi\|_{L^2}^2 > 0.$$

ถ้ามีลำดับย่อยลู่เข้าใน L^2 มันจะเป็นลำดับ Cauchy; แต่ระยะห่างระหว่างสมาชิกสองตัวใด ๆ ไม่เล็กกว่าค่าคงตัวบวก. ขัดแย้ง. ดังนั้นการฝังตัวบน $\mathbb{R}$ ไม่กระชับ และสมมติฐาน “มีขอบเขต” ในทฤษฎีบทเรลลิชจำเป็น.

6. $u(0)=1$ และ $u(1)=0$. เพราะ $\partial\Omega = \{0,1\}$ กับการวัดนับ จึง $Su = (1,0)$ และ $\|Su\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 1^2+0^2 = 1$. ต่อมา

$$\|u\|_{H^1}^2 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3},$$

จึง $\|u\|_{H^1} = 1.1547005384$ และ อัตราส่วน $\|Su\|_{L^2}/\|u\|_{H^1} = 1/\sqrt{4/3} = 0.8660254038 \le 1.1458775177$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

สำนักงาน Preprint 2026-10-24

สูตรสรุป

- ดิสทริบิวชัน: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ต่อเนื่อง; $(D^{(\alpha)}T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi)$.
- กระโดด: $(T_f)' = T_g + (f(a_0+) - f(a_0-))\delta_{a_0}$; ฟังก์ชันขั้นบันไดมีอนุพันธ์เป็นเดลตา และไม่อยู่ใน H^1.
- อนุพันธ์อ่อน: $\int g\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int f D^\alpha\varphi$; $H^m = W^{m,2}$ เป็นฮิลเบิร์ต และ $\|f\|_{H^m}^2 \asymp \int (1+|\xi|^2)^m |\mathcal{F}f|^2$.
- การฝังตัวหนึ่งมิติ: $\|u\|_\infty \le \sqrt{2}\|u\|_{H^1}$ และ $|u(x)-u(y)| \le |x-y|^{1/2}\|u'\|_{L^2}$.
- เรลลิช: $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ กระชับ; การอ่านค่าที่จุด: $\|E_0\| = 1/\sqrt{\tanh 1} = 1.1458775177$.

อ่านต่อ

บทนี้เริ่มจากการกระโดดของความเร็ว และจบด้วยคำถามว่าเมื่อใดฟังก์ชันที่หยาบยังมีค่าที่ขอบได้. ดิสทริบิวชันกับอนุพันธ์อ่อนทำให้เราย้ายการหาอนุพันธ์ไปยังฟังก์ชันทดสอบ; การฝังตัวและเรลลิชบอกว่าพลังงานโซโบเลฟควบคุมความเรียบและการลู่เข้าได้เพียงใด. บทถัดไปใช้ $H_0^1(\Omega)$ เขียนสมการปัวซงในรูปอ่อน:

$$-\Delta u = f \text{ ใน } \Omega, \qquad u = 0 \text{ บน } \partial\Omega, \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, dx = \int_\Omega f\overline{v}\, dx \quad (v \in H_0^1(\Omega)).$$

บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมให้กรอบการมีอยู่และเอกลักษณ์ของคำตอบ; Galerkin และวิธีสมาชิกจำกัดสร้างวิธีประมาณคำตอบนั้น.

บทที่ 11

คำตอบแบบอ่อน แลกซ์–มิลแกรม และวิธีสมาชิกจำกัด

สถานการณ์สมมติ: รอยขีดข่วนที่ถูกเติมด้วยแปรง

สมมติว่าเรามีภาพถ่ายหนึ่งภาพและมีรอยขีดข่วนบาง ๆ พาดผ่านท้องฟ้า. เราเลือกบริเวณที่เสียหายเป็นผืนสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ แล้วให้โปรแกรมเติมค่าสีในบริเวณนั้นจากพิกเซลรอบ ๆ ขอบ. โปรแกรมไม่ได้ "วาด" เนื้อหาที่หายไป; มันแก้สมการเพื่อหาฟังก์ชันที่ต่อเนื่องกับขอบและเรียบพอจะกลมกลืนกับภาพ.

ในแบบจำลองของบทนี้ เราแทนความสว่างด้วยฟังก์ชัน u บนโดเมน Ω ซึ่งเป็นบริเวณที่ต้องเติม. ค่าที่ขอบ $\partial\Omega$ มาจากพิกเซลที่ยังดีอยู่ และเราให้ u เป็นคำตอบของ*สมการปัวซง* $-\Delta u = f$ พร้อม**เงื่อนไขขอบแบบดีรีเคล**. เมื่อ $f = 0$ คำตอบคือฟังก์ชันฮาร์มอนิกที่ทำให้พลังงานเล็กที่สุด; เมื่อมี f เราใส่ข้อมูลเพิ่มเติมจากบริเวณข้างเคียงได้.

สถานการณ์นี้เป็นสถานการณ์สมมติ. เราไม่ได้อ้างว่าโปรแกรมตกแต่งภาพชื่อใดใช้สมการนี้จริง และไม่มีตัวเลขจากการวัดในภาพจริง. คำถามของบทนี้คือ: คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ "อ่อน" พอจะอยู่ในปริภูมิโซโบเลฟได้หมายความว่าอะไร, เมื่อใดมันมีเพียงหนึ่งเดียว, และเมื่อเราแก้มันด้วยปริภูมิมิติจำกัด คำตอบประมาณจะลู่เข้าหาคำตอบจริงเร็วแค่ไหน.

คำตอบจะมาจากสามความคิดที่ต่อกัน. ความคิดแรกคือ**รูปแบบอ่อน** (weak form) (การเขียนสมการใหม่ให้มีแต่ปริพันธ์และฟังก์ชันทดสอบ). ความคิดที่สองคือ**บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม** (Lax--Milgram lemma) ซึ่งให้การมีอยู่และเอกลักษณ์ของคำตอบจากสมบัติของ**ฟอร์มเชิงเส้นคู่** (bilinear form). ความคิดที่สามคือ**วิธีกาเลอคิน** (Galerkin method) ซึ่งแก้สมการเดียวกันบนปริภูมิย่อยมิติจำกัด; เมื่อเลือกปริภูมิพหุนามต่อเนื่องเป็นชิ้น เราได้**วิธีสมาชิกจำกัด** (finite element method).

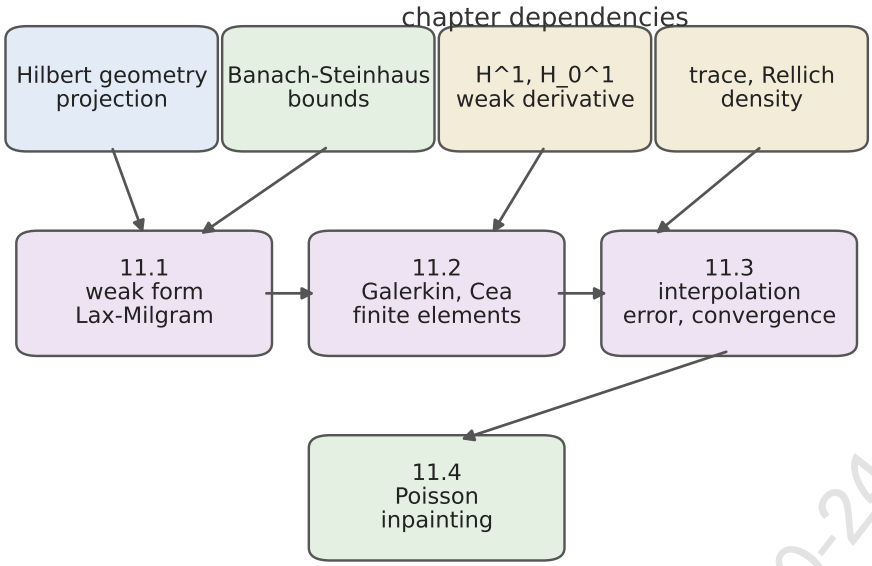
ตัวเลขทุกตัวที่อ้างว่ามาจากการคำนวณในบทนี้ผลิตโดย `code/funkana/ch11.py` และมีแบบทดสอบยืนยันใน `code/tests/test_ch11.py`. ตัวเลขเหล่านี้เป็นตัวเลขของแบบจำลองเรา ไม่ใช่การวัดจากภาพจริง.

ฉบับร่าง Preprint, 2026-10-24

ภาพรวมบท

สมการเชิงอนุพันธ์บอกเราที่ทุกจุดว่า "อะไรเท่ากับอะไร". แต่การหาคำตอบแบบคลาสสิกต้องมีอนุพันธ์อันดับสองและต้องต่อเนื่องถึงขอบ. ภาพจริงมีมุม มีรอยขาด และมีข้อมูลที่ไม่เรียบ; คำตอบคลาสสิกจึงอาจไม่มี. ทางออกคือเปลี่ยนคำถาม: แทนที่จะบังคับให้สมการเป็นจริงทุกจุด เราให้สมการเป็นจริงเมื่อ "ชั่ง" ด้วยฟังก์ชันทดสอบทุกตัวในปริภูมิที่เหมาะสม. นี่คือรูปแบบอ่อน.

เมื่อเขียนเสร็จ สมการกลายเป็น $a(u, v) = F(v)$ สำหรับทุก v ในปริภูมิฮิลเบิร์ต V. ถ้า a ต่อเนื่องและ "ใหญ่พอทุกทิศทาง" (โคเออร์ซีฟ) บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมบอกว่ามีคำตอบเพียงหนึ่งเดียว และคำตอบเปลี่ยนไม่เกินค่าคงที่คูณการเปลี่ยนของข้อมูล. จากนั้นเราเลือกปริภูมิย่อย V_h มิติจำกัด แล้วแก้สมการเดียวกันบน V_h; นี่คือวิธีกาเลอคิน. ถ้า V_h



รูปที่ 11.1: แผนผังการพึ่งพาของบท: เรขาคณิตของฮิลเบิร์ตและทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ป้อนเข้าสู่รูปแบบอ่อน; หลักการมีขอบเขตเอกรูปป้อนเข้าสู่สมบัติการประมาณ; ปริภูมิโซโบเลฟและการอ่านค่าที่ขอบจากบทที่แล้วทำให้ปัญหาและคำตอบอยู่ในปริภูมิเดียวกัน; จากนั้นกาเลอคิน เซอา และการประมาณค่าในช่วงนำไปสู่การลู่เข้าของวิธีสมาชิกจำกัดและการเติมเต็มภาพ.

เป็นปริภูมิของพหุนามต่อเนื่องเป็นชิ้นบนเมช เราได้วิธีสมาชิกจำกัด.

บทนี้มีสี่ก้าว. ก้าวแรกตั้งรูปแบบอ่อนและพิสูจน์การมีอยู่ด้วยบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม. ก้าวที่สองสร้างวิธีกาเลอคิน, บทตั้งของเซอา และปริภูมิที่ใช้วิธีสมาชิกจำกัด พร้อม**สมบัติการประมาณ** (approximation property)ของการฉาย. ก้าวที่สามประมาณค่าคลาดเคลื่อนด้วยการประมาณค่าในช่วงและอัตราการลู่เข้า. ก้าวสุดท้ายใช้ทั้งหมดกับสมการปัวซงสำหรับการเติมเต็มภาพ และตอบว่าทำไมเมชหยาบจึงทำให้แผ่นที่เติมดูเป็นเหลี่ยม.

สมการหลักที่ต้องจำคือ

$$u \in V : \qquad a(u, v) = F(v) \quad \text{สำหรับทุก } v \in V,$$

และเวอร์ชันมิติจำกัด

$$u_h \in V_h : \qquad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{สำหรับทุก } v_h \in V_h.$$

ความต่างระหว่างสองบรรทัดนี้คือหัวใจของทั้งบท.

ฉบับร่าง. preprint 2026-10-24

11.1 รูปแบบอ่อนและบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกภาพเราต้องการหาความสว่างในบริเวณที่ภาพขาด. เราไม่รู้ค่าที่ทุกจุด แต่เรารู้ว่าค่าที่ขอบต้องต่อกับพิกเซลข้างเคียง และเรารู้ว่าภายในบริเวณนั้นความสว่างควร “เรียบ” ในแง่ที่พลังงานของเกรเดียนต์ไม่ใหญ่เกินไป. ถ้าเราเขียนสมการพลังงานนี้แล้วหาค่าต่ำสุด เราได้สมการเชิงอนุพันธ์กลับคืนมา. รูปแบบอ่อนคือการเขียนสมการนั้นในรูปที่ทดสอบได้ด้วยฟังก์ชันทุกตัวในปริภูมิ ไม่ใช่ตรวจทีละจุด.

ภาพที่ต้องเก็บไว้คือ: $a(u,v)$ เป็น “เครื่องชั่ง” ว่าคำตอบ u ตอบสนองต่อทิศทดสอบ v มากแค่ไหน, และ $F(v)$ เป็น “ข้อมูล” ที่วัดในทิศเดียวกัน. สมการ $a(u,v)=F(v)$ บอกว่าเครื่องชั่งทั้งสองข้างตรงกันทุกทิศ. ถ้า a โคเออร์ซีฟแปลว่าไม่มีทิศใดที่เครื่องชั่งอ่านค่าเป็นศูนย์ทั้ง ๆ ที่ u ไม่เป็นศูนย์; นี่คือเหตุผลที่คำตอบมีเพียงหนึ่งเดียว.

11.1.1 จากสมการที่จุดต่อจุดสู่รูปแบบอ่อน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่มีขอบเขต และให้ $A(x)=(a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ เป็นเมทริกซ์ที่วัดได้และมีขอบเขต. เราสมมติว่ามีค่าคงตัว $c_0>0$ ซึ่งสำหรับเกือบทุก $x\in\Omega$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0|\xi|^2 \qquad \text{สำหรับทุก } \xi\in\mathbb{R}^n.$$

เงื่อนไขนี้เรียกว่าความเป็น**เชิงวงรีเอกรูป** (uniformly elliptic) ของ A: เมทริกซ์ยืดทุกทิศอย่างน้อยด้วย c_0 และไม่บีบทิศใดจนแบน.

ให้ $b\in L^\infty(\Omega)$ และ $f\in L^2(\Omega)$. เมื่อใช้บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมกับรูปแบบนี้ เราจะสมมติ $b\ge 0$ เกือบทุกที่ (หรือสมมติความโคเออร์ซีฟโดยตรง); ความเป็นเชิงวงรีของ A อย่างเดียวไม่พอเมื่อ b อาจติดลบ. ปัญหาค่าขอบแบบดีรีเคลเอกพันธุ์คือการหา u ที่

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\big(a_{ij}\partial_j u\big)+bu=f \quad \text{ใน } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{บน } \partial\Omega.$$

ถ้า u เรียบพอ เราคูณด้วยฟังก์ชันทดสอบ $v\in C_c^\infty(\Omega)$ แล้วหาปริพันธ์โดยส่วน. เทอมที่มีอนุพันธ์อันดับสองย้ายไปยัง v และเทอมขอบหายไปเพราะ $v=0$ ใกล้ขอบ. เราได้

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij}\partial_j u\,\partial_i v + bu\,v\Big)\,dx = \int_\Omega f v\,dx.$$

สมการนี้ยังมีความหมายแม้ u มีเพียงอนุพันธ์อ่อนอันดับหนึ่ง เพราะมีแต่ปริพันธ์ของอนุพันธ์อันดับหนึ่ง. เราจึงใช้มันเป็นนิยาม.

นิยาม 11.1.1: คำตอบแบบอ่อนของปัญหาดีรีเคล

ให้ $V:=H_0^1(\Omega)$ และนิยาม

$$a(u,v):=\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u\,\partial_i v+bu\,v\Big)dx, \qquad F(v):=\int_\Omega fv\,dx.$$

ฟังก์ชัน $u\in V$ เป็น**คำตอบแบบอ่อน** (weak solution) ของโจทย์นี้ก็ต่อเมื่อสมการเชิงปริพันธ์ต่อไปนี้เป็นจริงพร้อมกันสำหรับฟังก์ชันทดสอบทุกตัวใน V:

$$a(u,v)=F(v) \qquad \text{สำหรับทุก } v\in V.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“อ่อน” ไม่ได้หมายถึง “ไม่ถูกต้อง” หรือ “ประมาณ”. มันหมายถึงข้อกำหนดที่อ่อนกว่าการเป็นจริงทุกจุด: เราตรวจสมการผ่านการชั่งด้วยฟังก์ชันทดสอบทุกตัวแทน. ถ้า $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, และ b, f ต่อเนื่อง แล้วคำตอบแบบอ่อนเป็นคำตอบคลาสสิกด้วย; แต่คำตอบแบบอ่อนอาจมีมุมหรือรอยพับและยังใช้ได้.
ตัวอย่างเล็กที่สุด: บน $(0,1)$ กับ $a(u,v)=\int_0^1 u'v'$ และ $F(v)=\int_0^1 v$, ฟังก์ชัน $u(x)=x(1-x)/2$ เป็นคำตอบอ่อน เพราะ $u'=1/2-x$ และการหาปริพันธ์โดยส่วนให้สมการตรงกับ 1. เราจะตรวจตัวเลขนี้ในตัวอย่างถัดไป.

ข้อควรระวัง: คำตอบแบบอ่อนไม่จำเป็นต้องมีอนุพันธ์อันดับสอง

ในหนึ่งมิติ $H^1(0,1)$ ฝังตัวในฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นคำตอบแบบอ่อนยังต่อเนื่อง. แต่ในสองมิติ H^1 ไม่ควบคุมค่าสูงสุด และไม่บังคับให้อนุพันธ์อันดับสองมี. คำตอบแบบอ่อนจึงอาจมีมุมแหลมหรือเอกฐานได้. การบอกว่า “คำตอบแบบอ่อนคือคำตอบของสมการเดียวกัน” ต้องระบุเสมอว่าในความหมายใด; ถ้าต้องการคำตอบคลาสสิกต้องเพิ่มสมมติฐานความเรียบ.

11.1.2 อสมการปวงกาเรและความโคเออร์ซีฟ

เพื่อใช้บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม เราต้องรู้ว่า a ใหญ่พอทุกทิศทาง. สำหรับเทอมเกรเดียนต์ เราใช้อสมการปวงกาเร ซึ่งบอกว่านอร์ม L^2 ของฟังก์ชันที่หายที่ขอบถูกควบคุมด้วยนอร์ม L^2 ของเกรเดียนต์.

ทฤษฎีบท 11.1.1: อสมการปวงกาเรสำหรับ H_0^1

ให้ $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ เป็นเซตเปิดที่มีขอบเขตและมีขอบลิพชิทซ์. แล้วมีค่าคงตัว $C_P>0$ ซึ่ง

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{สำหรับทุก } u\in H_0^1(\Omega).$$

กรณีทั่วไปนี้อ้างจาก Alt 2012, ทฤษฎีบท 6.16, p. 253; เราไม่พิสูจน์กรณีหลายมิติในบทนี้. สำหรับ $\Omega=(0,1)$ เราใช้ $C_P=1/\sqrt{2}$ ได้; ค่าคงตัวที่เล็กที่สุดคือ $1/\pi$ แต่เราไม่พิสูจน์ความคมในบทนี้.

พิสูจน์ (กรณีหนึ่งมิติ). **แนวคิด.** เขียน $u(x)$ เป็นปริพันธ์ของ u' จาก 0 ถึง x, ยกกำลังสอง, ใช้อสมการโคชี–ชวาร์ซ, แล้วหาปริพันธ์ในช่วง.

1. **แทนค่าด้วยอนุพันธ์.** สำหรับ $u\in C_c^\infty(0,1)$ และ $x\in(0,1)$,
$$u(x)=\int_0^x u'(t)\,dt.$$
โดยอสมการโคชี–ชวาร์ซ,
$$|u(x)|^2 \le \Big(\int_0^x 1\,dt\Big)\Big(\int_0^x |u'(t)|^2 dt\Big) \le x\int_0^1 |u'(t)|^2 dt.$$
2. **หาปริพันธ์ใน x.** เพราะ $\int_0^1 x\,dx=1/2$,
$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(t)|^2 dt.$$
จึงได้ $\|u\|_{L^2}\le (1/\sqrt{2})\|u'\|_{L^2}$.

ฉบับร่าง Preprint 2026-10-24

3. **ขยายไปยัง H_0^1.** ฟังก์ชัน $C_c^\infty(0,1)$ หนาแน่นใน $H_0^1(0,1)$ ตามนิยามของการทำให้บริบูรณ์; ทั้งสองข้างของอสมการต่อเนื่องเทียบกับนอร์ม H^1. จึงขยายความไม่เท่าเทียมไปยังทุก $u \in H_0^1(0,1)$ ได้.

สรุป: ฟังก์ชันที่หายที่ขอบถูกควบคุมด้วยอนุพันธ์ เพราะค่าที่จุดหนึ่งคือผลสะสมของอนุพันธ์ตลอดทางจากขอบ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ค่าคงตัว $1/\pi$

สำหรับช่วง $(0,1)$ ค่าคงตัวที่เล็กที่สุดในอสมการปวงกาเรคือ $1/\pi$, และฟังก์ชัน $\sin(\pi x)$ ทำให้ความเท่ากันเกิด. เราไม่พิสูจน์ความคมในบทนี้ เพราะต้องใช้ทฤษฎีบทสเปกตรัมของตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล. ค่าคงตัว $1/\sqrt{2}$ เพียงพอสำหรับการมีอยู่และเอกลักษณ์; มันไม่คมแต่ใช้ได้ทุกฟังก์ชันใน H_0^1.

จากอสมการปวงกาเร เราได้ความโคเออร์ซีฟของ a ในกรณี $A = I$ และ $b = 0$ (ตัวดำเนินการลาปลาซ):

$$a(u,u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{1+C_P^2}\|u\|_{H^1}^2.$$

สำหรับ $C_P = 1/\sqrt{2}$ ค่าคงตัวนี้คือ $2/3$. เรียก a ว่า**โคเออร์ซีฟ** (coercive) เมื่อมี $\gamma > 0$ ที่ $a(u,u) \geq \gamma\|u\|_V^2$ สำหรับทุก $u \in V$: ฟอร์มไม่แบนในทิศใด.

บทตั้ง 11.1.2: แลกซ์–มิลแกรม

ให้ V เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง และ $a : V \times V \to \mathbb{R}$ เป็นฟอร์มเชิงเส้นคู่ที่

1. ต่อเนื่อง: มี $M < \infty$ ที่ $|a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$ สำหรับทุก $u, v \in V$;
2. โคเออร์ซีฟ: มี $\gamma > 0$ ที่ $a(u,u) \geq \gamma\|u\|_V^2$ สำหรับทุก $u \in V$.

แล้วสำหรับทุก $F \in V'$ สมการ

$$a(u,v) = F(v) \qquad \text{สำหรับทุก } v \in V$$

มีคำตอบ $u \in V$ เพียงหนึ่งเดียว และ

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma}\|F\|_{V'}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** สำหรับแต่ละ u เราเปลี่ยน $v \mapsto a(u,v)$ ให้เป็นเวกเตอร์ Au ด้วยทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ แล้วศึกษาภาพและขอบล่างของ A.

1. **สร้างตัวดำเนินการ.** สำหรับ $u \in V$ การส่ง $v \mapsto a(u,v)$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง เพราะ $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$. ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ให้ $Au \in V$ เพียงตัวเดียวที่

   $$a(u,v) = (Au, v)_V \qquad \text{สำหรับทุก } v \in V.$$

   เพราะ a เชิงเส้นในช่องแรกและผลคูณภายในเชิงเส้นในช่องแรก, A เป็นเชิงเส้น. และ $\|Au\| \leq M\|u\|$, จึง $A \in \mathcal{L}(V)$ กับ $\|A\| \leq M$.

2. **ความโคเออร์ซีฟให้ขอบล่าง.** จาก $a(u,u) = (Au,u)$ และ $a(u,u) \geq \gamma\|u\|^2$,

   $$\gamma\|u\|^2 \leq (Au,u) \leq \|Au\|\|u\|,$$

   จึง $\|Au\| \geq \gamma\|u\|$ สำหรับทุก u.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. **ภาพปิด.** ถ้า $Au_k \to w$ แล้ว (u_k) เป็นลำดับ Cauchy เพราะ $\|u_k - u_l\| \le \gamma^{-1}\|Au_k - Au_l\|$. ปริภูมิ V บริบูรณ์ จึงมี $u_k \to u$; ความต่อเนื่องของ A ให้ $Au_k \to Au = w$. ดังนั้น w อยู่ในภาพ.

4. **ภาพทึบ.** สมมติ $w \perp \operatorname{ran} A$. แล้ว $(Au, w) = 0$ ทุก u. เลือก $u = w$: $0 = (Aw, w) = a(w, w) \ge \gamma\|w\|^2$, จึง $w = 0$. ภาพจึงทึบในปริภูมิฮิลเบิร์ต.

5. **ผกผันและขอบ.** ภาพปิดและทึบจึงเป็นทั้งหมด; A เป็นหนึ่งต่อหนึ่งเพราะ $\|Au\| \ge \gamma\|u\|$, จึงผกผันได้. สำหรับ $F \in V'$ ทฤษฎีบทการแทนของรีสซ์ให้ w_F ที่ $F(v) = (w_F, v)$; คำตอบคือ $u = A^{-1}w_F$. จาก $\|Au\| \ge \gamma\|u\|$ และ $\|w_F\| = \|F\|_{V'}$,
$$\|u\| \le \frac{1}{\gamma}\|Au\| = \frac{1}{\gamma}\|w_F\| = \frac{1}{\gamma}\|F\|_{V'}.$$

สรุป: ฟอร์มที่ต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟแปลงเป็นตัวดำเนินการที่ผกผันได้และมีขอบล่าง; คำตอบจึงมีเพียงหนึ่งเดียวและเสถียร. □

บทแทรก 11.1.3: เสถียรภาพของคำตอบแบบอ่อน

ภายใต้สมมติฐานของบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม ให้ $F_1, F_2 \in V'$ มีคำตอบ u_1, u_2. แล้ว
$$\|u_1 - u_2\|_V \le \frac{1}{\gamma}\|F_1 - F_2\|_{V'}.$$

พิสูจน์. เพราะสมการเชิงเส้น, $u_1 - u_2$ เป็นคำตอบของข้อมูล $F_1 - F_2$. ใช้ขอบในบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมกับคำตอบนี้. □

ทฤษฎีบท 11.1.4: คำตอบแบบอ่อนคือจุดต่ำสุดของพลังงาน (กรณีสมมาตร)

ให้ a เป็นฟอร์มเชิงเส้นคู่ต่อเนื่อง โคเออร์ซีฟ และสมมาตร, และให้ $F \in V'$. นิยาม
$$J(v) := \tfrac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$
แล้ว u เป็นคำตอบของ $a(u, v) = F(v)$ สำหรับทุก $v \in V$ ก็ต่อเมื่อ u เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ J บน V.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เทียบพลังงานที่ v กับที่ u โดยแยกส่วนต่างออกเป็นเทอมกำลังสองของ $v - u$; เทอมกำลังสองไม่เป็นลบ.

1. **ถ้า u แก้สมการ.** สำหรับ $v \in V$,
$$J(v) - J(u) = \tfrac{1}{2}a(v, v) - \tfrac{1}{2}a(u, u) - F(v) + F(u).$$
ใช้ $F(v) = a(u, v)$ และ $F(u) = a(u, u)$; เพราะ a สมมาตร,
$$J(v) - J(u) = \tfrac{1}{2}a(v - u, v - u) \ge \tfrac{\gamma}{2}\|v - u\|^2 \ge 0.$$
จึง $J(v) \ge J(u)$ ทุก v, และความเท่ากันเกิดเมื่อ $v = u$.

2. **ถ้า u เป็นจุดต่ำสุด.** สำหรับ $v \in V$ และ $t > 0$, $J(u + tv) \ge J(u)$. หารด้วย t แล้วให้ $t \downarrow 0$:
$$0 \le \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = a(u, v) - F(v).$$
แทน v ด้วย $-v$ ได้ $a(u, v) - F(v) \le 0$. จึง $a(u, v) = F(v)$ ทุก v.

สรุป: เมื่อ a สมมาตร ปัญหาอ่อนกับปัญหาค่าต่ำสุดของพลังงานเป็นปัญหาเดียวกัน; นี่คือสะพานไปสู่การเติมเต็มภาพ. □

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ตัวอย่าง: คำตอบแบบอ่อนของ $-u'' = 1$

ให้ $V = H^1_0(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u'v'$ และ $F(v) = \int_0^1 v$. ฟังก์ชัน

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}$$

มี $u' = \tfrac{1}{2} - x$, $u'' = -1$ และ $u(0) = u(1) = 0$. การหาปริพันธ์โดยส่วนให้ $a(u,v) = F(v)$ ทุก $v \in V$. เราคำนวณ

$$a(u,u) = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2 dx = \frac{1}{12} = 0.0833333333,$$

และ $F(u) = \int_0^1 x(1-x)/2\,dx = 1/12$. นอกจากนี้

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{120} = 0.0083333333, \qquad \|u\|_{H^1}^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120} = 0.0916666667,$$

จึง $\|u\|_{H^1} = 0.3027650354$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ตัวอย่าง: คำตอบแบบอ่อนของ $-u'' = \sin(\pi x)$

ให้ $f(x) = \sin(\pi x)$. คำตอบคือ

$$u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2},$$

เพราะ $-u'' = \sin(\pi x)$ และ $u(0) = u(1) = 0$. พลังงานคือ

$$a(u,u) = \int_0^1 \frac{\cos^2(\pi x)}{\pi^2} dx = \frac{1}{2\pi^2} = 0.0506605918,$$

และ $F(u) = \int_0^1 \sin^2(\pi x)/\pi^2\,dx = 1/(2\pi^2)$. นอร์ม L^2 คือ

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi^4} = 0.0051329911, \qquad \|u\|_{H^1} = 0.2362066531.$$

ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน. ตัวอย่างนี้จะกลับมาใน §11.3 เมื่อเราเปรียบเทียบคำตอบแบบอ่อนกับคำตอบกาเลอคิน.

ข้อควรระวัง: ถ้าไม่มีโคเออร์ซีฟ คำตอบอาจไม่เพียงหนึ่งเดียว

บน $(0,1)$ ให้ $a_\lambda(u,v) = \int_0^1 (u'v' - \lambda uv)$ กับ $\lambda = \pi^2$. ฟังก์ชัน $w(x) = \sin(\pi x)$ มี $w' = \pi\cos(\pi x)$ และ

$$a_\lambda(w,w) = \frac{\pi^2}{2} - \pi^2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

ดังนั้น w อยู่ในเคอร์เนลของฟอร์ม และ $a_\lambda(w,v) = 0$ สำหรับทุก $v \in H^1_0$ (เพราะ w เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ $-d^2/dx^2$). สมการ $a_\lambda(u,v) = 0$ จึงมีคำตอบมากกว่าหนึ่ง: $u = 0$ และ $u = w$. บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมใช้ไม่ได้เพราะ γ ต้องเป็นบวก; ที่ $\lambda = \pi^2$ ค่าคงตัวโคเออร์ซีฟที่ดีที่สุดคือ 0 (เพราะ $a_\lambda(w,w) = 0$).

ลองเอง: ตรวจคำตอบด้วยฟังก์ชันทดสอบหนึ่งตัว

ให้ $u(x) = x(1-x)/2$ และเลือก $v(x) = x(1-x)$. คำนวณ $a(u,v)$ และ $F(v)$ ด้วยมือ. ทั้งสองควรเท่ากับ $1/6 = 0.1666666667$. การตรวจหนึ่งฟังก์ชันไม่พิสูจน์ว่า u เป็นคำตอบแบบอ่อน (ต้องทุก v) แต่ช่วยจับความผิด

ร่างเรียน · Preprint · 2026-10-21

พลาดของเครื่องหมายและค่าคงตัวได้เร็ว.

สรุปใจความ

- รูปแบบอ่อนเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $a(u,v) = F(v)$ สำหรับทุกฟังก์ชันทดสอบ $v \in V$; คำตอบอยู่ใน H_0^1 ไม่ต้องมีอนุพันธ์อันดับสอง.
- อสมการปวงกาเร $\|u\|_{L^2} \le C_P \|\nabla u\|_{L^2}$ ทำให้เทอมเกรเดียนต์โคเออร์ซีฟ; บน $(0,1)$ เราใช้ $C_P = 1/\sqrt{2}$ และได้ค่าคงตัว $2/3$ สำหรับนอร์ม H^1.
- บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม: ฟอร์มต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟให้คำตอบเพียงหนึ่งเดียวและขอบ $\|u\|_V \le \gamma^{-1}\|F\|_{V'}$.
- ถ้าฟอร์มสมมาตร คำตอบแบบอ่อนคือจุดต่ำสุดของพลังงาน $J(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - F(v)$; นี่คือรูปที่ใช้กับการเติมเต็มภาพ.
- ถ้าไม่มีโคเออร์ซีฟ คำตอบอาจไม่เพียงหนึ่งเดียว; ตัวอย่าง $\lambda = \pi^2$ มีฟังก์ชัน $\sin(\pi x)$ อยู่ในเคอร์เนล.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(รูปแบบอ่อนของ $-u''+u=f$)** จงเขียนรูปแบบอ่อนของปัญหา $-u''+u=f$ บน $(0,1)$ กับ $u(0)=u(1)=0$ และตรวจว่าสำหรับ $f(x)=\sin(\pi x)$ ฟังก์ชัน $u(x)=\sin(\pi x)/(\pi^2+1)$ เป็นคำตอบแบบอ่อน. จงคำนวณ $a(u,u)$ และ $\|u\|_{L^2}^2$.

2. **(ปวงกาเร)** จงพิสูจน์ว่า $\|u\|_{L^2} \le (1/\sqrt{2})\|u'\|_{L^2}$ สำหรับ $u \in H_0^1(0,1)$. แล้วตรวจว่าฟังก์ชัน $w(x)=\sin(\pi x)$ ให้ $\|w\|_{L^2}/\|w'\|_{L^2} = 1/\pi = 0.3183098862$.

3. **(ค่าคงตัวของแลกซ์–มิลแกรม)** ให้ $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)$ บน $H_0^1(0,1)$ ซึ่งใช้นอร์ม $\|\cdot\|_{H^1}$. จงหาค่าคงตัว M และ γ ที่ดีที่สุดที่ใช้ได้ และเขียนขอบเสถียรภาพ.

4. **(ไม่มีโคเออร์ซีฟ)** ให้ $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' - 4\pi^2 uv)$. จงแสดงว่า $w(x)=\sin(2\pi x)$ อยู่ในเคอร์เนล และสมการ $a(u,v)=0$ มีคำตอบมากกว่าหนึ่ง.

5. **(พลังงาน)** สำหรับ $f=1$ และ $u(x)=x(1-x)/2$ จงคำนวณ $J(u) = \tfrac{1}{2}a(u,u) - F(u)$ และเปรียบเทียบกับ $J(0)$.

6. **(คำนวณ)** ใช้ `code/funkana/ch11.py` จงตรวจว่า $a(u,u)$ สำหรับ $f=1$ คือ $1/12 = 0.0833333333$ และ $\|u\|_{H^1} = 0.3027650354$; แล้วตรวจว่าคำตอบของ $-u''=\sin(\pi x)$ มีพลังงาน $1/(2\pi^2) = 0.0506605918$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **รูปแบบอ่อน.** ให้ $V = H_0^1(0,1)$ และ

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx, \qquad F(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

คำตอบแบบอ่อนคือ $u \in V$ ที่ $a(u,v) = F(v)$ ทุก $v \in V$. สำหรับ $f = \sin(\pi x)$ และ $u = \sin(\pi x)/(\pi^2+1)$,

$$u' = \frac{\pi\cos(\pi x)}{\pi^2+1}, \qquad -u'' + u = \frac{\pi^2\sin(\pi x)}{\pi^2+1} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2+1} = \sin(\pi x).$$

ดังนั้น u แก้สมการคลาสสิกและอยู่ใน H_0^1; การหาปริพันธ์โดยส่วนให้ $a(u,v) = F(v)$. ต่อมา

$$a(u,u) = \int_0^1 \frac{\pi^2\cos^2(\pi x) + \sin^2(\pi x)}{(\pi^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi^2+1}{2(\pi^2+1)^2} = \frac{1}{2(\pi^2+1)} = 0.0459998342,$$

และ

$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2(\pi^2+1)^2} = 0.0042319695.$$

ตัวเลขทั้งสองมีแบบทดสอบยืนยัน.

2. **ปวงกาเร.** เขียน $u(x) = \int_0^x u'(t)\,dt$. จากอสมการโคชี–ชวาร์ซ,

$$|u(x)|^2 \le x\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt.$$

หาปริพันธ์ x จาก 0 ถึง 1:

$$\int_0^1 |u(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt.$$

จึงได้ค่าคงตัว $1/\sqrt{2}$. สำหรับ $w = \sin(\pi x)$,

$$\|w\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}, \qquad \|w'\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{2},$$

อัตราส่วนจึง $1/\pi = 0.3183098862$. ค่านี้เล็กกว่า $1/\sqrt{2}$. ค่าคงตัวที่ดีที่สุดคือ $1/\pi$ (ไม่พิสูจน์ในบทนี้).

3. **ค่าคงตัว.** สำหรับ $u, v \in H_0^1$,

$$|a(u,v)| \le \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

จึงใช้ $M = 1$ ได้. และ $a(u,u) = \|u\|_{H^1}^2$, จึง $\gamma = 1$. ขอบเสถียรภาพคือ

$$\|u\|_{H^1} \le \|F\|_{V'}.$$

ค่าคงตัว $M = 1$ ดีที่สุด เพราะความเท่ากันในอสมการโคชี–ชวาร์ซเกิดเมื่อ $v = u$. ส่วน $\gamma = 1$ ดีที่สุดเพราะ $a(u,u) = \|u\|_{H^1}^2$ สำหรับทุก $u \in H_0^1$.

4. **เคอร์เนล.** ให้ $w = \sin(2\pi x)$. แล้ว $w' = 2\pi\cos(2\pi x)$ และ

$$a(w,w) = \int_0^1 (4\pi^2\cos^2(2\pi x) - 4\pi^2\sin^2(2\pi x))\,dx = 4\pi^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big) = 0.$$

เพราะ w เป็นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ $-d^2/dx^2$ ที่ค่าลักษณะเฉพาะ $4\pi^2$, $a(w,v) = 0$ ทุก $v \in H_0^1$. สมการ $a(u,v) = 0$ มีทั้ง $u = 0$ และ $u = w$ เป็นคำตอบ; คำตอบจึงไม่เพียงหนึ่งเดียว.

5. **พลังงาน.** จาก $a(u,u) = 1/12$ และ $F(u) = 1/12$,

$$J(u) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{24} = -0.0416666667.$$

และ $J(0) = 0$. ดังนั้น $J(u) < J(0)$; คำตอบแบบอ่อนให้พลังงานต่ำกว่าคำตอบศูนย์. ค่าต่ำสุดไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ เพราะเทอมข้อมูล $F(u)$ ดึงลง.

ฉบับร่าง · preprint · 2026-10-24

6. **คำนวณ.** ฟังก์ชันในไฟล์คำนวณ $u = x(1-x)/2$ และหาปริพันธ์ด้วยสูตรปิด; แบบทดสอบตรวจ $a(u,u) = 1/12$, $\|u\|_{H^1}^2 = 11/120$ และ $\|u\|_{H^1} = 0.3027650354$. สำหรับ $f = \sin(\pi x)$ พลังงานคือ $1/(2\pi^2) = 0.0506605918$ และ $\|u\|_{L^2}^2 = 1/(2\pi^4) = 0.0051329911$. ตัวเลขในโจทย์ตรงกับผลของแบบทดสอบ.

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ทำไมภาพจึงต้องการคำตอบแบบอ่อน

ภาพดิจิทัลไม่ได้เรียบเหมือนฟังก์ชันในตำราแคลคูลัส. ขอบวัตถุคือรอยกระโดดของความสว่าง; รอยขีดข่วนคือบริเวณที่ข้อมูลหาย; สัญญาณรบกวนทำให้อนุพันธ์อันดับสองมีค่ามากและเปลี่ยนเครื่องหมายไปมา. ถ้าเราบังคับให้สมการเป็นจริงทุกจุดพร้อมอนุพันธ์อันดับสอง คำตอบอาจไม่มีหรือไวต่อสัญญาณรบกวนมากเกินไป.

ขอบวัตถุในภาพมีการกระโดด และบริเวณรอยขีดอาจไม่มีข้อมูล. การบังคับสมการทุกจุดพร้อมอนุพันธ์อันดับสองจึงอาจไวต่อสัญญาณรบกวน. รูปแบบอ่อนตรวจสมการผ่านปริพันธ์กับฟังก์ชันทดสอบ; การเฉลี่ยนี้เปิดให้คำตอบอยู่ใน H^1 และให้เราใช้ฟังก์ชันเป็นชิ้นโดยไม่หาอนุพันธ์อันดับสองของภาพ.

ภาพเป็นเพียงแรงจูงใจ; เราไม่ได้อ้างว่าโปรแกรมตกแต่งภาพทำตามสมการนี้ทีละขั้น. เมื่อ $g \in H^{1/2}$ ทฤษฎีบทเทรซที่อ้างจากบทก่อนให้การยก และบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมให้คำตอบหนึ่งเดียว. ภายใต้สมมติฐานความหนาแน่นในหัวข้อ 11.3 เรายังพิสูจน์การลู่เข้าใน H^1; อัตราต้องการความเรียบหรือการยกที่ระบุแยกต่างหาก.

ข้อควรระวัง: เครื่องหมายของเทอมข้อมูล

เราใช้ $-\Delta u = f$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ และ $F(v) = \int_\Omega fv$. การเขียนสมการเดิมเป็น $\Delta u + f = 0$ ให้รูปแบบอ่อนเดิม; ความผิดพลาดเกิดเฉพาะเมื่อจับคู่ a กับ $-F$, ซึ่งเป็นปัญหาคนละเครื่องหมาย ไม่ใช่การหาค่าสูงสุด. ตรวจด้วย $v = u$: ต้องได้ $a(u,u) = F(u)$. ตัวอย่าง $f = 1$ ให้ทั้งสองข้างเป็น $1/12$; ตัวอย่าง $f = \sin(\pi x)$ ให้ $1/(2\pi^2)$. ถ้าไม่ตรงกัน ให้ตรวจเครื่องหมายของ F.

11.2 กาเลอคิน บทตั้งของเซอา และวิธีสมาชิกจำกัด

ภาพรวมก่อนอ่าน

สมการอ่อน $a(u,v) = F(v)$ ต้องเป็นจริงกับฟังก์ชันทดสอบทุกตัวในปริภูมิอนันต์มิติ. ในคอมพิวเตอร์เราเก็บฟังก์ชันได้เพียงจำนวนจำกัดค่า. ความคิดของกาเลอคินคือเลือกปริภูมิย่อย V_h มิติจำกัดก่อน แล้วบังคับให้สมการเป็นจริงเฉพาะกับ $v_h \in V_h$. คำตอบ u_h ที่ได้จึงเป็น “เงา” ของ u บนปริภูมิที่เราเลือก.

ภาพที่ต้องเก็บไว้คือ: u_h คือการฉายของ u ในเรขาคณิตที่วัดด้วยฟอร์ม a, ไม่ใช่การฉายตั้งฉากธรรมดา. ถ้า a เป็นผลคูณภายใน การฉายนี้คือการฉายตั้งฉาก และความคลาดเคลื่อนตั้งฉากกับ V_h. ถ้า a ไม่สมมาตร เราได้สมบัติตั้งฉากแบบกาเลอคินแทน: $a(u-u_h, v_h) = 0$ สำหรับทุก v_h. สมบัตินี้คือเครื่องมือหลักในการประมาณความคลาดเคลื่อน.

11.2.1 วิธีกาเลอคิน

ให้ V เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต, a ต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟด้วยค่าคงตัว M และ γ, และ $F \in V'$. ให้ $V_h \subset V$ เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัด. ปัญหามิติจำกัดคือ

$$\text{หา } u_h \in V_h \text{ ที่} \qquad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{สำหรับทุก } v_h \in V_h.$$

เพราะ V_h เป็นปริภูมิย่อยปิดของ V จึงเป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ a มีสมบัติเดิมบน V_h. บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมจึงให้คำตอบ u_h เพียงหนึ่งเดียวทันที; เราไม่ต้องสร้างทฤษฎีใหม่สำหรับมิติจำกัด.

ร่างเพื่อการอ่าน Preprint 2026-10-24

ถ้า $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ เป็นฐานของ V_h และ $u_h = \sum_{j=1}^{d} c_j \varphi_j$ สมการข้างบนกลายเป็นระบบเชิงเส้น

$$\sum_{j=1}^{d} a(\varphi_j, \varphi_i) c_j = F(\varphi_i), \qquad i = 1, \dots, d.$$

เมทริกซ์ $A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ เรียกว่า**เมทริกซ์สติฟเนส** (stiffness matrix) และเวกเตอร์ขวา $b_i = F(\varphi_i)$ คือ**เวกเตอร์ภาระ** (load vector). การสร้าง A และ b จากผลของแต่ละชิ้นแล้วบวกเข้าตำแหน่งร่วมกันเรียกว่า**การประกอบ** (assembly). ในวิธีสมาชิกจำกัด เมทริกซ์นี้เบาบาง เพราะฟังก์ชันฐานแต่ละตัวไม่เป็นศูนย์บนชิ้นข้างเคียงเพียงไม่กี่ชิ้น.

บทตั้ง 11.2.1: ความตั้งฉากแบบกาเลอคิน

ให้ u เป็นคำตอบแบบอ่อนใน V และ u_h เป็นคำตอบกาเลอคินใน $V_h \subset V$. แล้ว

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } v_h \in V_h.$$

พิสูจน์. เพราะ u แก้สมการกับทุก $v \in V$ จึงแก้กับ $v_h \in V_h$ ด้วย: $a(u, v_h) = F(v_h)$. และ u_h แก้สมการเดียวกัน: $a(u_h, v_h) = F(v_h)$. ลบสมการทั้งสอง ได้ $a(u - u_h, v_h) = 0$. ความเป็นเชิงเส้นของ a ในช่องแรกทำให้ลบได้. □

บทตั้ง 11.2.2: บทตั้งของเซอา

ให้ $u \in V$ เป็นคำตอบแบบอ่อน และ $u_h \in V_h$ เป็นคำตอบกาเลอคิน ภายใต้สมมติฐานของบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม และ $V_h \subset V$.

$$\|u - u_h\|_V \le \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ความตั้งฉากแบบกาเลอคินกับ $v_h - u_h$ เพื่อย้าย $u - u_h$ ไปเป็น $u - v_h$; แล้วใช้ความต่อเนื่องและความโคเออร์ซีฟ.

1. **ตั้งฉาก.** สำหรับ $v_h \in V_h$, $v_h - u_h \in V_h$ ดังนั้น

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = 0.$$

2. **ความโคเออร์ซีฟ.** จาก $a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$,

$$\gamma \|u - u_h\|_V^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

3. **ความต่อเนื่อง.** ใช้ความต่อเนื่องของ a กับด้านขวาของอสมการก่อนหน้า:

$$|a(u - u_h, u - v_h)| \le M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V.$$

ถ้า $\|u - u_h\|_V > 0$ หารด้วย $\gamma \|u - u_h\|_V$ ได้

$$\|u - u_h\|_V \le \frac{M}{\gamma} \|u - v_h\|_V.$$

ถ้า $\|u - u_h\| = 0$ อสมการเป็นจริงโดยปริยาย. เลือก infimum ทางขวา.

สรุป: ความคลาดเคลื่อนของคำตอบกาเลอคินถูกควบคุมด้วยความคลาดเคลื่อนของการประมาณที่ดีที่สุดใน V_h; ตัวคูณ M/γ ไม่ขึ้นกับมิติ. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

11.2.2 สมบัติการประมาณของการฉาย

บทตั้งของเซอาบอกว่าเราเหลือปัญหาเดียว: ปริภูมิ V_h ประมาณ u ได้ดีแค่ไหน. ในปริภูมิบานาคทั่วไป เราใช้ลำดับของการฉาย P_n ลงบนปริภูมิย่อยมิติจำกัดเพื่ออธิบายการประมาณ. บทตั้งต่อไปนี้มาจาก Alt 2012 (บทที่ 7); เราเขียนมันในรูปที่ใช้พิสูจน์ได้และระบุส่วนที่อ้างจากทฤษฎีบทส่วนเติมเต็มปิด.

ทฤษฎีบท 11.2.3: สมบัติการประมาณและความสัมพันธ์การสลับลำดับ

ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และสำหรับ $n \geq 0$ ให้ $X_n \subset X$ เป็นปริภูมิย่อยมิติจำกัดที่มี**ตัวดำเนินการฉาย** $P_n \in \mathcal{L}(X)$ ซึ่ง $P_n^2 = P_n$ และ $\mathcal{R}(P_n) = X_n$. (การมีอยู่ของ P_n สำหรับปริภูมิย่อยมิติจำกัดในบานาคทั่วไปอาศัยทฤษฎีบทส่วนเติมเต็มปิด; เราไม่พิสูจน์ส่วนนี้ในบทนี้. สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต P_n คือการฉายเชิงตั้งฉาก.) สมมติว่า

(P1) $P_n x \to x$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับทุก $x \in X$.

แล้ว

1. $C := \sup_n \|P_n\| < \infty$;
2. ถ้าเพิ่มสมมติฐาน

   (P2) $P_n P_m = P_{\min(n,m)}$ สำหรับทุก n, m,

   และนิยาม $Q_0 := P_0$ และ $Q_n := P_n - P_{n-1}$ สำหรับ $n \geq 1$ แล้ว Q_n เป็นตัวดำเนินการฉาย, $Q_n Q_m = \delta_{n,m} Q_n$, และ $P_n = \sum_{i=0}^{n} Q_i$;
3. กลับกัน ถ้า $Q_n \in \mathcal{L}(X)$ $(n \geq 0)$ เป็นตัวดำเนินการฉายที่

   (Q1) $\sum_{i=0}^{n} Q_i x \to x$ สำหรับทุก $x \in X$,

   (Q2) $Q_n Q_m = \delta_{n,m} Q_n$,

   แล้ว $P_n := \sum_{i=0}^{n} Q_i$ เป็นตัวดำเนินการฉายที่มี (P1) และ (P2);
4. ให้ $E_n := \mathcal{R}(Q_n)$. แล้ว $X_n = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ สำหรับทุก $n \geq 0$.

พิสูจน์ (ส่วนที่พิสูจน์ได้). **แนวคิด.** ขอบเขตเอกรูปมาจากหลักการมีขอบเขตเอกรูป; การสลับลำดับเป็นพีชคณิตของการฉาย; ผลบวกตรงมาจากการทดสอบด้วย Q_j.

1. **ขอบเขตเอกรูป.** ตรึง x ไว้. เพราะ $P_n x \to x$, เซต $\{P_n x : n \geq 1\}$ มีขอบเขต. ตัวดำเนินการ P_n ทุกตัวต่อเนื่องและ X บริบูรณ์; หลักการมีขอบเขตเอกรูปจึงใช้กับลำดับ (P_n) ได้ และให้ $\sup_n \|P_n\| < \infty$. นี่คือ C.
2. **จาก (P2) ไปยัง (Q).** จาก $P_n^2 = P_n$ และ $P_n P_{n-1} = P_{n-1} P_n = P_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 1$,

$$Q_n^2 = (P_n - P_{n-1})^2 = P_n - P_{n-1} - P_{n-1} + P_{n-1} = P_n - P_{n-1} = Q_n,$$

   และ $Q_0^2 = P_0^2 = Q_0$. ถ้า $n > m \geq 1$ แล้ว $Q_n Q_m = P_n P_m - P_n P_{m-1} - P_{n-1} P_m + P_{n-1} P_{m-1} = P_m - P_{m-1} - P_m + P_{m-1} = 0$; ถ้า $m = 0 < n$ แล้ว $Q_n Q_0 = P_n P_0 - P_{n-1} P_0 = P_0 - P_0 = 0$. กรณี $m > n$ ได้ศูนย์โดยสลับบทบาท; กรณี $n = m$ ได้ Q_n. ผลบวก Telescoping ให้ $\sum_{i=0}^{n} Q_i = P_0 + \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_{i-1}) = P_n$.

ร่างไม่เป็นทางการ · Preprint · 2026-10-24

3. **จาก (Q) ไปยัง (P).** ถ้า $n \le m$,
$$P_n P_m = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} Q_i Q_j = \sum_{i=0}^{n} Q_i = P_n = P_{\min(n,m)}.$$
และ $P_n x = \sum_{i=0}^{n} Q_i x \to x$ ตาม (Q1).

4. **ผลบวกตรง.** ถ้า $x \in X_n = \mathcal{R}(P_n)$ แล้ว $x = P_n x = \sum_{i=0}^{n} Q_i x$ โดย $Q_i x \in E_i$; จึง $X_n \subset E_0 + \cdots + E_n$. กลับกัน สำหรับ $1 \le i \le n$ จาก (P2) ได้ $P_n P_i = P_i$ และ $P_n P_{i-1} = P_{i-1}$ และสำหรับ $i = 0$ ได้ $P_n P_0 = P_0$; ภาพของ P_i และ P_{i-1} จึงอยู่ใน X_n และ $Q_i = P_i - P_{i-1}$ (หรือ $Q_0 = P_0$) มีภาพอยู่ใน X_n. ดังนั้น $E_i \subset X_n$. ถ้า $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$ กับ $x_i \in E_i$ แล้วทดสอบด้วย Q_j: เพราะ $Q_j Q_i = \delta_{ji} Q_i$ และ $Q_j^2 = Q_j$,
$$0 = Q_j\Big(\sum_{i=0}^{n} x_i\Big) = x_j.$$
ทุก $x_j = 0$; ผลบวกจึงเป็นตรง.

สรุป: การลู่เข้าทีละจุดให้ขอบเขตเอกรูป; การสลับลำดับทำให้การฉายซ้อนกันได้ และเปลี่ยนเป็นการบวกผลต่างทีละชั้น. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ส่วนที่อ้างและส่วนที่พิสูจน์

ข้อความเดิมใน Alt 2012 (บทที่ 7) เริ่มด้วยการอ้างว่ามีตัวดำเนินการฉาย $P_n \in \mathcal{P}(X)$ ที่ $X_n = \mathcal{R}(P_n)$. การมีอยู่ของ P_n ในบานาคทั่วไปคือทฤษฎีบทส่วนเติมเต็มปิด ซึ่งต้องใช้ฮาห์น–บานาค; เราไม่ได้พิสูจน์ในบทนี้และไม่ได้ใช้ในบทนี้เพราะปริภูมิของเราเป็นฮิลเบิร์ต. ส่วนที่ใช้จริงคือ (P1) และ (P2) กับผลของมัน ซึ่งพิสูจน์ครบข้างบน. สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต การฉายเชิงตั้งฉากบนปริภูมิย่อยปิดมีอยู่และมีนอร์มหนึ่ง.

ตัวอย่าง: การฉายค่าคงตัวเป็นช่วง

ให้ $X = L^2(0,1)$ และแบ่ง $(0,1)$ เป็น 2^n ช่วงเท่า ๆ. ให้ $P_n f$ เป็นค่าฉายของ f ที่เป็นค่าคงตัวบนแต่ละช่วงเท่ากับค่าเฉลี่ยของ f บนช่วงนั้น. สำหรับ $f(x) = x$ และ $n = 1$,
$$P_1 f = \frac{1}{4} \text{ บน } (0,\tfrac{1}{2}), \qquad P_1 f = \frac{3}{4} \text{ บน } (\tfrac{1}{2},1).$$
ดังนั้น $Q_1 f = P_1 f - P_0 f$ โดย $P_0 f = \frac{1}{2}$ คือ
$$Q_1 f = -\frac{1}{4} \text{ บน } (0,\tfrac{1}{2}), \qquad Q_1 f = +\frac{1}{4} \text{ บน } (\tfrac{1}{2},1).$$
ตัวเลข -0.25 และ 0.25 มีแบบทดสอบยืนยัน. การฉายนี้มี $\|P_n\| = 1$ (ค่าเฉลี่ยไม่เพิ่มนอร์ม L^2) และ $P_n P_m = P_{\min(n,m)}$ เพราะการแบ่งช่วงละเอียดขึ้นไม่ตัดจุดเดิมออก.

11.2.3 การประกอบปริภูมิพหุนามบนเมช

ตอนนี้เราเปลี่ยนจากปริภูมิเชิงนามธรรมมาเป็นปริภูมิที่สร้างได้ด้วยมือ. ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ เป็นโดเมนรูปหลายเหลี่ยม. **การแบ่งสามเหลี่ยม** (triangulation) ของ Ω คือเซตของสามเหลี่ยมปิด $\{K_j\}$ ที่รวมกันเป็น $\overline{\Omega}$ และส่วนตัดของสองรูปใด ๆ เป็นเซตว่าง, จุดยอดร่วม, หรือด้านร่วมเต็มด้าน.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

นิยาม 11.2.1: การแบ่งแบบยอมรับได้

การแบ่ง $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$ จะเรียกว่า**การแบ่งแบบยอมรับได้** (admissible triangulation) ถ้าชิ้นสองชิ้นที่ต่างกันไม่ทับซ้อนกันภายใน และการพบกันของชิ้นเกิดได้เพียงตามรูปทรงร่วมที่ทั้งคู่มีตรงกัน: ด้านเต็มด้าน, จุดยอดเดียว หรือไม่มีจุดร่วม. ชิ้นหนึ่งย่อมตัดตัวเองได้ทั้งชิ้น.

นิยาม 11.2.2: พหุนามเป็นชิ้น

ให้ $\mathcal{T}$ เป็นการแบ่งแบบยอมรับได้. ฟังก์ชัน $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ เป็น**พหุนามเป็นชิ้นดีกรีไม่เกิน** k (piecewise polynomial) เมื่อ $v|_{\Omega_j}$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน k สำหรับทุกชิ้น Ω_j. เราเขียน $\mathbb{P}_{\mathcal{T},k}$ แทนปริภูมิของฟังก์ชันเหล่านี้.

เพื่อให้ฟังก์ชันพหุนามเป็นชิ้นอยู่ใน $H^1(\Omega)$ เราต้องการความต่อเนื่องข้ามด้าน. บทตั้งต่อไปนี้ให้เงื่อนไขที่ใช้ง่าย: ฟังก์ชันที่เป็น C^1 บนแต่ละชิ้นและต่อเนื่องทั้งโดเมนอยู่ใน H^1.

บทตั้ง 11.2.4: ความต่อเนื่องให้สมาชิกภาพใน H^1

ให้ $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ เป็นการแบ่งแบบยอมรับได้ และให้ $z : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ มี $z|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j)$ ทุก j. ถ้า z ต่อเนื่องบน $\overline{\Omega}$ แล้ว $z \in H^1(\Omega)$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** นิยามอนุพันธ์อ่อนเป็นอนุพันธ์ทีละชิ้น แล้วใช้การหาปริพันธ์โดยส่วนบนแต่ละชิ้น; เทอมขอบภายในตัดกันเพราะ z ต่อเนื่องและเวกเตอร์ตั้งฉากกลับทิศ.

1. **อนุพันธ์ทีละชิ้น.** ให้ w_k เป็นฟังก์ชันที่บน Ω_j เท่ากับ $\partial_k z|_{\Omega_j}$. เพราะ $z|_{\Omega_j} \in C^1(\overline{\Omega}_j)$ และ Ω มีขอบเขต, w_k มีขอบเขตและอยู่ใน $L^2(\Omega)$.

2. **การหาปริพันธ์โดยส่วน.** สำหรับ $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega z\,\partial_k\varphi\,dx = \sum_{j=1}^m \Big(\int_{\partial\Omega_j} z\varphi\,\nu_{j,k}\,dS - \int_{\Omega_j} w_k\varphi\,dx \Big),$$

   โดย ν_j เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากขาออกของ Ω_j.

3. **เทอมขอบตัดกัน.** เทอมบนขอบนอกเป็นศูนย์เพราะ φ มีตัวรองรับกระชับใน Ω. บนด้านร่วม Γ_{jl} ระหว่างสองชิ้น, $\nu_l = -\nu_j$ และ z มีค่าเดียวกันจากความต่อเนื่อง; เทอมทั้งสองจึงเป็นค่าลบกันและตัดกัน.

4. **สรุป.** เหลือ

$$\int_\Omega z\,\partial_k\varphi\,dx = -\int_\Omega w_k\varphi\,dx \qquad \text{สำหรับทุก } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

   นี่คือนิยามอนุพันธ์อ่อน $w_k = \partial_k z$. ดังนั้น z และอนุพันธ์อันดับหนึ่งทั้งหมดอยู่ใน L^2; $z \in H^1(\Omega)$.

สรุป: ความต่อเนื่องข้ามด้านทำให้เทอมขอบภายในตัดกัน; อนุพันธ์ทีละชิ้นจึงเป็นอนุพันธ์อ่อนของฟังก์ชันทั้งโดเมน. □

ในสองมิติ ปริภูมิฟังก์ชันต่อเนื่องที่เป็นเชิงเส้นบนแต่ละสามเหลี่ยมมีฐานตามจุดยอด. สำหรับจุดยอด z ของเมช ให้ φ_z เป็นฟังก์ชันที่เชิงเส้นบนแต่ละสามเหลี่ยม โดย $\varphi_z(z) = 1$ และ $\varphi_z(z') = 0$ ทุกจุดยอด $z' \neq z$. ฟังก์ชันเชิงเส้นบนสามเหลี่ยมถูกกำหนดด้วยค่าที่จุดยอดสามจุด และบนด้านร่วมมันขึ้นกับค่าที่ปลายด้านเท่านั้น จึง φ_z ต่อเนื่องทั้งโดเมน. เรียก φ_z ว่า**ฟังก์ชันรูปหมวก** (hat function) เช่นเดียวกับหนึ่งมิติ.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ถ้า z เป็นจุดยอดบนขอบ φ_z หายบนขอบ. ทุก $v \in V_h$ ที่หายบนขอบเขียนได้เป็น $v = \sum_z v(z)\varphi_z$ โดยผลรวมบนจุดยอดภายในเท่านั้น จึง $\dim V_h$ เท่ากับจำนวนจุดยอดภายใน. สำหรับ $u \in C(\overline{\Omega})$ ที่หายบน $\partial\Omega$ ให้ $I_h u := \sum_z u(z)\varphi_z$; ค่าที่จุดยอดขอบเป็นศูนย์ จึง $I_h u \in V_h$ และ $I_h u(z) = u(z)$ ที่ทุกจุดยอดภายใน. นี่คือกรณี $k = 1$ ของตัวประมาณลากร็องจ์ที่ใช้ในหัวข้อ 11.3.2.

11.2.4 ฟังก์ชันรูปหมวกและเมทริกซ์สติฟเนสในหนึ่งมิติ

ในหนึ่งมิติ การแบ่งคือ $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ โดย $h = 1/N$. ให้

$$V_h := \{ v \in C[0,1] : v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1,\ v(0) = v(1) = 0 \}.$$

ฟังก์ชันฐานคือ**ฟังก์ชันรูปหมวก** (hat function) φ_i ซึ่ง $\varphi_i(x_i) = 1$ และเป็นศูนย์ที่โหนดอื่น. สำหรับ $i = 1, \dots, N-1$,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ (x_{i+1} - x)/h, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

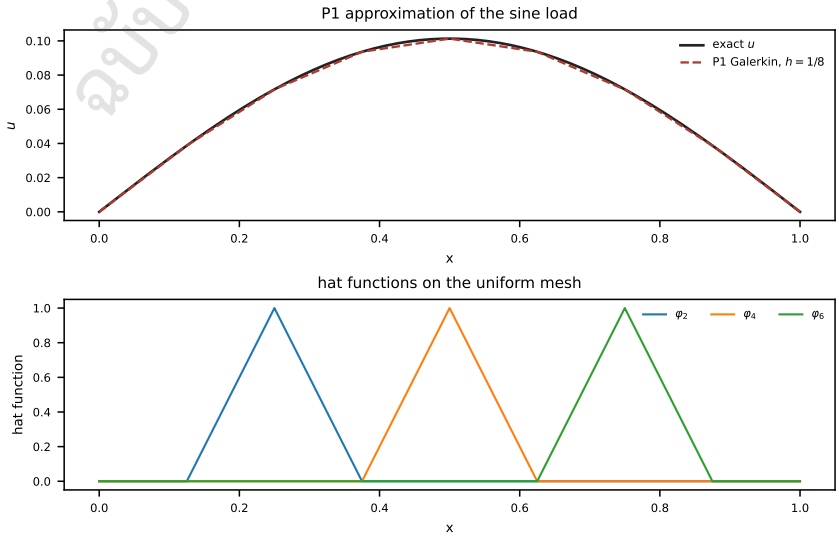
ทุก $v \in V_h$ เขียนได้เพียงแบบเดียวเป็น $v = \sum_{i=1}^{N-1} v(x_i)\varphi_i$; จึง $\dim V_h = N - 1$.

สำหรับ $a(u,v) = \int_0^1 u'v'$ เราคำนวณ

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{2}{h}, \qquad a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = -\frac{1}{h},$$

และคู่อื่นเป็นศูนย์. เมทริกซ์สติฟเนสจึงเป็นเมทริกซ์สามแนวทแยง

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$



รูปที่ 11.2: กราฟคำตอบ P_1 สำหรับแรง $\sin(\pi x)$ และฟังก์ชันรูปหมวกสามตัวบนเมชแปดช่วง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สำหรับ $f = 1$ เวกเตอร์ภาระคือ $b_i = \int_0^1 \varphi_i = h$ ทุก i. ระบบ $Ac = b$ จึงมีคำตอบ $c_i = h^2 i(N-i)/2 = u(x_i)$ เมื่อ $u(x) = x(1-x)/2$. นี่หมายความว่าคำตอบกาเลอคินเท่ากับการประมาณค่าในช่วงของคำตอบจริงที่โหนดพอดี; ความคลาดเคลื่อนอยู่ระหว่างโหนด.

ตัวอย่าง: คำตอบและความคลาดเคลื่อนบนเมชสี่และแปดช่วง

ให้ $f = 1$ และ $u(x) = x(1-x)/2$. จาก $Ac = b$ และ $b_i = h$, สัมประสิทธิ์ที่ $c_i = h^2 i(N-i)/2$ แก้ระบบเพราะ $2c_i - c_{i-1} - c_{i+1} = h^2$ และ $c_0 = c_N = 0$. ดังนั้นคำตอบกาเลอคินตรงกับ $u(x_i)$ ที่ทุกโหนด. สำหรับ $N = 4$, $h = 1/4$,

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 3/32 \\ 1/8 \\ 3/32 \end{pmatrix}.$$

บนช่วง $[a, a+h]$, เมื่อ $x = a + th$, ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณเชิงเส้นเป็น

$$u - I_h u = \frac{h^2}{2} t(1-t), \qquad \max |u - I_h u| = \frac{h^2}{8}.$$

การหาปริพันธ์ทีละช่วงให้

$$\|u - I_h u\|_{L^2}^2 = \frac{h^4}{120}, \qquad |u - I_h u|_{H^1}^2 = \frac{h^2}{12}.$$

ตารางแสดงค่าจากสูตรเหล่านี้สำหรับ $N = 4, 8$; ตัวเลขคำนวณซ้ำจากค่าที่โหนดและปริพันธ์เชิงตัวเลข. อัตราส่วนยืนยันว่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดและ L^2 ลดลงสี่เท่า ส่วนกึ่งนอร์ม H^1 ลดลงสองเท่าเมื่อ h ลดครึ่ง. ตัวอย่างนี้เป็นกรณีปิดรูปของอัตราที่พิสูจน์ทั่วไปในหัวข้อ 11.3.

N	h	$\max \lvert u - u_h \rvert$	$\lVert u - u_h \rVert_{L^2}$	$\lvert u - u_h \rvert_{H^1}$
4	1/4	0.0078125000	0.0057054433	0.0721687836
8	1/8	0.0019531250	0.0014263608	0.0360843918

ทฤษฎีบท 11.2.5: ค่าที่โหนดของคำตอบกาเลอคินในหนึ่งมิติ

ให้ $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ เป็นเมชใดก็ได้ และให้ V_h เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่เป็นเชิงเส้นบนแต่ละช่วงและหายที่ $x = 0$ กับ $x = 1$. ให้ u เป็นคำตอบแบบอ่อนของ $-u'' = f$ บน $(0,1)$ กับ $u(0) = u(1) = 0$ และให้ $u_h \in V_h$ เป็นคำตอบกาเลอคิน โดยภาระ $b_i = \int_0^1 f\varphi_i$ คำนวณแม่นยำ. แล้ว $u_h = I_h u$ เมื่อ $I_h u$ เป็นตัวประมาณเชิงเส้นเป็นชิ้นที่ผ่านค่า $u(x_i)$; โดยเฉพาะ $u_h(x_i) = u(x_i)$ ทุกโหนดภายใน.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ค่าของ $\int v'\varphi_i'$ ขึ้นกับค่าของ v ที่โหนดเท่านั้น จึง $I_h u$ แก้ระบบกาเลอคินเดียวกับ u_h.

ให้ $h_j := x_j - x_{j-1}$. เพราะ φ_i' คงที่บนแต่ละช่วง, สำหรับทุก $v \in H^1(0,1)$,

$$\int_0^1 v'\varphi_i' \, dx = \frac{v(x_i) - v(x_{i-1})}{h_i} - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h_{i+1}},$$

ซึ่งขึ้นกับค่าของ v ที่โหนดเท่านั้น. ใช้กับ $v = u$ และ $v = I_h u$ ซึ่งมีค่าที่โหนดเหมือนกัน ได้ $a(I_h u, \varphi_i) = a(u, \varphi_i) = F(\varphi_i)$ โดยสมการอ่อนของ u. ดังนั้น $I_h u \in V_h$ แก้ระบบกาเลอคินเดียวกับ u_h, และคำตอบนั้นมีเพียงหนึ่งเดียว จึง $u_h = I_h u$. $\square$

สปป.ก. Preprint · 2026-10-21

ในกรณี $f = 1$ ที่คำนวณไว้ข้างบน เป็นกรณีพิเศษของทฤษฎีบทนี้. ผลสำคัญคือในหนึ่งมิติ $u - u_h = u - I_h u$ ทั้งฟังก์ชัน ความคลาดเคลื่อนของกาเลอคินจึงเป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าในช่วงเสมอ. ข้อพิสูจน์นี้ใช้โครงสร้างหนึ่งมิติโดยตรง จึงไม่ได้ทั่วไปไปยังสองมิติ.

ตัวอย่าง: กาเลอคินของ $-u'' = \sin(\pi x)$ บนเมชสี่ช่วง

ให้ $f(x) = \sin(\pi x)$, $N = 4$ และ $h = 1/4$. คำตอบจริงคือ $u(x) = \sin(\pi x)/\pi^2$. ภาระที่โหนดภายในคำนวณได้จากปริพันธ์โดยตรง (หรือจาก $b_i = a(u, \varphi_i) = (2u_i - u_{i-1} - u_{i+1})/h$):

$$b_i = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\varphi_i\,dx = \beta \sin(\pi x_i), \qquad \beta = \frac{2(1-\cos \pi h)}{\pi^2 h} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{\pi^2} = 0.2374103009,$$

จึง $b_1 = b_3 = \beta\sqrt{2}/2 = 0.1678744337$ และ $b_2 = \beta$. ระบบ $\frac{1}{h}\,\mathrm{tridiag}(-1, 2, -1)\,c = b$ มีคำตอบ

$$c_1 = c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} = 0.0716449, \qquad c_2 = \frac{1}{\pi^2} = 0.1013212,$$

ซึ่งเท่ากับ $u(x_i)$ ที่โหนดพอดี ตามทฤษฎีบทข้างบน. ตรวจแถวแรก: $\frac{1}{h}(2c_1 - c_2) = 4(0.1432898 - 0.1013212) = 0.1678744 = b_1$. ความคลาดเคลื่อนระหว่างโหนดจึงมาจากการประมาณค่าในช่วงทั้งหมด ไม่ได้มาจากการแก้ระบบ.

ตัวอย่าง: จำนวนของเมชสองมิติ

สำหรับการแบ่งสี่เหลี่ยมจัตุรัส $N \times N$ เป็นสามเหลี่ยมสองรูปต่อช่อง: จำนวนจุดยอดคือ $(N+1)^2$, จำนวนสามเหลี่ยมคือ $2N^2$, และจำนวนจุดภายในคือ $(N-1)^2$. สำหรับ $N = 4$ เราได้ 25 จุดยอด, 32 สามเหลี่ยม และ 9 จุดภายใน; มิติของ V_h คือ 9. สำหรับ $N = 8$ เราได้ 81, 128 และ 49. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน.

ข้อควรระวัง: คอนฟอร์มมิง

บทตั้งของเซอาใช้ $V_h \subset V$. ถ้าปริภูมิประมาณไม่ได้อยู่ใน V (เช่นใช้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องข้ามด้านหรือแก้เงื่อนไขขอบแบบไม่แม่น) สมการกาเลอคินยังแก้ได้ แต่สมบัติตั้งฉากและบทตั้งของเซอาใช้ไม่ได้ตรง ๆ. เราเรียกวิธีที่ $V_h \subset V$ ว่า**วิธีคอนฟอร์มมิง** (conforming method). ในบทนี้เราใช้เฉพาะวิธีคอนฟอร์มมิง; วิธีไม่คอนฟอร์มมิงต้องมีการวิเคราะห์เพิ่มเติมและไม่กล่าวถึง.

สรุปใจความ

- เมื่อเลือก V_h มิติจำกัดแล้ว สมการกาเลอคินสืบการมีอยู่และเอกลักษณ์มาจากบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมโดยตรง.
- ผลต่าง $u - u_h$ ตั้งฉากกับ V_h ในเรขาคณิตของ a; จากสมบัตินี้ได้บทตั้งของเซอา ซึ่งบอกว่าคำตอบกาเลอคินเกือบดีที่สุดใน V_h.
- สมมติฐานการลู่เข้าของการฉายให้ขอบเขตของ $\|P_n\|$ พร้อมกัน; สมมติฐานการสลับระดับทำให้เขียนการฉายเป็นการบวกผลต่างชั้นที่ไม่ทับซ้อน.
- ปริภูมิ $\mathbb{P}_{\mathcal{T},1}$ อยู่ใน H^1 และมีฐานรูปหมวก.
- ในหนึ่งมิติ กาเลอคินเท่ากับการประมาณเชิงเส้นที่โหนดสำหรับทุก f (เมื่อภาระแม่นยำ); เมื่อ $f = 1$ ความคลาด

ฉบับร่าง. Preprint. 2026-10-24

เคลื่อนระหว่างโหนดสูงสุดคือ $h^2/8$.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(ความตั้งฉาก)** สำหรับ $N = 4$ และ $f = 1$ จงตรวจว่า $a(u - u_h, \varphi_i) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ โดยใช้ $u = x(1-x)/2$ และค่าของ u_h จากตัวอย่าง.

2. **(เซอา)** จงพิสูจน์บทตั้งของเซอาโดยไม่ใช้ความสมมาตรของ a และอธิบายว่าค่าคงตัว M/γ มาจากไหน.

3. **(เมทริกซ์)** จงเขียนเมทริกซ์สติฟเนสและเวกเตอร์ภาระสำหรับ $N = 4$ แล้วแก้ระบบด้วยมือ; ตรวจว่าคำตอบตรงกับ $u(x_i)$.

4. **(การประมาณค่าในช่วง)** ให้ $u(x) = x^2$ บน $(0,1)$ และ V_h เป็นปริภูมิ $\mathbb{P}_1$ ที่มีโหนด $0, h, 2h, \dots, 1$. จงหาความคลาดเคลื่อนสูงสุดบนแต่ละช่วง และแสดงว่ามันคือ $h^2/4$. สำหรับ $h = 1/4$ จงหาค่า.

5. **(สมบัติการประมาณ)** สำหรับการฉายค่าคงตัวเป็นช่วง จงคำนวณ $P_1 f$ และ $Q_1 f$ สำหรับ $f(x) = x$ แล้วตรวจว่า $Q_1^2 = Q_1$ และ $P_1 P_2 = P_1$.

6. **(เมชสองมิติ)** สำหรับ $N = 4$ จงนับจุดยอด สามเหลี่ยม และจุดภายใน แล้วตรวจสูตร $V - E + F = 2$ โดยนับด้านทั้งหมด.

7. **(คำนวณ)** ใช้ `code/funkana/ch11.py` จงตรวจความคลาดเคลื่อนสูงสุดสำหรับ $N = 4$ และ $N = 8$ และอัตราส่วน $0.0078125/0.001953125 = 4$.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ความตั้งฉาก.** ให้ $e = u - u_h$. ที่โหนด $u_h(x_i) = u(x_i)$ ดังนั้น $e(x_i) = 0$ ทุกโหนด. บนแต่ละช่วง e เป็นฟังก์ชันกำลังสองลบเส้นตรง จึงเป็นกำลังสองที่มีศูนย์ที่ปลายทั้งสอง: $e(x) = C_i (x - x_{i-1})(x - x_i)$. สำหรับ φ_i ซึ่งไม่เป็นศูนย์บนสองช่วงข้างโหนด i,
$$a(e, \varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} e' \varphi_i' + \int_{x_i}^{x_{i+1}} e' \varphi_i'.$$
บนแต่ละช่วงที่ φ_i ไม่เป็นศูนย์ อนุพันธ์ φ_i' เป็นค่าคงตัว. เพราะ e หายที่ปลายทั้งสองของทุกช่วง, เราได้
$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} e' \varphi_i' \, dx = \varphi_i' \big(e(x_j) - e(x_{j-1}) \big) = 0.$$
บวกสองช่วงแล้วได้ $a(e, \varphi_i) = 0$ สำหรับทุก i.

2. **เซอา.** เราเริ่มจาก $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. จากความโคเออร์ซีฟ,
$$\gamma \|u - u_h\|^2 \le a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$
จากความต่อเนื่องของ a,
$$|a(u - u_h, u - v_h)| \le M \|u - u_h\| \|u - v_h\|.$$

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

หารด้วย $\gamma\|u-u_h\|$ (ถ้าเป็นศูนย์ก็จบ) และเลือก infimum. ไม่ได้ใช้ $a(u,v)=a(v,u)$; ใช้เพียงเชิงเส้นในช่องแรกและความต่อเนื่อง $|a(u,v)|\le M\|u\|\|v\|$. ค่าคงตัว M/γ คืออัตราส่วนระหว่างขอบบนของฟอร์มกับขอบล่างของมัน.

3. **เมทริกซ์.** สำหรับ $N=4$, $h=1/4$,

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0\\ -4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 8\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0.25\\0.25\\0.25\end{pmatrix}.$$

แก้: จากสมการแรก $8c_1-4c_2=0.25$. สมการที่สอง $-4c_1+8c_2-4c_3=0.25$. ความสมมาตรทำให้ $c_1=c_3$. แทน $c_3=c_1$: $-8c_1+8c_2=0.25$, จึง $c_2-c_1=0.03125$. จาก $8c_1-4c_2=0.25$ และ $c_2=c_1+0.03125$: $4c_1-0.125=0.25$, จึง $c_1=0.09375$. แล้ว $c_2=0.125$, $c_3=0.09375$. ตรงกับ $u(0.25)=0.09375$ และ $u(0.5)=0.125$.

4. **การประมาณค่าในช่วง.** บนช่วง $[x_{i-1},x_i]$ ให้ $x=x_{i-1}+th$, $0\le t\le 1$. การประมาณค่าในช่วงคือ $(1-t)x_{i-1}^2+tx_i^2$. ผลต่าง

$$x^2-\big((1-t)x_{i-1}^2+tx_i^2\big)=-h^2t(1-t).$$

ค่าสูงสุดของค่าสัมบูรณ์ที่ $t=1/2$ คือ $h^2/4$. สำหรับ $h=1/4$ ได้ $1/64=0.015625$.

5. **สมบัติการประมาณ.** จากตัวอย่าง $P_1f=1/4$ บนครึ่งแรกและ $3/4$ บนครึ่งหลัง; $P_0f=1/2$. ดังนั้น $Q_1f=-1/4$ และ $+1/4$. จาก (P2), $P_1P_0=P_0P_1=P_0$; จึง

$$Q_1^2=(P_1-P_0)^2=P_1-P_0-P_0+P_0=P_1-P_0=Q_1.$$

นอกจากนี้ $P_1P_2=P_1$: P_2f มีปริพันธ์บนแต่ละช่วงหยาบเท่ากับของ f จึงได้ค่าเฉลี่ยบนช่วงหยาบเท่าเดิม.

6. **เมชสองมิติ.** $V=(N+1)^2=25$. ด้าน: แนวนอน $(N+1)N=20$, แนวตั้ง 20, เส้นทแยงหนึ่งเส้นต่อช่อง $N^2=16$; รวม $E=56$. หน้า: สามเหลี่ยม $2N^2=32$ บวกหน้าภายนอก 1; $F=33$. ดังนั้น $V-E+F=25-56+33=2$.

7. **คำนวณ.** ให้ฟังก์ชัน `constant_load_max_error` รับจำนวนช่วง N. ค่าที่ได้คือ

$$\texttt{constant\_load\_max\_error(4)}=0.0078125,$$

$$\texttt{constant\_load\_max\_error(8)}=0.001953125.$$

อัตราส่วนคือ 4; ตรงกับ $h^2/8$ เพราะ h ลดครึ่งหนึ่ง. แบบทดสอบตรวจทั้งสองค่าและอัตราส่วน.

ร่างพิมพ์ · Preprint 2026-10-24

11.3 การลู่เข้าและค่าประมาณความคลาดเคลื่อน

ภาพรวมก่อนอ่าน

บทตั้งของเซอาในหน่วยที่แล้วบอกว่า $\|u-u_h\|_V$ ไม่เกินค่าคงตัวคูณระยะทางจาก u ถึงปริภูมิ V_h. แต่ระยะทางนั้นยังเป็นปริมาณที่เราไม่รู้. คำถามของหน่วยนี้คือ: ระยะทางจาก u ถึงปริภูมิของพหุนามเป็นชิ้นลดลงเร็วแค่ไหนเมื่อเมชละเอียดขึ้น.

ภาพที่ต้องเก็บไว้คือการเปรียบเทียบสองฟังก์ชันบนชิ้นเล็ก ๆ. บนชิ้นเดียว ฟังก์ชันเรียบ u กับตัวประมาณ Πu ต่างกันในอันดับของ h^{k+1} คูณอนุพันธ์อันดับ $k+1$ ของ u. เมื่อรวมทุกชิ้น กำลังของ h ยังคงเดิม เพราะจำนวนชิ้นเพิ่มขึ้นแต่ขนาดของแต่ละชิ้นลดลงพอดี. จากนั้นบทตั้งของเซอาเปลี่ยนข้อเท็จจริงเรื่อง “การประมาณ” นี้เป็นข้อเท็จจริงเรื่อง “คำตอบกาเลอคิน”.

เทคนิคออบิน–นิทเชอ (Aubin--Nitsche technique) ให้อีกระดับหนึ่ง. เมื่อเราวัดความคลาดเคลื่อนในนอร์ม L^2 ซึ่งอ่อนกว่านอร์ม H^1 คำตอบกาเลอคินลู่เข้าเร็วขึ้นหนึ่งอันดับ. ราคาที่ต้องจ่ายคือสมมติฐานเพิ่มเติมว่า**ปัญหาผูกพัน** (adjoint problem) มีความสม่ำเสมอ. ถ้าคำตอบจริงมีมุมหรือเอกฐาน สมมติฐานนั้นอาจใช้ไม่ได้ และอัตราที่ได้จะตกลง.

11.3.1 การประมาณบนชิ้นอ้างอิง

เราเริ่มจากชิ้นเดียว. ให้ $\hat{K}\subset\mathbb{R}^n$ เป็น**ชิ้นอ้างอิง** (reference element) ซึ่งคงที่ตลอดการวิเคราะห์ (ในสองมิติเราใช้สามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งหน่วย). ให้ K เป็นชิ้นจริงและให้

$$x = Bp + b, \qquad p\in\hat{K},$$

เป็น**การแปลงสัมพรรค** (affine map) แบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\hat{K}$ ไปยัง K. เมทริกซ์ B ไม่เอกฐาน, $\det B\neq 0$, และ $K = B\hat{K}+b$.

สำหรับฟังก์ชัน u บน K เราเขียน $\hat{u}(p) := u(Bp+b)$. การเปลี่ยนตัวแปรให้

$$\int_K u(x)^2\,dx = |\det B|\int_{\hat{K}}\hat{u}(p)^2\,dp.$$

อนุพันธ์ก็เปลี่ยนตามกฎลูกโซ่:

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial p_j}(p) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}(Bp+b)\,B_{ij}.$$

เพราะมีอนุพันธ์อันดับเดียวกันเพียงจำนวนจำกัด (ขึ้นกับ n และอันดับ) การเปลี่ยนสเกลจึงควบคุมได้ด้วยนอร์มของ B และ B^{-1}.

บทตั้ง 11.3.1: การเปลี่ยนสเกลบนชิ้นอ้างอิง

ให้ $\hat{K}$ เป็นชิ้นอ้างอิงและ $K=B\hat{K}+b$. สำหรับ $l\geq 0$ มีค่าคงตัว $c=c(l,n)$ ซึ่ง

$$|\hat{u}|_{l,\hat{K}}\leq c\|B\|^l|\det B|^{-1/2}|u|_{l,K},$$

และ

$$|u|_{l,K}\leq c\|B^{-1}\|^l|\det B|^{1/2}|\hat{u}|_{l,\hat{K}}.$$

นอกจากนี้ $u\in H^l(K)$ ก็ต่อเมื่อ $\hat{u}\in H^l(\hat{K})$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ใช้กฎลูกโซ่กับอนุพันธ์แต่ละอันดับ แล้วใช้ความจริงว่าอนุพันธ์อันดับเดียวกันมีจำนวนจำกัดจึงสมมูลกันได้; สุดท้ายเปลี่ยนตัวแปรในปริพันธ์.

1. **อันดับศูนย์.** จากสมการเปลี่ยนตัวแปรแรก,
$$\|\hat{u}\|_{0,\hat{K}} = |\det B|^{-1/2}\|u\|_{0,K}.$$
นี่คือกรณี $l = 0$ เพราะ $\|B\|^0 = 1$.

2. **อนุพันธ์อันดับหนึ่ง.** จากกฎลูกโซ่และอสมการของตัวดำเนินการ,
$$|\nabla \hat{u}(p)| \le \|B\|\,|(\nabla u)(Bp+b)|.$$

3. **อนุพันธ์อันดับ l.** ใช้กฎลูกโซ่ซ้ำ l ครั้ง:
$$|D^\alpha \hat{u}(p)| \le c\|B\|^l \max_{|\beta|=l} |D^\beta u(Bp+b)|, \qquad |\alpha| = l.$$
มีหลายอันดับ α แต่มีจำนวนจำกัด; ผลบวกกำลังสองจึงถูกควบคุมด้วยผลบวกกำลังสองของอนุพันธ์อันดับ l ทั้งหมด คูณด้วยค่าคงตัว.

4. **หาปริพันธ์.** ยกกำลังสองแล้วหาปริพันธ์บน $\hat{K}$; เปลี่ยนตัวแปรกลับไปยัง K ได้ตัวประกอบ $|\det B|^{-1}$. จึงได้อสมการแรก.

5. **อสมการที่สอง.** ทำแบบเดียวกันกับการแปลงผกผัน $p = B^{-1}(x-b)$ ซึ่งมีเมทริกซ์ B^{-1}.

6. **ความสมมูลของปริภูมิ.** อสมการทั้งสองแสดงว่า u มีอนุพันธ์อ่อนถึงอันดับ l ใน L^2 ก็ต่อเมื่อ $\hat{u}$ มี. ความหนาแน่นของฟังก์ชันเรียบใน H^l ทำให้ขยายจากฟังก์ชันเรียบไปยัง H^l ทั้งหมด.

สรุป: การเปลี่ยนชิ้นเปลี่ยนนอร์มของอนุพันธ์ด้วยกำลังของ $\|B\|$ หรือ $\|B^{-1}\|$ และรากที่สองของ $|\det B|$. □

ขนาดของ $\|B\|$ และ $\|B^{-1}\|$ ขึ้นกับความยาวและความผอมของชิ้น. กำหนด ρ_K เป็นรัศมีของลูกบอลที่ใหญ่ที่สุดซึ่งอยู่ภายใน K และ R_K เป็นรัศมีของลูกบอลที่เล็กที่สุดซึ่งครอบ K.

บทตั้ง 11.3.2: ขนาดของการแปลงกับรูปทรงของชิ้น

ภายใต้สมมติฐานของบทตั้งก่อน ให้ $\hat{K}$ คงที่. มีค่าคงตัว c ซึ่งขึ้นกับ $\hat{K}$ เท่านั้น และ
$$\|B\| \le cR_K, \qquad \|B^{-1}\| \le \frac{c}{\rho_K}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** วัดการยืดของ B บนลูกบอลเล็ก ๆ ใน $\hat{K}$ แล้วเทียบกับลูกบอลที่บรรจุ K; ทำกลับทิศสำหรับ B^{-1}.

ให้ $\hat{\rho}$ เป็นรัศมีลูกบอลที่บรรจุใน $\hat{K}$ และเลือก $p_0 \in \hat{K}$ ซึ่งลูกบอลรัศมี $\hat{\rho}$ รอบ p_0 อยู่ใน $\hat{K}$. สำหรับเวกเตอร์ p ใด ๆ ที่ $|p| = \hat{\rho}$, จุด $p_0 + p$ อยู่ใน $\hat{K}$; ภาพของมันคือ $x_0 = Bp_0 + b$ และ $x = x_0 + Bp$ ซึ่งอยู่ใน K. เพราะ K อยู่ในลูกบอลรัศมี R_K,
$$|Bp| = |x - x_0| \le 2R_K.$$
ดังนั้น
$$\|B\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{|p|=\hat{\rho}} |Bp| \le \frac{2R_K}{\hat{\rho}}.$$
สำหรับ B^{-1} ให้สลับบทบาทของ K และ $\hat{K}$: ลูกบอลที่บรรจุ $\hat{K}$ มีรัศมีคงที่ $\hat{R}$ และลูกบอลที่บรรจุใน K มีรัศมี ρ_K. ข้อโต้แย้งเดิมให้ $\|B^{-1}\| \le 2\hat{R}/\rho_K$. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

นิยาม 11.3.1: การแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด

สำหรับแต่ละเมชให้ $h_K := \operatorname{diam} K$ และ $h := \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. ครอบครัวนี้เรียกว่า**การแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด** (quasi-uniform triangulation) หากเลือกค่าร่วม $\kappa > 0$ ได้ค่าเดียวสำหรับทุกเมชและทุกชิ้น K โดยที่

$$\frac{h_K}{\rho_K} \le \kappa, \qquad \frac{h}{h_K} \le \kappa \qquad \text{สำหรับทุกชิ้น } K \text{ และทุกเมชในครอบครัว,}$$

โดย h_K คือเส้นผ่านศูนย์กลางของชิ้น K.

เงื่อนไขแรกควบคุมรูปทรงของแต่ละชิ้น ส่วนเงื่อนไขที่สองบอกว่าขนาดของชิ้นต่าง ๆ เทียบกับ h ไม่เกินอัตราส่วนคงตัว. ในสองมิติ สำหรับสามเหลี่ยม เงื่อนไขร่วมนี้คุมมุมไม่ให้เข้าใกล้ 0 หรือ π. เงื่อนไขที่บทแทรกเฉพาะสำหรับ P_1 ใช้คือ**เงื่อนไขมุมมากสุด** (maximal angle condition): มี $\bar{\alpha} < \pi$ ซึ่งทุกมุมของทุกสามเหลี่ยมไม่เกิน $\bar{\alpha}$. เงื่อนไขนี้กันสามเหลี่ยมที่แบนยาวและมีมุมป้านเข้าใกล้ π. ผลของมุมมากสุดที่ใช้นี้เป็นผลเฉพาะสำหรับปัวซง ไม่ใช่เงื่อนไขของทฤษฎีบททั่วไปสำหรับทุกฟอร์ม a.

11.3.2 บทตั้งการประมาณบนชิ้นอ้างอิง

หัวใจของการประมาณคือข้อเท็จจริงต่อไปนี้: ฟังก์ชันนัลที่ “มองไม่เห็น” พหุนามดีกรีไม่เกิน k ต้องถูกควบคุมด้วยกึ่งนอร์มอันดับ $k+1$. นี่คือ**บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต** (Bramble–Hilbert lemma).

บทตั้ง 11.3.3: บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต

ให้ $B \subset \mathbb{R}^n$ เป็นโดเมนที่มีขอบลิพชิทซ์ และ $q : H^{k+1}(B) \to [0,\infty)$ เป็น**ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์** (sublinear functional) ที่มีขอบเขต กล่าวคือ $q(v+w) \le q(v)+q(w)$, $q(\lambda v) = |\lambda| q(v)$ สำหรับทุก $\lambda \in \mathbb{R}$, และมี C_q ที่ $q(v) \le C_q \|v\|_{k+1,B}$. (เงื่อนไขนี้ทำให้ q ต่อเนื่องและไม่เป็นลบ.)

$$q(w) = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } w \in \mathbb{P}_k,$$

แล้วมีค่าคงตัว $c = c(B)$ ซึ่ง

$$|q(v)| \le c\,|v|_{k+1,B} \qquad \text{สำหรับทุก } v \in H^{k+1}(B).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** แยกพหุนามออกจาก v โดยการฉายตั้งฉากใน H^{k+1}; บนส่วนที่ตั้งฉากกับ $\mathbb{P}_k$ กึ่งนอร์มควบคุมนอร์มเต็มได้ เพราะถ้าไม่ใช่ จะได้ลำดับที่ขัดกับเรลลิช.

1. **กึ่งนอร์มควบคุมนอร์มบนส่วนตั้งฉาก.** ให้ $M := \mathbb{P}_k^{\perp}$ เป็นส่วนตั้งฉากของ $\mathbb{P}_k$ ใน $H^{k+1}(B)$. เราอ้างว่ามี c_0 ซึ่ง

   $$\|v\|_{k+1,B} \le c_0 |v|_{k+1,B} \qquad \text{สำหรับทุก } v \in M.$$

   สมมติไม่ใช่. แล้วมีลำดับ $v_m \in M$ กับ $\|v_m\|_{k+1} = 1$ และ $|v_m|_{k+1} \to 0$.

2. **ใช้เรลลิช.** ลำดับ (v_m) มีขอบเขตใน $H^{k+1}(B)$; เลือกลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนใน H^{k+1} และโดยเรลลิช (บทที่แล้ว) ลู่เข้าแบบเข้มใน H^k ไปยังฟังก์ชันเดียวกัน v. สำหรับทุก multi-index α ที่ $|\alpha| = k+1$, ตัวดำเนินการ $D^\alpha : H^{k+1}(B) \to L^2(B)$ รักษาการลู่เข้าแบบอ่อน; เนื่องจาก $\|D^\alpha v_m\|_{L^2} \to 0$, ลิมิต $D^\alpha v$ จึงเป็นศูนย์. ดังนั้น $|v|_{k+1} = 0$.

3. **จำแนกฟังก์ชันลิมิต.** เนื่องจาก B เป็นโดเมนเชื่อมโยงกัน เงื่อนไขที่อนุพันธ์แจกแจงอันดับ $k+1$ หายไปบังคับให้ v ตรงกับสมาชิกตัวหนึ่งของ $\mathbb{P}_k$ เกือบทุกจุด.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

4. **ขัดแย้ง.** เพราะ $v_m \in M$ และ $v_m \rightharpoonup v$ ใน H^{k+1}, สมการตั้งฉากส่งผ่านลิมิต: $v \in M$. จากการลู่เข้าเข้มใน H^k และ $|v_m|_{k+1} \to 0$ เราได้ $v_m \to v$ เข้มใน H^{k+1}; ดังนั้น $\|v\|_{k+1} = 1$. แต่ $v \in \mathbb{P}_k \cap M = \{0\}$, ขัดแย้ง.

5. **แยกพหุนาม.** สำหรับ $v \in H^{k+1}$ ให้ p เป็นการฉายตั้งฉากของ v บน $\mathbb{P}_k$ ใน H^{k+1}. แล้ว $w := v - p \in M$. เนื่องจาก $q(p) = q(-p) = 0$, ความเป็นซับลิเนียร์ให้ $q(v) \le q(w)$ และ $q(w) \le q(v)$; ดังนั้น $q(v) = q(w)$. จากขั้นแรกและความมีขอบเขตของ q,

$$|q(v)| = |q(w)| \le \|q\|\,\|w\|_{k+1} \le c_0\|q\|\,|w|_{k+1} = c_0\|q\|\,|v|_{k+1}.$$

เพราะ p มีกึ่งนอร์มอันดับ $k+1$ เป็นศูนย์.

สรุป: ฟังก์ชันนัลที่หายบนพหุนามถูกควบคุมด้วยอนุพันธ์อันดับสูงสุด; ค่าคงตัวขึ้นกับโดเมน ไม่ขึ้นกับ v. □

บทตั้ง 11.3.4: การประมาณการฉายบนชิ้นอ้างอิง

ให้ $k \ge r$ และให้ $\Pi : H^{k+1}(B) \to \mathbb{P}_k \subset H^r(B)$ เป็นตัวดำเนินการฉายเชิงเส้นต่อเนื่อง. แล้วมีค่าคงตัว $c > 0$ ซึ่ง

$$\|v - \Pi v\|_{r,B} \le c\,|v|_{k+1,B} \qquad \text{สำหรับทุก } v \in H^{k+1}(B).$$

พิสูจน์. นิยาม $q(v) := \|v - \Pi v\|_{r,B}$. เพราะ Π เชิงเส้นและต่อเนื่อง, q เป็นฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ที่มีขอบเขตและ $q(\lambda v) = |\lambda| q(v)$. สำหรับ $w \in \mathbb{P}_k$ เราได้ $\Pi w = w$ เพราะ Π เป็นตัวดำเนินการฉาย; ดังนั้น $q(w) = 0$. บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ตให้ $q(v) \le c|v|_{k+1,B}$. □

ตอนนี้เรารวมการประมาณบนชิ้นเดียวเป็นประมาณบนโดเมนทั้งหมด. ให้ $\mathcal{T}_h$ เป็นเมชของ Ω และให้ V_h เป็นปริภูมิของฟังก์ชันต่อเนื่องที่เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน k บนแต่ละชิ้นและมีค่าเป็นศูนย์บนขอบ. สำหรับการประมาณเฉพาะชิ้น ให้ Π_h เป็นตัวดำเนินการฉายที่นิยามแยกบนแต่ละ K; มันอาจไม่ต่อเนื่องข้ามด้านและโดยทั่วไปไม่อยู่ใน V_h. นิยามนอร์มแบบเป็นชิ้น

$$\|v\|_{r,h,\Omega}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{r,K}^2.$$

สำหรับ $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ให้ $I_h u$ เป็นตัวประมาณลากร็องจ์ทั่วทั้งเมชจากโหนดลากร็องจ์. เมื่อ $k \ge 1$ ในสองมิติ, $H^{k+1}(K) \hookrightarrow C(\overline{K})$ ทำให้ทุกค่าโหนดนิยามได้. โหนดร่วมให้ค่าเดียวกันจึง $I_h u$ ต่อเนื่อง; ถ้า $u \in H_0^1(\Omega)$ ค่าที่โหนดขอบเป็นศูนย์, ดังนั้น $I_h u \in V_h := \mathbb{P}_{\mathcal{T}_h,k} \cap H_0^1(\Omega)$. บนแต่ละชิ้น $I_h|_K$ คือตัวดำเนินการลากร็องจ์ที่ฉายลงบน $\mathbb{P}_k$; เมื่อดึงกลับสู่ชิ้นอ้างอิงมีขอบเขตนอร์มสม่ำเสมอสำหรับเมชที่มีรูปทรงควบคุม.

ทฤษฎีบท 11.3.5: การประมาณการฉายบนเมช

ให้ $\mathcal{T}_h$ เป็นการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด, $0 \le r \le 1$, $h \le 1$ และ $r \le k$. สำหรับตัวดำเนินการฉายเฉพาะชิ้นที่เมื่อดึงกลับสู่ชิ้นอ้างอิงมีขอบเขตของนอร์มตัวดำเนินการร่วมกัน แล้วมีค่าคงตัว $c > 0$ ซึ่งไม่ขึ้นกับ h และ

$$\|u - \Pi_h u\|_{r,h,\Omega} \le c\,h^{k+1-r}|u|_{k+1,\Omega}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** พิสูจน์บนชิ้นเดียวด้วยการเปลี่ยนสเกลสองครั้ง แล้วยกกำลังสองและบวกทุกชิ้น; สมมติฐานการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมดทำให้ ρ_K ถูกแทนด้วย h_K โดยเสียเพียงค่าคงตัว.

1. **ชิ้นเดียว.** ให้ K เป็นชิ้นที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง h_K. แปลง K ไปยัง $\hat{K}$ ด้วย B. จากบทตั้งการเปลี่ยนสเกลและบทตั้งรูปทรง,

$$\|u - \Pi u\|_{r,K} \le c|\det B|^{1/2}\rho_K^{-r}\|\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}\|_{r,\hat{K}}.$$

ร่างเอกสาร · Preprint · 2026-10-20

2. **บนชิ้นอ้างอิง.** ใช้บทตั้งการประมาณการฉาย:
$$\|\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u}\|_{r,\hat{K}} \le c|\hat{u}|_{k+1,\hat{K}}.$$
3. **กลับไปยังชิ้นจริง.** ใช้บทตั้งการเปลี่ยนสเกลอีกครั้ง,
$$|\hat{u}|_{k+1,\hat{K}} \le c\|B\|^{k+1}|\det B|^{-1/2}|u|_{k+1,K} \le c\,h_K^{k+1}|\det B|^{-1/2}|u|_{k+1,K}.$$
4. **รวมสามขั้น.** เพราะ $\rho_K^{-r} \le \kappa^r h_K^{-r}$,
$$\|u - \Pi u\|_{r,K} \le c\,h_K^{k+1-r}|u|_{k+1,K}.$$
5. **บวกทุกชิ้น.** ยกกำลังสองและบวก:
$$\|u - \Pi_h u\|_{r,h,\Omega}^2 \le c\sum_{K} h_K^{2(k+1-r)}|u|_{k+1,K}^2 \le c\,h^{2(k+1-r)}|u|_{k+1,\Omega}^2,$$
เพราะ $h_K \le h$. ถอดรากที่สองได้อสมการที่ต้องการ.

สรุป: ข้อผิดพลาดการประมาณบนชิ้นคือ $O(h^{k+1})$; เมื่อวัดอนุพันธ์ถึงอันดับ r จะเสีย h^r. □

ตัวอย่าง: การประมาณค่าในช่วงของ x^2 ในหนึ่งมิติ

ให้ $u(x) = x^2$ บน $[0,1]$ และให้ $I_h u$ เป็นเส้นตรงเป็นชิ้นที่ผ่านค่าของ u ที่โหนด. บนช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เขียน $x = x_{i-1} + th$; แล้ว
$$u(x) - I_h u(x) = -h^2 t(1-t).$$
ค่าสูงสุดของค่าสัมบูรณ์คือ $h^2/4$ และ
$$\|u - I_h u\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{N}\int_0^1 h^4 t^2(1-t)^2\,h\,dt = \frac{h^4}{30}.$$
สำหรับ $h = 1/4$ เราได้
$$\|u - I_h u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{7680} = 0.0001302083, \qquad \|u - I_h u\|_{H^1}^2 = \frac{1}{48} + \frac{1}{7680} = 0.0209635417,$$
จึง $\|u - I_h u\|_{H^1} = 0.1447879196$. ตัวเลขเหล่านี้มีแบบทดสอบยืนยัน. ตัวอย่างนี้แสดงอัตรา h^2 ใน L^2 และ h ใน H^1 ตรงกับทฤษฎีเมื่อ $k = 1$.

11.3.3 อัตราในนอร์ม H^1 สำหรับคำตอบกาเลอคิน

ตอนนี้เรารวมบทตั้งของเซอากับการประมาณการฉาย. ผลลัพธ์คือทฤษฎีบทหลักของหน่วยนี้: ถ้าคำตอบจริงเรียบพอ คำตอบกาเลอคินลู่เข้าด้วยอัตราที่กำหนดโดยดีกรีของพหุนาม.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 11.3.6: อัตราความคลาดเคลื่อนในนอร์ม H^1

ให้ Ω เป็นโดเมนหลายเหลี่ยม, $V = H_0^1(\Omega)$, และ a เป็นฟอร์มเชิงเส้นคู่ต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟด้วยค่าคงตัว M และ γ. ให้ $k \geq 1$, $h \leq 1$, และ $V_h = \mathbb{P}_{\mathcal{T}_h,k} \cap H_0^1(\Omega)$ เป็นปริภูมิพหุนามต่อเนื่องเป็นชิ้นดีกรีไม่เกิน k บนการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด. ถ้าคำตอบแบบอ่อน u อยู่ใน $H^{k+1}(\Omega)$ และ $u_h \in V_h$ เป็นคำตอบกาเลอคิน แล้ว

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c\, h^k |u|_{k+1,\Omega},$$

โดย c ขึ้นกับ k, M, γ, κ และรูปทรงของชิ้น แต่ไม่ขึ้นกับ h และ u.

พิสูจน์. **แนวคิด.** บทตั้งของเซอาเปลี่ยนความคลาดเคลื่อนของคำตอบเป็นความคลาดเคลื่อนของการประมาณ; ทฤษฎีบทการประมาณให้อัตรา.

1. **เซอา.** จากบทตั้งของเซอา,
$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{M}{\gamma} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq \frac{M}{\gamma} \|u - I_h u\|_1.$$
2. **การประมาณ.** เพราะ $I_h u \in V_h \subset H^1$ และต่อเนื่องข้ามด้าน, นอร์มแบบเป็นชิ้นเท่ากับนอร์มเต็ม. จากทฤษฎีบทการประมาณด้วย $r = 1$ ที่ใช้กับข้อจำกัดเฉพาะชิ้นของ I_h,
$$\|u - I_h u\|_1 \leq c\, h^k |u|_{k+1}.$$
3. **รวม.** แทนอสมการที่สองในข้อแรก.

สรุป: คำตอบกาเลอคินมีอัตราเดียวกันกับการประมาณที่ดีที่สุดใน V_h; สำหรับ P_1 อัตราคือ h ในนอร์ม H^1. □

บทแทรก 11.3.7: อัตราสำหรับ P_1

ภายใต้สมมติฐานของทฤษฎีบทก่อนด้วย $k = 1$ และ $u \in H^2(\Omega)$,

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq c\, h\, |u|_{2,\Omega}.$$

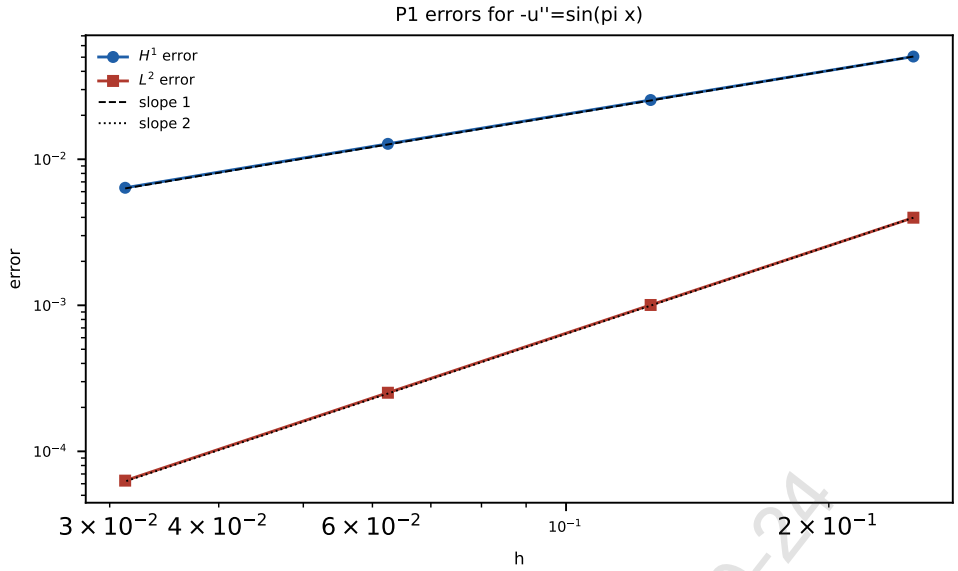
มีผลเฉพาะของ Grossmann--Roos สำหรับปัญหาปัวซง $-\Delta u = f$, $u = 0$ บนขอบ, บนโดเมนหลายเหลี่ยม: ถ้า $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ และใช้สมาชิกเชิงเส้นแบบคอนฟอร์มมิงบนการแบ่งสามเหลี่ยมที่ทุกมุมไม่เกินค่าคงตัวเดียว $\bar{\alpha} < \pi$, แล้วคำตอบกาเลอคิน u_h เป็นไปตาม $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch|u|_{2,\Omega}$. ผลนี้อ้างจาก Grossmann--Roos 2007, Corollary 4.31, p. 228 และไม่พิสูจน์ในบทนี้; ไม่ต้องสมมติ quasi-uniformity และไม่ได้ขยายทฤษฎีบททั่วไปข้างบนไปยังฟอร์ม a ใด ๆ.

สำหรับปัวซงบนโดเมนหลายเหลี่ยมนูน ถ้า $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, อสมการมิแรนดา–ทัลเลตตี (ไม่พิสูจน์ในบทนี้) ให้ $|u|_2 \leq \|\Delta u\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$; อสมการนี้ไม่ใช้กับโดเมนหลายเหลี่ยมทั่วไปโดยไม่มีเงื่อนไขเพิ่ม.

ตัวอย่าง: ตารางความคลาดเคลื่อนในหนึ่งมิติ

กลับไปที่ปัญหา $-u'' = \sin(\pi x)$ บน $(0,1)$ กับ $u(0) = u(1) = 0$ ซึ่งมีคำตอบ $u(x) = \sin(\pi x)/\pi^2$. เราแก้ด้วย P_1 บนเมชสม่ำเสมอ N ช่วง และวัดความคลาดเคลื่อนในนอร์ม L^2 และกึ่งนอร์ม H^1 (เฉพาะเทอมเกรเดียนต์) ด้วยการหาปริพันธ์เชิงเลขที่ละเอียดกว่าความละเอียดของเมชมาก. ผลคือ

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 11.3: ความคลาดเคลื่อนของคำตอบ P_1 สำหรับ $-u'' = \sin(\pi x)$ บนเมชสม่ำเสมอ: แกนตั้งเป็นลอการิทึมของความคลาดเคลื่อน และเส้นประแสดงความชัน 1 กับ 2. เมื่อ h ลดครึ่ง ความคลาดเคลื่อน L^2 ลดประมาณสี่เท่าและกึ่งนอร์ม H^1 ลดประมาณสองเท่า ตรงกับอัตรา h^2 และ h.

N	h	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\|u-u_h\|_{H^1}$
4	$1/4$	0.0039803366	0.0505094687
8	$1/8$	0.0010051993	0.0254500342
16	$1/16$	0.0002519353	0.0127495646
32	$1/32$	0.0000630236	0.0063778549

เมื่อ h ลดครึ่งหนึ่ง กึ่งนอร์ม H^1 ลดลงประมาณ 1.98, 2.00, 2.00 เท่า และความคลาดเคลื่อน L^2 ลดลงประมาณ 3.96, 3.99, 4.00 เท่า. อัตราที่สังเกตได้คือประมาณ 0.99 สำหรับกึ่งนอร์ม H^1 และ 1.99 สำหรับ L^2 ซึ่งตรงกับ $k=1$ ในทฤษฎีบทและกับอันดับ $k+1=2$ ในทฤษฎีบท L^2 ที่จะกล่าวต่อไป. ตัวเลขทั้งหมดมีแบบทดสอบยืนยัน.

ตัวอย่าง: ตารางความคลาดเคลื่อนในสองมิติ

ให้ $\Omega = (0,1)^2$ และ $u(x,y) = \sin(\pi x)\sinh(\pi y)/\sinh(\pi)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก ($\Delta u = 0$) และมีค่าเป็นศูนย์บนด้าน $x=0$, $x=1$ และ $y=0$, มีค่า $\sin(\pi x)$ บนด้าน $y=1$. เราแก้ปัญหา $-\Delta u = 0$ ($f=0$) ด้วย P_1 บนเมชสามเหลี่ยมสม่ำเสมอ โดยค่าขอบด้านบนไม่เป็นศูนย์ และวัดในนอร์ม L^2 กับกึ่งนอร์ม H^1:

N	h	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\|u-u_h\|_{H^1}$
4	$1/4$	0.0211306715	0.4789623884
8	$1/8$	0.0055172808	0.2454174868
16	$1/16$	0.0013960927	0.1234905371

อัตราส่วนคือ 3.83 และ 3.95 สำหรับ L^2 กับ 1.95 และ 1.99 สำหรับ H^1. ค่าคงตัวใหญ่กว่าหนึ่งมิติเพราะ $|u|_2 = \sqrt{\pi^3 \coth \pi} = 5.578736258$ ใหญ่กว่า $1/\sqrt{2}$ ของหนึ่งมิติ.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

11.3.4 ค่าประมาณ L^2 ด้วยเทคนิคออบิน–นิทเชอ

สำหรับ P_1 ทฤษฎีบท H^1 ให้อัตรา h และการประมาณค่าในช่วงชวนให้คาดว่าในนอร์ม L^2 จะได้ h^2. เราจะพิสูจน์อัตรานี้เมื่อปัญหาผูกพันมีความสม่ำเสมอ H^2.

ให้ $\ell \in L^2(\Omega)$. ปัญหาผูกพันคือการหา $w \in V$ ซึ่ง

$$a(v, w) = (\ell, v) \qquad \text{สำหรับทุก } v \in V,$$

โดย $(\cdot,\cdot)$ เป็นผลคูณภายใน L^2. ฟอร์ม $a^*(u,v) := a(v,u)$ ยังต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟ เพราะการสลับช่องไม่เปลี่ยนขอบบนหรือขอบล่าง. เพราะ $(\ell,\cdot) \in V'$, บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรมให้คำตอบ w เพียงหนึ่งเดียว. สำหรับค่าประมาณ L^2 เราสมมติเพิ่มเติมว่า สำหรับทุก $\ell \in L^2(\Omega)$ คำตอบนี้อยู่ใน $H^2(\Omega) \cap V$ และมีค่าคงตัว C_D ซึ่งไม่ขึ้นกับ ℓ และ

$$w \in H^2(\Omega) \cap V, \qquad |w|_{2,\Omega} \le C_D \|\ell\|_{L^2}.$$

สมมติฐาน H^2 นี้เป็นข้อสมมติเพิ่มเติมและไม่ได้ตามจากความโคเออร์ซีฟเพียงอย่างเดียว. สำหรับปัวซงบนโดเมนหลายเหลี่ยมนูนเป็นตัวอย่างที่สมมติฐานนี้เป็นจริง; โดเมนที่มีมุมเว้า หรือสัมประสิทธิ์ที่ไม่เรียบ อาจทำให้ไม่จริง.

ทฤษฎีบท 11.3.8: ค่าประมาณ L^2 สำหรับ P_1 ของคำตอบกาเลอคิน

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ เป็นโดเมนหลายเหลี่ยม, $V = H^1_0(\Omega)$, และ a เป็นฟอร์มต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟบน V ด้วยค่าคงตัว M, γ. ให้ $h \le 1$, $u \in V \cap H^2(\Omega)$ เป็นคำตอบแบบอ่อน และ $V_h = \mathbb{P}_{\mathcal{T}_h,1} \cap V$ เป็นปริภูมิ P_1 บนการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด. ให้ $u_h \in V_h$ เป็นคำตอบกาเลอคิน และสมมติว่าปัญหาผูกพันมีสมบัติความสม่ำเสมอข้างต้นด้วยค่าคงตัว C_D. แล้ว

$$\|u - u_h\|_{L^2} \le c\, h^2 |u|_{2,\Omega}, \qquad c = c(M, \gamma, C_D, \kappa, \text{รูปทรงของชิ้น}).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้คำตอบ w ของปัญหาผูกพันที่มีข้อมูล $\ell = u - u_h$; ความตั้งฉากแบบกาเลอคินและตัวประมาณโหนด $I_h w \in V_h$ ให้ปัจจัยเพิ่ม h.

1. **ตั้งปัญหาผูกพัน.** ให้ $\ell := u - u_h \in L^2$ และให้ w เป็นคำตอบของ $a(v,w) = (\ell, v)$ ทุก $v \in V$. เลือก $v = u - u_h$:
$$\|u - u_h\|_{L^2}^2 = a(u - u_h, w).$$
2. **ความตั้งฉาก.** ผลต่าง $u - u_h$ ไม่ตอบสนองต่อทิศใด ๆ ใน V_h ผ่านฟอร์ม a: $a(u - u_h, v_h) = 0$ ทุก $v_h \in V_h$. ดังนั้น
$$a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - v_h) \qquad \text{สำหรับทุก } v_h \in V_h.$$
3. **ความต่อเนื่อง.** จากความต่อเนื่องของ a,
$$|a(u - u_h, w - v_h)| \le M \|u - u_h\|_1 \|w - v_h\|_1.$$
4. **เลือกตัวประมาณ.** ให้ $v_h = I_h w$. เพราะ $I_h w \in V_h$ และ $w \in H^2$, ทฤษฎีบทการประมาณสำหรับ P_1 และสมมติฐานความสม่ำเสมอให้
$$\|w - I_h w\|_1 \le c\, h |w|_2 \le c C_D h \|u - u_h\|_{L^2}.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

5. **รวมและหาร.** ถ้า $\|u-u_h\|_{L^2}=0$ ก็จบ. มิฉะนั้นหารด้วย $\|u-u_h\|_{L^2}$:

$$\|u-u_h\|_{L^2} \le c\,h\|u-u_h\|_1.$$

จากทฤษฎีบท H^1 สำหรับ P_1, $\|u-u_h\|_1 \le ch|u|_2$; แทนลงไปได้ $\|u-u_h\|_{L^2} \le ch^2|u|_2$.

สรุป: ปัญหาผูกพันให้ “หนึ่งอันดับพิเศษ” ในนอร์ม L^2; ราคาคือต้องรู้ว่าปัญหาผูกพันมีความสม่ำเสมอ H^2. □

ข้อควรระวัง: คำว่า “อันดับดีขึ้น” ไม่ได้หมายถึงทุกปัญหา

เทคนิคออบิน–นิทเชอให้ผลเพิ่มหนึ่งอันดับเมื่อปัญหาผูกพันมีความสม่ำเสมอ H^2. สำหรับปัวซงบนโดเมนหลายเหลี่ยมเว้า (เช่นรูปตัว L) ความสม่ำเสมอนี้อาจล้มเหลวเพราะมุมเว้า; แล้วอัตราที่ได้จากทฤษฎีบทนี้ใช้ไม่ได้. เมชปรับละเอียดใกล้มุมอาจคืนอัตราบางส่วน แต่ต้องวิเคราะห์แยกต่างหาก; เราไม่พิสูจน์เรื่องนั้นในบทนี้.

11.3.5 การลู่เข้าเมื่อคำตอบไม่เรียบ

ถ้าเราไม่รู้ว่าคำตอบอยู่ใน H^2 หรือสูงกว่า เรายังพิสูจน์การลู่เข้าได้ (แต่ไม่มีอัตรา). เงื่อนไขที่ใช้คือ $H^2(\Omega)\cap V$ หนาแน่นใน V.

ทฤษฎีบท 11.3.9: การลู่เข้าโดยไม่ต้องมีอัตรา

ให้ $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ เป็นโดเมนหลายเหลี่ยม, $V=H^1_0(\Omega)$, และ a เป็นฟอร์มต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟบน V ด้วยค่าคงตัว M,γ. สมมติว่า $H^2(\Omega)\cap V$ หนาแน่นใน V ตามนอร์ม $\|\cdot\|_1$. ให้ $u\in V$ เป็นคำตอบแบบอ่อน, $V_h=\mathbb{P}_{\mathcal{T}_h,1}\cap V$ บนการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด, และ $u_h\in V_h$ เป็นคำตอบกาเลอคิน. แล้ว

$$\lim_{h\to 0}\|u-u_h\|_{1,\Omega}=0.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ประมาณ u ด้วยฟังก์ชันเรียบ w ก่อน; สำหรับ w เรามีอัตรา h; ที่เหลือคือเทอมเล็กที่ควบคุมด้วย ε.

1. **เลือกฟังก์ชันเรียบ.** ให้ $\varepsilon>0$. เพราะ $H^2(\Omega)\cap V$ หนาแน่นใน V, มี $w\in H^2(\Omega)\cap V$ ซึ่ง

$$\|u-w\|_1\le\varepsilon.$$

2. **ประมาณ w.** ให้ $w_h=I_h w\in V_h$. จากทฤษฎีบทการประมาณสำหรับ P_1,

$$\|w-w_h\|_1\le c\,h|w|_2.$$

เลือก h เล็กพอให้ $ch|w|_2\le\varepsilon$.

3. **อสมการสามเหลี่ยม.** แล้ว

$$\|u-w_h\|_1\le\|u-w\|_1+\|w-w_h\|_1\le 2\varepsilon.$$

4. **เซอา.** จากบทตั้งของเซอา, $\|u-u_h\|_1\le(M/\gamma)\|u-w_h\|_1\le 2(M/\gamma)\varepsilon$. เพราะ ε เล็กเท่าไรก็ได้, ลิมิตเป็นศูนย์.

สรุป: ความหนาแน่นของฟังก์ชันเรียบใน V ให้การลู่เข้าเสมอ; อัตราต้องการความสม่ำเสมอเพิ่ม. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

การประมาณเมื่อข้อมูลขอบไม่เป็นศูนย์

สำหรับการประมาณข้อมูลขอบไม่เป็นศูนย์ ให้ $g = Su$ และเลือก**การยกข้อมูลขอบ** (lifting) $G \in H^{k+1}(\Omega)$ ที่ $SG = g$ โดยสมมติ $u_0 := u - G \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. กล่าวคือ G เป็นฟังก์ชันในโดเมนที่มีเทรซตรงกับ g และการลบ G ทำให้ข้อมูลขอบเป็นศูนย์. สมมติด้วยว่าฟอร์ม a ขยายอย่างต่อเนื่องไปยัง $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ ด้วยค่าคงตัว M_1. กำหนด $G_h := I_h G$ และหาคำตอบ $u_h = G_h + \widetilde{u}_h$ โดย $\widetilde{u}_h \in V_h$ และ $a(u_h, v_h) = F(v_h)$ ทุก $v_h \in V_h$. จากสมการของ u และ u_h,

$$a(\widetilde{u}_h - u_0, z_h) = a(G - G_h, z_h) \qquad (z_h \in V_h).$$

สำหรับ $v_h \in V_h$ เลือก $z_h = \widetilde{u}_h - v_h$; ความต่อเนื่องและความโคเออร์ซีฟให้

$$\|\widetilde{u}_h - v_h\|_{H^1} \le \frac{M}{\gamma}\|u_0 - v_h\|_{H^1} + \frac{M_1}{\gamma}\|G - G_h\|_{H^1}.$$

เพราะ $u - u_h = (u_0 - \widetilde{u}_h) + (G - G_h)$, เลือก $v_h = I_h u_0$ แล้วอสมการสามเหลี่ยมให้

$$\|u-u_h\|_{H^1} \le (1+M/\gamma)\|u_0-I_h u_0\|_{H^1} + (1+M_1/\gamma)\|G-G_h\|_{H^1} \le Ch^k\big(|u-G|_{k+1}+|G|_{k+1}\big),$$

เมื่อ $u - G$ และ G อยู่ใน H^{k+1} และเมชเป็นไปตามสมมติฐานก่อนหน้า. หากมีเพียง $g \in H^{1/2}$ ทฤษฎีบทเทรซให้การยก $G \in H^1$ และการมีคำตอบเดียว; อัตราข้างบนต้องการการยกที่เรียบพอ.

สรุปใจความ

- การเปลี่ยนสเกลบนชิ้น: กึ่งนอร์มอันดับ l เปลี่ยนตาม $\|B\|^l$ และ $|\det B|^{\pm 1/2}$; รูปทรงของชิ้นควบคุม $\|B\|$ และ $\|B^{-1}\|$ ผ่าน R_K และ ρ_K.
- การแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด ($h_K/\rho_K \le \kappa$ และ $h/h_K \le \kappa$) ควบคุมทั้งรูปทรงและความต่างของขนาดชิ้น; ในสองมิติทำให้มุมทุกมุมอยู่ในช่วง $[\alpha_0, \bar{\alpha}]$ กับ $0 < \alpha_0 \le \bar{\alpha} < \pi$.
- บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต: ฟังก์ชันนัลที่หายบน $\mathbb{P}_k$ ถูกควบคุมด้วย $|v|_{k+1}$; จึงได้ $\|u - I_h u\|_{r,h} \le ch^{k+1-r}|u|_{k+1}$.
- เซอา + การประมาณ: $\|u - u_h\|_1 \le ch^k|u|_{k+1}$; สำหรับ P_1 คือ $O(h)$.
- ออบิน–นิทเชอสำหรับ P_1: ถ้าปัญหาผูกพันมีความสม่ำเสมอ H^2 แล้ว $\|u - u_h\|_{L^2} \le ch^2|u|_2$; ถ้าไม่มีความสม่ำเสมอ ยังได้การลู่เข้าแต่ไม่มีอัตรานี้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(ปริพันธ์ด้วยมือ)** ให้ $u(x) = x(1-x)$ บน $[0,1]$ และ $I_h u$ เป็นเส้นตรงเป็นชิ้นผ่านค่าที่โหนด. ใช้นอร์ม H^1, คือ $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$. จงแสดงว่าบนแต่ละช่วง $[a, a+h]$,
$$u(x) - I_h u(x) = (x-a)(a+h-x),$$
แล้วคำนวณ $\|u - I_h u\|_{L^2}^2$ และ $\|u - I_h u\|_{H^1}^2$ สำหรับ $h = 1/4$. เปรียบเทียบกับตัวอย่าง $u = x^2$ ในหัวข้อ 11.3.2.

2. **(การเปลี่ยนสเกล)** ให้ $K = [0, h]$ และ $\hat{K} = [0,1]$ โดย $x = hp$. ให้ $u(x) = x$. จงคำนวณ $|u|_{1,K}$ และ $|\hat{u}|_{1,\hat{K}}$ ตรง ๆ แล้วตรวจว่าสมการ
$$|\hat{u}|_{1,\hat{K}} = h^{1/2} |u|_{1,K}$$
เป็นจริง. สำหรับ $h = 1/4$ ค่าทั้งสองเป็นเท่าไร.

3. **(แบรมเบิล–ฮิลเบิร์ตแบบชัดเจน)** นิยาม $q(v) = v(1/2) - \int_0^1 v(x)\,dx$ บน $H^1(0,1)$. จงแสดงว่า q หายบน P_0 และพิสูจน์ว่า
$$|q(v)| \le \frac{1}{2\sqrt{3}} |v|_{1,(0,1)}.$$
สำหรับ $v(x) = x^2$ จงคำนวณ $q(v)$ และ $|v|_1$.

4. **(เทย์เลอร์ในหนึ่งมิติ)** จงพิสูจน์ว่าสำหรับ $u \in H^2(0,1)$,
$$\|u - I_h u\|_{L^2} \le \frac{h^2}{\pi^2} |u|_{2,(0,1)}.$$
สำหรับ $u(x) = x^2$ และ $h = 1/4$ จงเปรียบเทียบขอบนี้กับความคลาดเคลื่อนจริง.

5. **(อ่านอัตราจากตาราง)** จากตารางในหัวข้อ 11.3.3 จงคำนวณอัตราที่สังเกตได้
$$p = \log_2 \frac{\|u - u_h\|}{\|u - u_{h/2}\|}$$
สำหรับการลด h สามครั้ง ทั้งในนอร์ม L^2 และ H^1. อัตราเข้าใกล้ค่าใด.

6. **(ความสม่ำเสมอของปัญหาผูกพัน)** สำหรับปัญหา $-w'' = g$ บน $(0,1)$ กับ $w(0) = w(1) = 0$ จงแสดงว่า $|w|_2 = \|g\|_{L^2}$ ทุก $g \in L^2(0,1)$. ดังนั้นสมมติฐานความสม่ำเสมอของปัญหาผูกพันในหัวข้อ 11.3.4 เป็นจริงด้วยค่าคงตัว 1. สำหรับ $g(x) = \sin(\pi x)$ จงหาค่าตัวเลขของทั้งสองข้าง.

7. **(คำตอบที่ไม่เรียบ)** ให้ $u(x) = x^{3/4}(1-x)^{3/4}$ บน $(0,1)$. จงแสดงว่า $u \in H_0^1(0,1)$ แต่ $u \notin H^2(0,1)$. เพราะเหตุใดบทแทรกอัตรา $O(h)$ สำหรับ P_1 จึงใช้กับ u นี้ไม่ได้.

ตัวอย่าง · Preprint · 2026-10-24

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ปริพันธ์.** เพราะ u เป็นกำลังสองและ $I_h u$ เป็นเส้นตรง, $e = u - I_h u$ เป็นกำลังสองที่มีศูนย์ที่ a และ $a+h$ และมี $e'' = -2$. รูปทั่วไปคือ $e = (x-a)(a+h-x)$. เขียน $x = a + th$:

$$e = h^2 t(1-t), \qquad \int_a^{a+h} e^2\,dx = h^5 \int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt = \frac{h^5}{30}.$$

รวม $N = 1/h$ ช่วงได้ $\|e\|_{L^2}^2 = h^4/30$. สำหรับอนุพันธ์, $e' = a + h + a - 2x = h(1-2t)$ และ

$$\int_a^{a+h} (e')^2\,dx = h^3 \int_0^1 (1-2t)^2\,dt = \frac{h^3}{3},$$

รวมได้ $\|e'\|_{L^2}^2 = h^2/3$. สำหรับ $h = 1/4$,

$$\|e\|_{L^2}^2 = \frac{1}{7680} = 0.0001302083, \qquad \|e\|_{H^1}^2 = \frac{1}{48} + \frac{1}{7680} = 0.0209635417,$$

จึง $\|e\|_{H^1} = 0.1447879196$. ตัวเลขเท่ากับตัวอย่าง $u = x^2$ เพราะความคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าในช่วงขึ้นกับอนุพันธ์อันดับสอง ($u'' = -2$ กับ $u'' = 2$ มีขนาดเท่ากัน) ไม่ได้ขึ้นกับค่าของ u เอง.

2. **การเปลี่ยนสเกล.** $u(x) = x$ ให้ $u' = 1$ และ

$$|u|_{1,K}^2 = \int_0^h 1\,dx = h.$$

$\hat{u}(p) = hp$ ให้ $\hat{u}' = h$ และ

$$|\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 = \int_0^1 h^2\,dp = h^2.$$

ดังนั้น $|\hat{u}|_{1,\hat{K}} = h = h^{1/2} \cdot h^{1/2} = h^{1/2}|u|_{1,K}$. สำหรับ $h = 1/4$: $|u|_{1,K} = 1/2 = 0.5$ และ $|\hat{u}|_{1,\hat{K}} = 1/4 = 0.25$. บทตั้งทั่วไปให้ค่าคงตัว c แต่ในกรณีนี้ $c = 1$ เพราะการแปลงเป็นการยืดแกนเดียว.

3. **แบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต.** ถ้า v เป็นค่าคงตัว c แล้ว $q(v) = c - c = 0$. เขียน

$$q(v) = \int_0^{1/2} \int_x^{1/2} v'(t)\,dt\,dx - \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^x v'(t)\,dt\,dx.$$

จากอสมการโคชี–ชวาร์ซ,

$$\begin{aligned} |q(v)| &\le \int_0^{1/2} |v'(t)|t\,dt + \int_{1/2}^1 |v'(t)|(1-t)\,dt \\ &\le \|v'\|_{L^2} \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{24}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} |v|_1. \end{aligned}$$

สำหรับ $v = x^2$: $q(v) = 1/4 - 1/3 = -1/12 = -0.0833333333$ และ $|v|_1 = \|2x\|_{L^2} = 2/\sqrt{3} = 1.1547005384$. ขอบคือ $1/(2\sqrt{3}) = 0.2886751346$ คูณ $|v|_1$, ซึ่งใหญ่กว่า $|q(v)| = 1/12$.

4. **เทย์เลอร์.** บนช่วง $[a, a+h]$, $e = u - I_h u$ หายที่ปลายทั้งสอง และ $e'' = u''$. ใช้อสมการวีร์ทิงเงอร์ (ไม่พิสูจน์ในบทนี้) สองรูปบนช่วงยาว h: ถ้า $\phi(a) = \phi(a+h) = 0$ แล้ว $\|\phi\|_{L^2} \le (h/\pi)\|\phi'\|_{L^2}$; ถ้า $\int \psi = 0$ แล้ว $\|\psi\|_{L^2} \le$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

$(h/\pi)\|\psi'\|_{L^2}$. รูปแรกกับ $\phi = e$ และรูปที่สองกับ $\psi = e'$ (ซึ่งมีค่าเฉลี่ยศูนย์เพราะ $e(a) = e(a+h) = 0$) ได้ $\|e\|_{L^2} \le (h/\pi)\|e'\|_{L^2} \le (h/\pi)^2\|u''\|_{L^2}$. รวมสองขั้นและยกกำลังสอง:

$$\|e\|_{L^2}^2 \le \frac{h^4}{\pi^4}\sum_i \|u''\|_{L^2(a_i,a_{i+1})}^2 = \frac{h^4}{\pi^4}|u|_2^2.$$

สำหรับ $u = x^2$, $|u|_2 = 2$ และ $h = 1/4$; ขอบคือ $2/(16\pi^2) = 0.0126651479$. ความคลาดเคลื่อนจริงคือ $\sqrt{1/7680} = 0.0114108866$, เล็กกว่าขอบ.

5. **อัตรา.** ใช้ตาราง:

$$\begin{aligned} L^2: \quad & \log_2(0.0039803366/0.0010051993) = 1.9854, \\ & \log_2(0.0010051993/0.0002519353) = 1.9964, \\ & \log_2(0.0002519353/0.0000630236) = 1.9991; \\ H^1: \quad & 0.9889, \quad 0.9972, \quad 0.9993. \end{aligned}$$

อัตราเข้าใกล้ 2 สำหรับ L^2 และ 1 สำหรับ H^1 ตรงกับ $k = 1$.

6. **ปัญหาผูกพัน.** สมการ $-w'' = g$ กับ $w(0) = w(1) = 0$ ให้ $w'' = -g$, จึง $|w|_2 = \|w''\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$; ค่าคงตัวคือ 1. สำหรับ $g = \sin(\pi x)$, $\|g\|_{L^2}^2 = 1/2$ และ $w = \sin(\pi x)/\pi^2$ มี $w'' = -\sin(\pi x)$; ดังนั้น $|w|_2 = \|g\|_{L^2} = 1/\sqrt{2} = 0.7071067812$.

7. **คำตอบไม่เรียบ.** เขียน $s = x(1-x)$. แล้ว

$$u = s^{3/4}, \qquad u' = \frac{3}{4}s^{-1/4}(1-2x).$$

ใกล้ $x = 0$, $|u'| \sim \frac{3}{4}x^{-1/4}$; กำลังสอง $\sim \frac{9}{16}x^{-1/2}$ ซึ่งหาปริพันธ์ได้. ใกล้ $x = 1$ ก็เช่นกัน. ดังนั้น $u' \in L^2$ และ $u \in H^1$; เพราะ $u(0) = u(1) = 0$, $u \in H_0^1$. อนุพันธ์อันดับสองคือ

$$u'' = -\frac{3}{16}s^{-5/4}(1-2x)^2 - \frac{3}{2}s^{-1/4}.$$

เทอมแรกใกล้ $x = 0$ มีขนาด $\sim \frac{3}{16}x^{-5/4}$; กำลังสอง $\sim x^{-5/2}$ ซึ่งหาปริพันธ์ใกล้ศูนย์ไม่ได้. ดังนั้น $u'' \notin L^2$ และ $u \notin H^2$. บทแทรกอัตรา $O(h)$ ต้องใช้ $u \in H^2$; เมื่อสมมติฐานนี้หาย อัตราอาจช้ากว่า h และเราไม่มีสิทธิ์อ้าง $O(h)$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

11.4 การเติมเต็มภาพด้วยสมการปัวซง

ภาพรวมก่อนอ่าน

ในสถานการณ์เปิดบท เราเลือกรอยขีดข่วนเป็นบริเวณสีเหลี่ยมและต้องการเติมค่าความสว่างในบริเวณนั้นจากพิกเซลรอบ ๆ ขอบ. หน่วยนี้จะทำตามขั้นตอนนั้นจริง: ตั้งสมการ แก้ด้วย P_1 และวัดว่าคำตอบดีแค่ไหนเมื่อเมชละเอียดขึ้น. คำถามที่ต้องตอบมีสามข้อ. ข้อแรก: สมการปัวซงกับข้อมูลขอบมีคำตอบเพียงหนึ่งเดียวหรือไม่. ข้อที่สอง: เราคำนวณคำตอบนั้นด้วยระบบเชิงเส้นขนาดเล็กได้อย่างไร. ข้อที่สาม: ทำไมภาพที่เติมด้วยเมชหยาบจึงดูเป็นแผ่นเหลี่ยม และการทำเมชให้ละเอียดขึ้นแก้ปัญหานั้นอย่างไร. คำตอบข้อสามคือ จุดพลิกที่สองของบท.

11.4.1 แบบจำลองการเติมเต็มภาพ

ให้ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ เป็นบริเวณที่ต้องเติม (รูหรือรอยขีดข่วน) และให้ g เป็นค่าความสว่างบนขอบ $\partial\Omega$ ซึ่งอ่านมาจากพิกเซลที่ยังดีอยู่. **การเติมเต็มภาพ** (image inpainting) แบบง่ายที่สุดคือการหาฟังก์ชัน u บน Ω ซึ่ง

1. ต่อเนื่องกับข้อมูลขอบ: $u = g$ บน $\partial\Omega$;
2. เรียบในแง่ที่พลังงาน $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2$ เล็กที่สุด.

เงื่อนไขข้อสองทำให้ u ไม่แกว่งขึ้นลงอย่างไร้เหตุผลระหว่างขอบ. เมื่อเขียนสมการออยเลอร์–ลากรานจ์ของปัญหานี้ เราได้

$$-\Delta u = 0 \quad \text{ใน } \Omega, \qquad u = g \quad \text{บน } \partial\Omega.$$

นี่คือสมการปัวซงที่มี $f = 0$ พร้อมเงื่อนไขขอบแบบดีรีเคล. คำตอบเรียกว่า**ฟังก์ชันฮาร์มอนิก** (harmonic function) ที่มีค่าขอบตามที่กำหนด; ในภาษาของหน่วยที่แล้ว มันคือคำตอบแบบอ่อนของสมการอ่อน

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } v \in H^1_0(\Omega),$$

โดย $Su = g$; เทียบเท่ากับการมีตัวแทนยก $G \in H^1(\Omega)$ ที่ $SG = g$ และ $u - G \in H^1_0(\Omega)$.

ถ้าเรามีข้อมูลเพิ่มเติมจากบริเวณข้างเคียง (เช่น ภาพต้นฉบับมีค่าเฉลี่ยที่ไม่ใช่ฮาร์มอนิก) เราอาจเพิ่มเทอม f:

$$-\Delta u = f \quad \text{ใน } \Omega, \qquad u = g \quad \text{บน } \partial\Omega.$$

รูปแบบอ่อนคือ $a(u, v) = F(v) := \int_\Omega f v$ สำหรับทุก $v \in H^1_0$. บทนี้ใช้ $f = 0$ เป็นหลัก เพราะคำตอบฮาร์มอนิกทำให้เห็นผลของเมชได้ชัดที่สุด; การเพิ่ม f ไม่เปลี่ยนโครงสร้างของวิธี.

ทฤษฎีบท 11.4.1: การเติมเต็มภาพมีคำตอบเดียว

ให้ Ω เป็นโดเมนที่มีขอบลิพชิทซ์, $f \in L^2(\Omega)$ และ $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. แล้วมี $u \in H^1(\Omega)$ เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $Su = g$ และ

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{สำหรับทุก } v \in H^1_0(\Omega),$$

โดย S คือตัวดำเนินการเทรซ. นอกจากนี้ u เป็นจุดต่ำสุดเพียงจุดเดียวของ

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx$$

บนเซตของ $v \in H^1(\Omega)$ ที่ $Sv = g$.

พิสูจน์ (ผู้เรียบเรียง). **แนวคิด.** ยกข้อมูลขอบขึ้นไปเป็นฟังก์ชันใน H^1 ก่อน แล้วแก้สมการที่เป็นเนื้อเดียวกันสำหรับส่วนที่เหลือด้วยบทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม.

1. **ยกเทรซ.** จากทฤษฎีบทเทรซ (บทที่แล้ว) ตัวดำเนินการ $S : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ ต่อเนื่องและมีตัวผกผันขวาที่มีขอบเขต. จึงมี $G \in H^1(\Omega)$ ซึ่ง $SG = g$ และ

$$\|G\|_{1,\Omega} \le C\|g\|_{1/2,\partial\Omega}.$$

เราเรียก G ว่า**การยกข้อมูลขอบ**. ทฤษฎีบทเทรซไม่พิสูจน์ในบทนี้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

2. **แยกส่วนที่เหลือ.** เขียน $u = G + w$ กับ $w \in H^1_0(\Omega)$. สมการอ่อนกลายเป็น
$$a(w, v) = F(v) - a(G, v) \qquad \text{สำหรับทุก } v \in H^1_0(\Omega).$$

3. **ขอบเขตของฝั่งขวา.** เพราะ $f \in L^2$ และ $G \in H^1$,
$$|F(v)| \le \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}\|v\|_1, \qquad |a(G, v)| \le M\|G\|_1\|v\|_1.$$
ดังนั้นฝั่งขวาเป็นฟังก์ชันนัลต่อเนื่องบน H^1_0.

4. **แลกซ์–มิลแกรม.** ฟอร์ม a ต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟบน H^1_0 (อสมการปวงกาเร). จึงมี w เพียงหนึ่งเดียว, และ $u = G+w$ มีเพียงหนึ่งเดียว.

5. **พลังงาน.** สำหรับ $v = u + \varphi$ กับ $\varphi \in H^1_0$,
$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}a(\varphi, \varphi) + \big(a(u, \varphi) - F(\varphi)\big).$$
เทอมวงเล็บเป็นศูนย์เพราะ u แก้สมการอ่อน; ดังนั้น $J(v) \ge J(u)$ และเท่ากันก็ต่อเมื่อ $\varphi = 0$.

สรุป: ข้อมูลขอบถูกยกเข้ามาใน H^1; ส่วนที่เหลือแก้ด้วยแลกซ์–มิลแกรม; คำตอบคือจุดต่ำสุดของพลังงาน. □

ขอบเขตของแบบจำลอง

แบบจำลองนี้เติมค่าที่ “เรียบที่สุด” ซึ่งต่อกับขอบ. ทฤษฎีบทเทรซและการยกข้อมูลขอบให้การมีอยู่และเอกลักษณ์สำหรับ $g \in H^{1/2}$. ผลการลู่เข้าและอัตราความคลาดเคลื่อนใช้ได้เมื่อสมมติฐานความหนาแน่น ความเรียบของคำตอบหรือการยกข้อมูลที่ระบุในหน่วย 11.3 เป็นจริง. แบบจำลองฮาร์มอนิกไม่รู้จักเนื้อสัมผัส (texture); ถ้ารอยขาดกว้างหรือภาพมีลายละเอียด การเติมอาจดูไม่สมจริง.

ตัวอย่าง: การเติมเต็มหนึ่งมิติที่แก้ได้ด้วยมือ

ให้ $\Omega = (0, 1)$, $f = 0$, $g(0) = 0$ และ $g(1) = 1$. คำตอบคือ $u(x) = x$ เพราะอนุพันธ์อันดับสองเป็นศูนย์และค่าขอบตรง. พลังงานคือ
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 dx = \frac{1}{2}, \qquad F(u) = 0.$$
เพราะ P_1 แทนฟังก์ชันเชิงเส้นได้เป๊ะ, คำตอบกาเลอคินคือ $u_h = u$ ทุกเมช และความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์. นี่เป็นกรณีที่ไม่มีเหลี่ยมให้เห็น เพราะเกรเดียนต์ของคำตอบจริงเป็นค่าคงที่เดียวกันทั้งโดเมน; การหักของเกรเดียนต์จะเกิดเมื่อคำตอบจริงมีความโค้ง. ตัวเลข $1/2$ และ 0 มีแบบทดสอบยืนยัน.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

11.4.2 การคำนวณด้วย P_1

ขั้นตอนการคำนวณมีห้าขั้น.

1. **แบ่งเมช.** แบ่ง Ω เป็นสามเหลี่ยม (ในที่นี้คือสี่เหลี่ยมจัตุรัสหน่วยแบ่งเป็น $N \times N$ ช่อง แล้วแบ่งแต่ละช่องเป็นสองสามเหลี่ยม).

2. **สร้างเมทริกซ์เฉพาะชิ้น.** สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว h ทั้งสองด้าน, ฟังก์ชันฐานทั้งสามมีเกรเดียนต์ $(-1/h, -1/h)$, $(1/h, 0)$ และ $(0, 1/h)$. พื้นที่คือ $h^2/2$, ดังนั้น

$$K_{\text{loc}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   เมทริกซ์นี้ไม่ขึ้นกับ h เพราะพื้นที่เล็กและเกรเดียนต์ใหญ่หักล้างกัน.

3. **ประกอบ.** บวก K_{loc} เข้าตำแหน่งของจุดยอดทั้งสามในเมทริกซ์ใหญ่. เราได้**เมทริกซ์สติฟเนสเฉพาะชิ้น** (element stiffness matrix) ที่ประกอบกันเป็นเมทริกซ์สติฟเนส K.

4. **ใส่เงื่อนไขขอบ.** จุดยอดบนขอบมีค่าที่รู้จาก g. ย้ายเทอมเหล่านั้นไปฝั่งขวา; เหลือระบบสำหรับจุดภายใน

$$K_{II} c_I = b_I - K_{IB} g_B.$$

5. **แก้ระบบและประเมิน.** แก้ระบบเชิงเส้น; ค่าที่จุดภายในคือ c_I. จากนั้นประมาณค่าที่จุดใด ๆ ด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นบนสามเหลี่ยมที่บรรจุจุดนั้น.

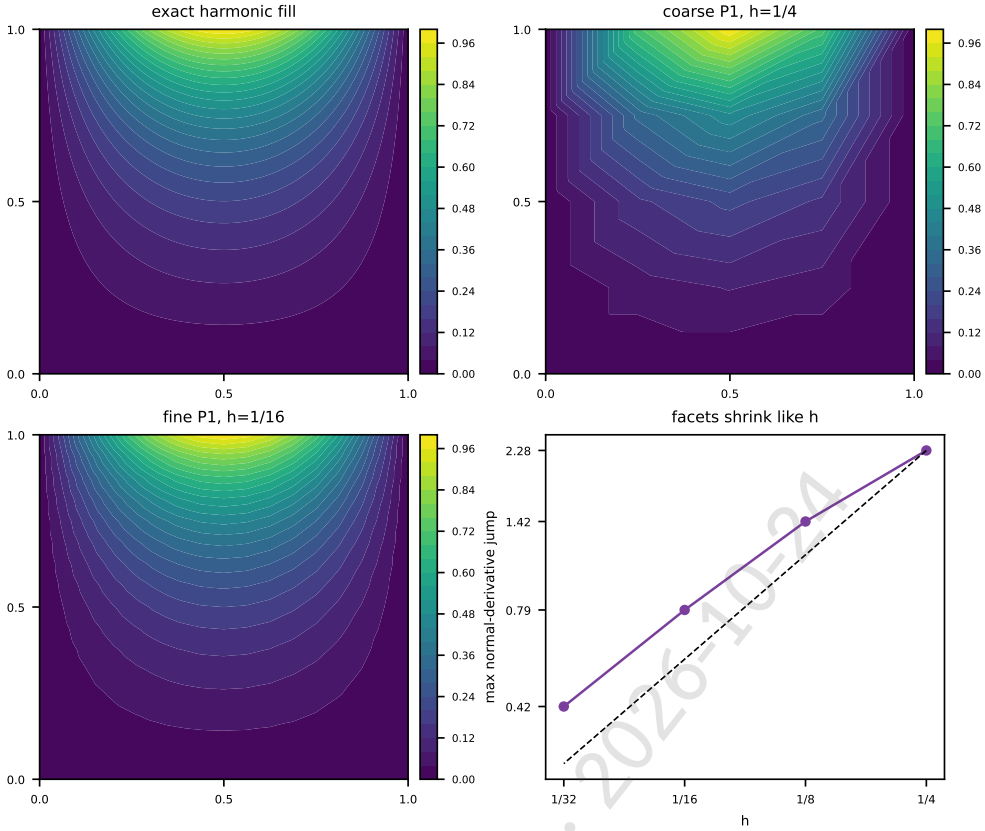
ตัวอย่าง: จุดศูนย์กลางของ $-\Delta u = 1$ บนเมชหลายขนาด

ให้ $\Omega = (0,1)^2$, $f = 1$ และ $u = 0$ บนขอบ โดยแบ่งเมชด้วยเส้นทแยงเดิม. ค่าของคำตอบจริงที่จุดศูนย์กลาง $c = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ คือ $u(c) = 0.07367135$ (จากอนุกรมฟูเรียร์ของคำตอบ). เมื่อ $N = 2$ จุด c เป็นจุดภายในเพียงจุดเดียว และเป็นจุดยอดของหกสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก. ประกอบหกรูปได้ $K_{cc} = 4$, $K_{cE} = K_{cN} = K_{cW} = K_{cS} = -1$ และ $K_{cNE} = K_{cSW} = 0$ ตามขั้นที่สองข้างบน. ภาระ $b_c = \int f \varphi_c$ เท่ากับพื้นที่รวมของหกสามเหลี่ยมหารด้วยสาม คือ $6 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}$. เพราะค่าขอบเป็นศูนย์ สมการที่จุด c คือ $4u_c = \tfrac{1}{4}$ จึง $u_c = \tfrac{1}{16} = 0.0625$.
ตารางต่อไปนี้ใช้เมชแบบเดียวกันสำหรับ $N = 2, 4, 8, 16$ โดยแก้ระบบเต็มทุกครั้ง:

N	$u_h(c)$	$u(c) - u_h(c)$
2	0.0625000000	0.0111713530
4	0.0703125000	0.0033588530
8	0.0727826287	0.0008887243
16	0.0734457666	0.0002255864

ที่ $N = 2$ ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ประมาณ 15%. เมื่อ h ลดครึ่ง ความคลาดเคลื่อนที่จุดนี้ลดลงประมาณ 3.33, 3.78, 3.94 เท่า ซึ่งชี้ไปทาง $O(h^2)$ ในตัวอย่างนี้; บทนี้ไม่ได้พิสูจน์อัตรานี้ที่จุดเดียว และการพิสูจน์ในหัวข้อ 11.3 ให้ $O(h^2)$ เฉพาะนอร์ม L^2.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 11.4: การเติมเต็มภาพด้วย P_1: คำตอบจริง (บนซ้าย), เมชหยาบ $N = 4$ (บนขวา), เมชละเอียด $N = 16$ (ล่างซ้าย) และขนาดกระโดดของอนุพันธ์ปกติสูงสุดข้ามด้าน (ล่างขวา). เมชหยาบเห็นเหลี่ยมชัดเพราะเกรเดียนต์เป็นค่าคงตัวบนแต่ละสามเหลี่ยม; เมื่อ h เล็กลง กระโดดเล็กลงตาม.

11.4.3 ทำไมแผ่นที่เติมจึงดูเป็นเหลี่ยม

สถานการณ์ที่สอง (สถานการณ์สมมติ) คือการเติมรอยเดิมด้วยเมชหยาบ: แผ่นที่ได้ดูเป็นเหลี่ยมทั้ง ๆ ที่คำตอบของสมการต่อเนื่อง. การทดลองเชิงตัวเลขนี้แก้ปัญหาบนสี่เหลี่ยมเต็ม $\Omega = (0,1)^2$ ด้วยค่าขอบฮาร์มอนิกตามตัวอย่างก่อนหน้า; $\Omega_0 = [1/4, 3/4]^2$ เป็นเพียงหน้าต่างสังเกตความคลาดเคลื่อนตรงกลาง ไม่ใช่โดเมนที่แก้สมการ. เรารวมอินทิกรัลของสามเหลี่ยมที่อยู่ในหน้าต่างนี้ และวัดความคลาดเคลื่อนใน Ω_0 กับขนาดกระโดดของอนุพันธ์ปกติข้ามด้านในเมช:

N	จำนวนจุดภายใน	$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega_0)}$	$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_0)}$	กระโดดสูงสุด
4	9	0.0071876542	0.1316890090	2.2786629004
8	49	0.0019994401	0.0677152444	1.4213914521
16	225	0.0005132614	0.0340729776	0.7899816704
32	961	0.0001291662	0.0170628010	0.4161072489

เมื่อ h ลดครึ่งหนึ่ง ความคลาดเคลื่อน L^2 ลดลง $3.59, 3.90, 3.97$ เท่า และกึ่งนอร์ม H^1 ลดลง $1.94, 1.99, 2.00$ เท่า. กระโดดของอนุพันธ์ปกติลดลง $1.60, 1.80, 1.90$ เท่า; อัตราเข้าใกล้ 2 แปลว่ากระโดดเป็น $O(h)$.

คำตอบของสถานการณ์ที่สองคือ: แผ่นที่เติมดูเป็นเหลี่ยมเพราะ V_h ประกอบด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นชิ้น. ภายในแต่ละสามเหลี่ยม เกรเดียนต์เป็นเวกเตอร์คงที่; เมื่อข้ามด้านหนึ่งไปยังสามเหลี่ยมข้างเคียง เกรเดียนต์เปลี่ยนทันที. ส่วนที่ต่อเนื่องคือค่าของฟังก์ชัน ไม่ใช่อนุพันธ์. ตาเห็น “รอยหัก” ตามด้านเหล่านี้เป็นเหลี่ยม. ขนาดของรอยหักคือกระโดดของอนุพันธ์ปกติ ซึ่งเป็น $O(h)$; เมื่อเมชละเอียดขึ้น รอยหักเล็กลงและเหลี่ยมก็เล็กลง.

สัมมนา · Preprint · 2026-10-24

จุดสำคัญคือสาเหตุไม่ได้อยู่ที่สมการปัวซงหรือข้อมูลภาพ แต่อยู่ที่การเลือกปริภูมิมิติจำกัด. ถ้าเราเปลี่ยนจาก P_1 เป็นพหุนามดีกรีสูงขึ้น เกรเดียนต์ยังไม่ต่อเนื่อง แต่รอยหักเล็กลงเร็วกว่า h. ถ้าเราใช้วิธีที่บังคับอนุพันธ์ให้ต่อเนื่อง (เช่น วิธีสมาชิกจำกัดบางชนิด) หรือทำการปรับเรียบหลังแก้ เราก็ลดเหลี่ยมได้อีก. ทั้งหมดนี้เป็นการเปลี่ยน V_h ไม่ใช่การเปลี่ยนสมการ.

ตัวอย่าง: กระโดดของอนุพันธ์บนเมชสองสามเหลี่ยม

บนสี่เหลี่ยม $(0,1)^2$ แบ่งด้วยเส้นทแยงจาก $(0,0)$ ถึง $(1,1)$. ให้ $u(x,y) = xy$. บนสามเหลี่ยมล่างที่จุดยอด $(0,0),(1,0),(1,1)$ ค่าของ u คือ $0,0,1$, ดังนั้นตัวประมาณเชิงเส้นเป็นชิ้นคือ $I_h u = y$ และเกรเดียนต์ $(0,1)$. บนสามเหลี่ยมบนที่จุดยอด $(0,0),(1,1),(0,1)$ ค่าคือ $0,1,0$, จึง $I_h u = x$ และเกรเดียนต์ $(1,0)$. เวกเตอร์หน่วย $(1,-1)/\sqrt{2}$ มีทิศตั้งฉากกับเส้นทแยง. กระโดดของอนุพันธ์ปกติคือ

$$\big|(1,0)\cdot n - (0,1)\cdot n\big| = \frac{|1-(-1)|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.4142135624.$$

ตัวเลขนี้มีแบบทดสอบยืนยัน. ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่ากระโดดเกิดจากความโค้งของ u อย่างเดียว: ถ้า u เป็นเชิงเส้นทั้งโดเมน เกรเดียนต์ทั้งสองข้างจะเท่ากันและกระโดดเป็นศูนย์.

ข้อควรระวัง: ภาพจริงไม่ใช่ฟังก์ชันฮาร์มอนิก

เราใช้คำตอบฮาร์มอนิกเป็น “คำตอบจริง” เพื่อวัดความคลาดเคลื่อน เพราะเรารู้สูตรของมัน. ในภาพจริง เราไม่รู้คำตอบจริง; เราเห็นเพียงผลลัพธ์ที่เติม. การที่เมชละเอียดให้ภาพที่ดูเรียบขึ้นไม่ได้แปลว่าภาพนั้นถูกต้องตามเนื้อหา. แบบจำลองฮาร์มอนิกอาจเติมผืนเรียบที่ผิดกับลายของภาพ. การตรวจสอบจึงต้องแยก “คำตอบของแบบจำลอง” ออกจาก “ภาพที่ต้องการ”.

11.4.4 ต้นทุนและข้อจำกัด

จำนวนจุดภายในโตเป็น $(N-1)^2$ เมื่อ N เพิ่มเป็นสองเท่า จำนวนจุดเพิ่มประมาณสี่เท่า. ในตารางข้างบน: $9, 49, 225, 961$ จุด และจำนวนสามเหลี่ยม $32, 128, 512, 2048$. เมทริกซ์สติฟเนสเบาบาง: แต่ละแถวมีรายการไม่เป็นศูนย์เพียงไม่กี่รายการ เพราะฟังก์ชันฐานหนึ่งตัวสัมผัสกับสามเหลี่ยมข้างเคียงเพียงหก เจ็ดรูป. แต่ขนาดระบบยังโตเร็วเมื่อภาพใหญ่ขึ้น.

สำหรับภาพขนาดเล็ก วิธีแก้โดยตรง (เช่นการแยกแบบ LU) ใช้ได้. สำหรับภาพใหญ่ ระบบที่มีจุดเป็นล้าน ๆ มักใช้อัลกอริทึมที่ปรับคำตอบวนรอบ เช่นวิธีเกรเดียนต์สังยุคหรือ**วิธีหลายกริด** (multigrid method). บทนี้ไม่วิเคราะห์อัตราการลู่เข้าของตัวแก้เหล่านี้; เราเพียงชี้ว่าขั้นตอนเชิงเส้นเป็นส่วนที่ต้องระวังเมื่อนำแบบจำลองไปใช้จริง.

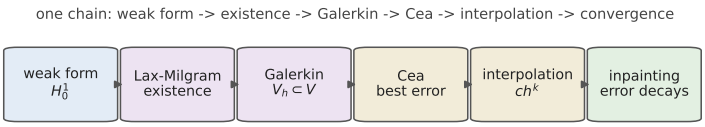
ข้อจำกัดของแบบจำลองมีอย่างน้อยสามข้อ.

- **ข้อมูลขอบ.** ถ้าค่าขอบมีสัญญาณรบกวน คำตอบจะรับสัญญาณนั้นเข้าไปและอาจแกว่งใกล้ขอบ.
- **ความเรียบ.** ฮาร์มอนิกบังคับให้ผืนเรียบ; ลายละเอียดและเนื้อสัมผัสหายไป.
- **รูปทรงของรู.** ขอบที่มีมุมแหลมอาจทำให้คำตอบเกิดเอกฐานและอัตราการลู่เข้าตกลง (ตามข้อควรระวังในหัวข้อ 11.3.4).

ลองเอง: ตั้งเป้าความคลาดเคลื่อนและคิดถึงต้นทุน

ถ้า $\|u - u_h\|_{H^1} \approx Ch$ และเราต้องการลดความคลาดเคลื่อนลง 10 เท่า เราต้องลด h ลง 10 เท่า. จำนวนจุดภายในประมาณ h^{-2} จึงเพิ่มขึ้น $10^2 = 100$ เท่า. ถ้าภาพเดิมใช้ $10{,}000$ จุด ภาพใหม่ใช้ $1{,}000{,}000$ จุด. ตัวเลข 100 และ $1{,}000{,}000$ มีแบบทดสอบยืนยัน.

ร่างก่อนพิมพ์ Preprint 2026-10-24



รูปที่ 11.5: โซ่การให้เหตุผลของบท: จากรูปแบบอ่อนไปยังการลู่เข้าและการเติมเต็มภาพ.

หลักการค่าสูงสุดแบบไม่ต่อเนื่อง

สำหรับเมชดีโลเนย์ ซึ่งทุกด้านภายในมีผลบวกของมุมตรงข้ามสองมุมไม่เกิน π, นอกแนวทแยงของเมทริกซ์สติฟเนสไม่เป็นบวก. เพราะผลรวมแต่ละแถวของเมทริกซ์เต็มเป็นศูนย์และสมาชิกแนวทแยงเป็นบวก, สมการฮาร์มอนิกที่จุดภายในเขียนเป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของค่าที่จุดข้างเคียงด้วยน้ำหนักไม่ลบที่รวมกันเป็นหนึ่ง. ค่าต่ำสุดและสูงสุดของ u_h จึงเกิดบนขอบ. นี่อธิบายว่าทำไมการเติมแบบฮาร์มอนิกจึงไม่สร้างค่าสว่างที่สูงหรือต่ำกว่าขอบเดิม. เราไม่พิสูจน์หลักการนี้ในบทนี้; เราใช้มันเป็นคำอธิบายเชิงคุณภาพ.

สรุปใจความ

- การเติมเต็มภาพแบบฮาร์มอนิกคือการหาคำตอบของ $-\Delta u = 0$ กับค่าขอบ g; มันเป็นจุดต่ำสุดของพลังงานดีรีเคลและมีคำตอบเดียวเมื่อ $g \in H^{1/2}$.
- วิธี P_1: แบ่งเมช, ประกอบเมทริกซ์สติฟเนสเฉพาะชิ้น $K_{\text{loc}} = \frac{1}{2}[[2,-1,-1],[-1,1,0],[-1,0,1]]$, ใส่ค่าขอบ แล้วแก้ระบบสำหรับจุดภายใน.
- ขนาดระบบคือ $(N-1)^2$; สำหรับ $N = 4, 8, 16, 32$ คือ $9, 49, 225, 961$ จุด.
- ความคลาดเคลื่อนในหน้าต่างสังเกต Ω_0: L^2 ประมาณ h^2 และกึ่งนอร์ม H^1 ประมาณ h; ตัวเลขในตารางยืนยัน.
- เหลี่ยมที่เห็นคือกระโดดของอนุพันธ์ปกติข้ามด้าน, เป็น $O(h)$; สาเหตุคือปริภูมิ P_1 มิติจำกัด ไม่ใช่สมการปัวซง. การลดเหลี่ยมทำได้โดยเปลี่ยน V_h หรือทำเมชละเอียดขึ้น.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(ปัวซงหนึ่งมิติด้วยมือ)** สำหรับ $-u'' = 1$ บน $(0,1)$ กับ $u(0) = u(1) = 0$ จงใช้เมชสม่ำเสมอ $N = 3$ เขียนเมทริกซ์สติฟเนสและเวกเตอร์ภาระ แล้วแก้ด้วยมือ. จงตรวจว่าคำตอบที่โหนดตรงกับ $u(x) = x(1-x)/2$.

2. **(เมทริกซ์เฉพาะชิ้น)** จงคำนวณเกรเดียนต์ของฟังก์ชันฐานทั้งสามบนสามเหลี่ยมมุมฉาก $(0,0), (h,0), (0,h)$ และตรวจว่า
$$K_{\text{loc}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
จงตรวจว่าผลรวมแต่ละแถวเป็นศูนย์ และอธิบายว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น.

3. **(อัตราจากตาราง)** จากตารางในหัวข้อ 11.4.3 จงคำนวณอัตราที่สังเกตได้ $\log_2(e_h/e_{h/2})$ สำหรับ L^2 และ H^1 ทั้งสามครั้ง. อัตราเข้าใกล้ค่าใด.

4. **(พลังงาน)** จงพิสูจน์ว่าถ้า u เป็นคำตอบแบบอ่อนของ $-\Delta u = 0$ กับ $Su = g$ แล้ว u เป็นจุดต่ำสุดของ $J(v) = \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2$ บนเซต $\{v \in H^1 : Sv = g\}$ และถ้า u เป็นจุดต่ำสุดแล้ว u เป็นคำตอบแบบอ่อน.

5. **(เหลี่ยมกับ h)** จากตาราง จงคำนวณอัตราส่วนของกระโดดสูงสุดเมื่อ h ลดครึ่งหนึ่ง. อัตราส่วนบอกอะไรเกี่ยวกับขนาดของเหลี่ยมที่ตาเห็น.

6. **(ต้นทุน)** จงเขียนจำนวนจุดภายในและจำนวนสามเหลี่ยมสำหรับ $N = 4, 8, 16, 32$ และคำนวณอัตราส่วนเมื่อ N เพิ่มเป็นสองเท่า. อธิบายว่าเหตุใดต้นทุนจึงโตเร็วกว่าจำนวนด้านของภาพ.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **ปัวซงหนึ่งมิติ.** สำหรับ $N = 3$, $h = 1/3$ และ

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = h\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

   แก้: จากสมการแรก $6c_1 - 3c_2 = 1/3$; จากสมการที่สอง $-3c_1 + 6c_2 = 1/3$. บวกกันได้ $3(c_1 + c_2) = 2/3$, จึง $c_1 + c_2 = 2/9$. ลบกันได้ $9(c_1 - c_2) = 0$, จึง $c_1 = c_2 = 1/9 = 0.1111111111$. คำตอบจริงที่โหนด: $u(1/3) = (1/3)(2/3)/2 = 1/9$ และ $u(2/3) = 1/9$.

2. **เมทริกซ์เฉพาะชิ้น.** ฟังก์ชันฐานคือ $\varphi_1 = 1 - x/h - y/h$, $\varphi_2 = x/h$, $\varphi_3 = y/h$; เกรเดียนต์คือ $(-1/h, -1/h)$, $(1/h, 0)$, $(0, 1/h)$. พื้นที่คือ $h^2/2$. ดังนั้น

$$(K_{\text{loc}})_{ij} = \frac{h^2}{2}\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j,$$

   ซึ่งให้ 1, $-1/2$ และ $1/2$ ตามตำแหน่งในเมทริกซ์ข้างบน. ผลรวมแถวเป็นศูนย์เพราะผลรวมของฟังก์ชันฐานเป็นหนึ่ง: $\sum_j \nabla\varphi_j = 0$. นี่คือเหตุผลที่ฟังก์ชันค่าคงตัวอยู่ในเคอร์เนลของเมทริกซ์สติฟเนส. สำหรับ $h = 1/2$ หรือ $h = 1/4$ ตัวเลขยังเหมือนเดิม.

3. **อัตรา.** จากตาราง:

$$L^2: \quad 1.8459,\ 1.9618,\ 1.9905; \qquad H^1: \quad 0.9596,\ 0.9909,\ 0.9978.$$

   อัตราเข้าใกล้ 2 สำหรับ L^2 และ 1 สำหรับ H^1 ตรงกับทฤษฎีบท L^2 และ H^1.

4. **พลังงาน.** ให้ u เป็นคำตอบแบบอ่อนและ $v = u + \varphi$ กับ $\varphi \in H^1_0$. แล้ว

$$J(v) - J(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla\varphi|^2 + \int \nabla u \cdot \nabla\varphi.$$

   เทอมที่สองเป็นศูนย์เพราะ u แก้สมการอ่อนกับ φ. ดังนั้น $J(v) \geq J(u)$ และเท่ากันก็ต่อเมื่อ $\varphi = 0$. กลับกัน ถ้า u เป็นจุดต่ำสุด ให้ $t > 0$ และ $v = u + t\varphi$; จาก $J(v) \geq J(u)$ หารด้วย t แล้วให้ $t \downarrow 0$ ได้ $\int \nabla u \cdot \nabla\varphi \geq 0$. แทน φ ด้วย $-\varphi$ ได้ ≤ 0; จึงเป็นศูนย์ และ u เป็นคำตอบแบบอ่อน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

5. **เหลี่ยม.** อัตราส่วนของกระโดดคือ

$$\frac{2.2786629004}{1.4213914521}=1.6031,\qquad \frac{1.4213914521}{0.7899816704}=1.7993,\qquad \frac{0.7899816704}{0.4161072489}=1.8985.$$

อัตราเข้าใกล้ 2 ดังนั้นกระโดดเป็น $O(h)$. ขนาดของเหลี่ยมที่ตาเห็นลดลงประมาณครึ่งเมื่อ h ลดครึ่ง; แต่ไม่หายไปจนกว่าจะเปลี่ยนปริภูมิหรือทำการปรับเรียบ.

6. **ต้นทุน.** จำนวนจุดภายในคือ $9, 49, 225, 961$ และจำนวนสามเหลี่ยมคือ $32, 128, 512, 2048$. อัตราส่วนจุดคือ $5.44, 4.59, 4.27$ เข้าใกล้ 4; อัตราส่วนสามเหลี่ยมเป็น 4 ทุกครั้ง. เมื่อ N เพิ่มเป็นสองเท่า จำนวนจุดเพิ่มประมาณสี่เท่า เพราะจุดภายในประมาณ N^2. ต้นทุนจึงโตตามพื้นที่ของภาพ ไม่ใช่ตามด้าน; ภาพที่กว้างขึ้นสองเท่าทั้งสองด้านมีจุดมากขึ้นสี่เท่า.

สูตรสรุป

- รูปแบบอ่อน: $u\in V$, $a(u,v)=F(v)$ ทุก $v\in V$; ถ้า a ต่อเนื่องและโคเออร์ซีฟด้วย M,γ แล้วมีคำตอบเดียวและ $\|u\|_V\le\gamma^{-1}\|F\|_{V'}$. เมื่อ $g\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ ทฤษฎีบทเทรซให้การยก $G\in H^1$; เขียน $u=G+u_0$ เพื่อลดเป็นข้อมูลขอบศูนย์. ถ้าต้องการอัตรา ต้องมี G และ u_0 เรียบพอตามข้อสังเกตเรื่องการยก.
- กาเลอคิน: ต้องมี $V_h\subset V$; แล้ว $a(u-u_h,v_h)=0$ และบทตั้งของเซอาให้ $\|u-u_h\|_V\le(M/\gamma)\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V$. การฉายเฉพาะชิ้นอาจไม่ต่อเนื่อง; ใช้ตัวประมาณทั่วเมช $I_hu\in V_h$ เมื่อข้อมูลขอบเป็นศูนย์. สำหรับข้อมูลไม่เป็นศูนย์เลือก $G_h=I_hG$ และแก้สมการสำหรับส่วนที่มี trace ศูนย์.
- การประมาณ: บนการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด (คุมรูปทรงและขนาดชิ้น), เมื่อ $u\in H^{k+1}$ มี $\|u-I_hu\|_{r,h}\le ch^{k+1-r}|u|_{k+1}$; ดังนั้น $\|u-u_h\|_{H^1}\le ch^k|u|_{k+1}$. ค่าคงตัวไม่ขึ้นกับ h; สำหรับ P_1 อัตราคือ $O(h)$.
- ค่าประมาณ L^2: สำหรับ P_1 บนการแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด ได้ $\|u-u_h\|_{L^2}\le ch^2|u|_2$ เมื่อคำตอบปัญหาผูกพันทุกตัวอยู่ใน H^2 ด้วยค่าคงตัวสม่ำเสมอ; ถ้าสมมติฐานนี้ไม่จริง ทฤษฎีบทไม่รับรองอัตรา h^2.
- P_1 และการเติมเต็มภาพ: หนึ่งมิติ $A=h^{-1}\mathrm{tridiag}(-1,2,-1)$, $b_i=\int f\varphi_i$; สองมิติ $K_{\text{loc}}=\frac{1}{2}[[2,-1,-1],[-1,1,0],[-1,0,1]]$ และมีจุดภายใน $(N-1)^2$. การทดลองแก้ปัญหาบนสี่เหลี่ยมเต็มและวัดข้อผิดพลาดเฉพาะหน้าต่างสังเกต $\Omega_0=[1/4,3/4]^2$. ตารางหน้าต่างสังเกตในหัวข้อ 11.4.3 ให้อัตราเข้าใกล้ h^2 ใน L^2 และ h ใน H^1. กระโดดอนุพันธ์ปกติข้ามด้านเป็น $O(h)$.

อ่านต่อ

บทนี้เปลี่ยนสมการเชิงเส้นให้เป็นการหาค่าต่ำสุดและการฉายบนปริภูมิมิติจำกัด. บทถัดไป (“จุดตรึง”) กลับมาที่คำถามเดียวกันในกรณีไม่เชิงเส้น: หลักการหดตัวของบานาคบอกว่าเมื่อใดการทำซ้ำลู่เข้าและเร็วแค่ไหน แล้วเราใช้มันกับอันดับหน้าเพจของเว็บ. ความคิดเรื่องขอบเขตเอกรูปและอัตราการลู่เข้าจะกลับมาในรูปของการประมาณค่าคงตัวของการหดตัว.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

บทที่ 12

จุดตรึง: จากฟิสิกส์ในเกมถึงอันดับของหน้าเว็บ

สถานการณ์สมมติ: สปริงในเกมที่ยังไม่หยุดนิ่ง

สมมติว่าเราเล่นเกมที่ตัวละครผูกกับสปริงเส้นหนึ่ง. ทุกเฟรม เครื่องยนต์ฟิสิกส์ต้องหาความเร็วใหม่ของตัวละครจากความเร็วเดิมและแรงของสปริง. ถ้าใช้การประมาณแบบตรง ๆ ด้วยก้าวเวลาที่ยาวเกินไป ตัวละครอาจกระตุกหรือกระเด็นออกไปไกลกว่าที่ควร. เครื่องยนต์จึงแก้สมการของเฟรมนั้นด้วยการทำซ้ำ: เดาความเร็วหนึ่งครั้ง แล้วแทนกลับเข้าไปในสมการเดิม ซ้ำจนค่าเปลี่ยนน้อยมาก. คำถามคือ ทำไมการทำซ้ำแบบนี้จึงหยุดที่ค่าเดียว และต้องทำกี่รอบต่อเฟรมจึงจะพอ.

ในแบบจำลองของเรา สปริงมีความถี่ 2 เฮิรตซ์ ค่าหน่วง 8 ต่อวินาที และเกมวาดภาพ 120 เฟรมต่อวินาที. เราเริ่มที่ตำแหน่ง $x = 1$ เมตร ความเร็วศูนย์ และแก้สมการโดยการทำซ้ำ. ตัวคูณการหดตัวของรอบแก้คือ $q \approx 0.07763$; การทำซ้ำ 5 รอบให้ค่าคลาดเคลื่อน 3.44×10^{-6} เมตรต่อวินาที และ 7 รอบให้ 2.08×10^{-8}. ตัวเลขเหล่านี้มาจากแบบจำลองของเรา ไม่ได้วัดจากเกมจริง.

สถานการณ์ที่สองเป็นหน้าค้นหา. สมมติว่าเรามีห้าหน้าเว็บที่เชื่อมกันเป็นวงแหวน และมีเส้นเชื่อมลัดเส้นหนึ่ง. อันดับของแต่ละหน้าคำนวณจากการทำซ้ำเมทริกซ์ที่ผสม “การเดินตามเส้นเชื่อม” กับ “การกระโดดไปหน้าสุ่ม”. เมื่อตัวประกอบการหน่วง α อยู่ที่ 0.85 คะแนนนิ่งเร็วกว่า; เมื่อ α อยู่ที่ 0.99 คะแนนลดช้า: จากคะแนนเริ่มต้นเท่ากันทุกหน้า ค่าตกค้างครั้งแรกต่ำกว่า 10^{-8} ที่ดัชนี $k = 185$. ทั้งสองฉากเป็นสถานการณ์สมมติ และเราไม่ได้อ้างว่าเครื่องค้นหาใดทำงานอย่างนี้จริง.

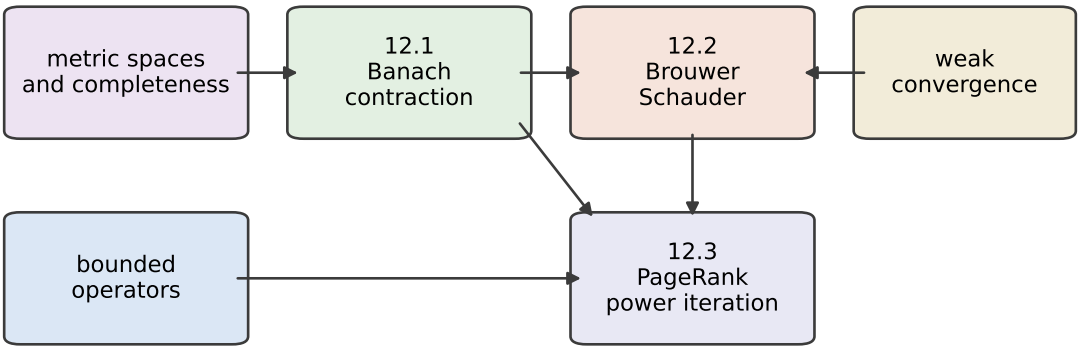
คำถามของบทนี้มีสองชั้น. ชั้นแรก: การส่งแบบใดทำให้การทำซ้ำลู่เข้าหาจุดเดียวได้ และลู่เข้าเร็วแค่ไหน? คำตอบคือ**การหดตัว** (contraction) และทฤษฎีบทจุดตรึงของบานาค. ชั้นที่สอง: ถ้าการส่งไม่หดตัว แต่ต่อเนื่องและส่งเซตกระชับคอนเวกซ์เข้าตัวมันเอง ยังมีจุดตรึงหรือไม่? คำตอบคือมี ตามทฤษฎีบทของเบราเวอร์และชอเดอร์. ส่วนสุดท้ายใช้ทั้งสองแนวคิดกับ**คะแนนความสำคัญของหน้า** (PageRank): การมีอยู่มาจากเบราเวอร์ และความเร็วมาจากการหดตัวบนปริภูมิย่อยที่ผลรวมเป็นศูนย์.

ขอบเขตตัวคูณการหดตัวที่รับประกันได้สำหรับทุกกราฟคือ α จึงเข้าใกล้ 1 เมื่อ $\alpha \to 1$; แต่อัตราจริงยังขึ้นกับกราฟ. ในวงแหวนล้วนอัตราจริงเท่ากับ α, ส่วนกราฟที่มีเส้นลัดมีอัตราเท่ากับโมดูลัสของค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่ใช่ 1 ที่ใหญ่ที่สุด ซึ่งอาจต่ำกว่า α. เราจะแยกขอบเขตรับประกันกับอัตราจริงให้ชัดใน §12.3.

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกถึงเครื่องปรับค่าที่รับสถานะหนึ่งแล้วคืนสถานะถัดไป. ถ้าทุกครั้งที่ใช้เครื่อง ระยะระหว่างสองสถานะหดลงด้วยสัดส่วนคงที่ $q < 1$ สถานะทั้งหมดจะถูกบีบเข้าหากัน จนเหลือจุดเดียวในที่สุด. ภาพนี้ใช้ได้ทั้งกับการแก้สมการเชิง

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-04



shrinking -> nonexpansive -> compact image -> stationary ranking

รูปที่ 12.1: แผนผังการพึ่งพาของบท: ความบริบูรณ์ป้อนเข้าสู่การหดตัวของบานาค; การลู่เข้าแบบอ่อนและปริภูมิฮิลเบิร์ตป้อนเข้าสู่ทฤษฎีบทของเบราเวอร์และชอเดอร์; ทั้งสองแนวคิดรวมกันในการวิเคราะห์คะแนนความสำคัญของหน้า.

ตัวเลข การหาค่าคงที่ของเกม และการจัดอันดับหน้าเว็บ. ในบทนี้เราแยกภาพออกเป็นสามก้าว: การหดตัวและทฤษฎีบทของบานาค; การส่งไม่ขยายกับทฤษฎีบทของเบราเวอร์และชอเดอร์; และคะแนนความสำคัญของหน้าซึ่งเป็นการหดตัวบนปริภูมิย่อยพิเศษ.

เราใช้ผลจากบทก่อน ๆ หลายบท. จากบทว่าด้วยระยะทางและความบริบูรณ์ เราใช้ความบริบูรณ์ของปริภูมิบานาค. จากบทว่าด้วยการลู่เข้าแบบอ่อน เราใช้ความสะท้อนกลับของปริภูมิฮิลเบิร์ตและทฤษฎีบทที่ว่าลำดับมีขอบเขตมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน. จากบทว่าด้วยตัวดำเนินการกระชับ และบทว่าด้วยทฤษฎีเชิงสเปกตรัม เราใช้ความคิดเรื่องค่าลักษณะเฉพาะและรัศมีสเปกตรัม. ตัวเลขทุกตัวในบทนี้คำนวณใน `code/funkana/ch12.py` และถูกยืนยันใน `code/tests/test_ch12.py`.

12.1 หลักการหดตัวของบานาคและฟิสิกส์ในเกม

ภาพรวมก่อนอ่าน

การทำซ้ำคือการถามคำถามเดิมซ้ำ ๆ กับคำตอบที่ได้จากรอบก่อน. ถ้าคำถามนั้นทำให้คำตอบที่ต่างกันสองคำตอบเข้ามาใกล้กันทุกครั้ง เราก็คาดว่าคำตอบจะนิ่งอยู่ที่จุดหนึ่ง. ในหน่วยนี้เราเขียนความคิดนี้ให้เป็นทฤษฎีบท แล้วใช้กับการแก้สมการของสปริงในเกม.

เราเริ่มจากคำจำกัดความที่ใช้ตลอดบท. ให้ (M, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $F\colon M \to M$ เป็นการส่งจาก M เข้าตัวมันเอง.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21

นิยาม 12.1.1: การหดตัว การส่งไม่ขยาย และจุดตรึง

เราเรียก F ว่า**การหดตัว** (contraction) เมื่อมีจำนวน $q \in [0,1)$ ที่ทำให้

$$d\big(F(x),F(y)\big) \le q\, d(x,y) \qquad \text{สำหรับทุก } x,y \in M.$$

จำนวน q ที่เล็กที่สุดที่ใช้ได้เรียกว่า**ค่าคงตัวการหดตัว** (contraction constant) ของ F. เราเรียก F ว่า**การส่งไม่ขยาย** (nonexpansive map) เมื่ออสมการเดียวกันเป็นจริงกับ $q = 1$, นั่นคือ

$$d\big(F(x),F(y)\big) \le d(x,y) \qquad \text{สำหรับทุก } x,y \in M.$$

ถ้า $F(\xi) = \xi$ เราเรียก ξ ว่า**จุดตรึง** (fixed point) ของ F.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“หดตัว” ไม่ได้หมายความว่าจุดทุกจุดถูกเลื่อนเข้าหาศูนย์กลางจุดเดียว. มันหมายความว่าระยะระหว่างภาพของสองจุดใด ๆ สั้นกว่าระยะระหว่างต้นฉบับเสมอ และสั้นลงอย่างน้อยด้วยสัดส่วนคงที่. ตัวอย่างเช่น $F(x) = 0.75x + 0.5$ บน $\mathbb{R}$ เป็นการหดตัวด้วย $q = 0.75$; การส่ง $F(x) = 1 - x$ เป็นการส่งไม่ขยายแต่ไม่หดตัว เพราะระยะระหว่างภาพเท่ากับระยะเดิมพอดี; การส่ง $F(x) = 2x$ ไม่ใช่การส่งไม่ขยาย เพราะระยะระหว่างภาพเป็นสองเท่า.

ลองเอง: การทำซ้ำหนึ่งมิติ

ให้ $x_{n+1} = 0.75x_n + 0.5$ และ $x_0 = 0$. จุดตรึงแก้ $x = 0.75x + 0.5$ จึงได้ $x = 2$. เขียน $e_n = x_n - 2$; แล้ว

$$e_{n+1} = x_{n+1} - 2 = 0.75x_n - 1.5 = 0.75(x_n - 2) = 0.75e_n.$$

ดังนั้น $e_n = 0.75^n(x_0 - 2) = -2(0.75)^n$ และ $x_n = 2 - 2(0.75)^n$. ที่ $n = 10$,

$$x_{10} = 1.8873729706, \qquad |x_{10} - 2| = 0.1126270294.$$

ถ้าต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 10^{-6} ต้องใช้ 51 รอบ เพราะ $2(0.75)^{50} > 10^{-6}$ แต่ $2(0.75)^{51} \le 10^{-6}$.

ตอนนี้เราพร้อมสำหรับทฤษฎีบทหลักของหน่วย.

ทฤษฎีบทนี้ตอบสามคำถามพร้อมกัน: คำตอบมีจริงหรือไม่ มีเพียงหนึ่งหรือไม่ และการทำซ้ำไปถึงคำตอบเร็วแค่ไหน. สองข้อแรกเป็นเรื่องของการมีอยู่และเอกลักษณ์; ข้อสามให้ขอบเขตที่ใช้ตัดสินจำนวนรอบได้ก่อนลงมือคำนวณ.

ข้อควรระวัง

จุดที่ต้องระวังเมื่อใช้ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไป: ความบริบูรณ์ของ M ขาดไม่ได้. ให้ $M = (0,1]$ และ $F(x) = x/2$. แล้ว F เป็นการหดตัวด้วย $q = 1/2$ แต่ F ไม่มีจุดตรึงใน M เพราะจุดตรึง 0 อยู่นอก M. ทฤษฎีบทของบานาคใช้ได้เพราะ M บริบูรณ์; เซต $(0,1]$ ไม่บริบูรณ์. ในเกม เซตของความเร็วที่เป็นไปได้มักเป็นช่วงปิด จึงไม่เกิดปัญหานี้.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 12.1.1: ทฤษฎีบทจุดตรึงของบานาค

สมมติว่า (M, d) ไม่ว่างและบริบูรณ์ และ $F\colon M \to M$ หดตัวด้วยค่าคงตัว q โดย $0 \le q < 1$. ข้อสรุปมีสามข้อ.

1. มีจุด $\xi \in M$ จุดเดียวที่ $F(\xi) = \xi$;
2. ไม่ว่าเริ่มที่ $x_0 \in M$ ใด ลำดับ $x_0, F(x_0), F(F(x_0)), \dots$ มีลิมิตเป็น ξ;
3. สำหรับทุก $n \ge 1$,

$$d(x_n, \xi) \le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0), \qquad d(x_n, \xi) \le \frac{q}{1-q}\, d(x_n, x_{n-1}).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** แสดงว่าลำดับของการทำซ้ำเป็นลำดับโคชีโดยเปรียบเทียบระยะของก้าวถัด ๆ กับอนุกรมเรขาคณิต แล้วใช้ความบริบูรณ์หาลิมิต; ความเป็นจุดตรึงตามมาจากความต่อเนื่อง และเอกลักษณ์ตามมาจากการหดตัวอีกครั้ง.

1. **ระยะของแต่ละก้าวหดลง.** สำหรับ $n \ge 1$,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(F(x_n), F(x_{n-1})\big) \le q\, d(x_n, x_{n-1}).$$

   ใช้ซ้ำ n ครั้งได้

$$d(x_{n+1}, x_n) \le q^n d(x_1, x_0). \tag{12.1}$$

2. **ลำดับเป็นโคชี.** ให้ $m > n$. ใช้อสมการอิงรูปสามเหลี่ยมกับผลต่างที่เขียนเป็นผลบวกของก้าวต่อเนื่อง,

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=n}^{m-1} q^j d(x_1, x_0) \le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0). \tag{12.2}$$

   เพราะ $q < 1$ ทำให้ $q^n \to 0$ ดังนั้นทุก $\varepsilon > 0$ มี N ที่ทำให้ทางขวาของ (12.2) ต่ำกว่า ε เมื่อ $n \ge N$. ลำดับจึงเป็นโคชี.

3. **ลิมิตคือจุดตรึง.** เพราะ M บริบูรณ์ ลำดับมีลิมิต $\xi \in M$. จาก (12.1) และ $q < 1$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \to 0.$$

   เนื่องจาก F เป็นการหดตัว จึงต่อเนื่อง และ

$$d\big(F(\xi), x_{n+1}\big) = d\big(F(\xi), F(x_n)\big) \le q\, d(\xi, x_n) \to 0.$$

   ลิมิตของ x_{n+1} มีได้ค่าเดียว คือ ξ; ดังนั้น $F(\xi) = \xi$.

4. **มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว.** ถ้า $F(\xi) = \xi$ และ $F(\eta) = \eta$ แล้ว

$$d(\xi, \eta) = d\big(F(\xi), F(\eta)\big) \le q\, d(\xi, \eta).$$

   เพราะ $q < 1$ และ $d(\xi, \eta) \ge 0$ อสมการนี้บังคับ $d(\xi, \eta) = 0$ นั่นคือ $\xi = \eta$.

5. **ขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อน.** ให้ $m \to \infty$ ใน (12.2) ได้ขอบเขตแรก. สำหรับขอบเขตที่สอง การหดตัวให้

$$d(x_{n+1}, x_n) \le q\, d(x_n, x_{n-1}).$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ใช้สมบัติอิงรูปสามเหลี่ยมและวนอสมการการหดตัวต่อไป จะได้ เมื่อ $m > n$,

$$d(x_m, x_n) \le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_{j+1}, x_j) \le \sum_{j=1}^{m-n} q^j d(x_n, x_{n-1}) \le \frac{q}{1-q}\, d(x_n, x_{n-1}).$$

ให้ $m \to \infty$ ได้ขอบเขตที่สอง.

สรุป: การหดตัวทำให้ระยะของก้าวถัด ๆ เล็กลงแบบเรขาคณิต ลำดับจึงเป็นโคชีและมีลิมิตเดียว ซึ่งต้องเป็นจุดตรึง. □

ข้อควรระวัง

ทฤษฎีบทนี้ต้องการ $q < 1$ ที่ใช้ได้พร้อมกันทุกคู่ x, y. การมี $|F'(x)| < 1$ ที่แต่ละจุดไม่พอ. ตัวอย่างเช่น $F(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$ บน $\mathbb{R}$ มี $F'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \in [0, 1)$ ทุกจุด แต่ $F(x) - x = \frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$ ทุกจุด ดังนั้น F ไม่มีจุดตรึง. ปัญหาคือซูพรีมัมของ $|F'|$ เท่ากับ 1 ไม่ใช่จำนวนที่น้อยกว่า 1.

12.1.1 สปริงในเกม: การแก้สมการของหนึ่งเฟรม

ในเกม สปริงที่หน่วงแล้วเขียนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$x''(t) + c\,x'(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

โดย x คือระยะยืดจากตำแหน่งสมดุล, $c > 0$ คือค่าหน่วง และ $\omega > 0$ คือความถี่เชิงมุม. เราไม่แก้สมการนี้แบบต่อเนื่อง แต่แก้ทีละเฟรมด้วยวิธีออยเลอร์ถอยหลัง. ให้ h เป็นความยาวเฟรม, x_k เป็นตำแหน่ง และ v_k เป็นความเร็วที่ต้นเฟรม k. ขั้นโดยนัยเขียนเป็น

$$x_{k+1} = x_k + h\,v_{k+1}, \qquad v_{k+1} = v_k + h\big(-\omega^2 x_{k+1} - c\,v_{k+1}\big). \tag{12.3}$$

แทน x_{k+1} ในสมการที่สอง,

$$v_{k+1} = v_k - h\omega^2 x_k - h(c + h\omega^2) v_{k+1}. \tag{12.4}$$

สมการ (12.4) มีรูปแบบ $v = h\,g(v) + \beta$ ตามรูปแบบในตำรา Iserles 2009 บทที่ 7 (ระบบเชิงพีชคณิตไม่เชิงเส้น). เราหา v_{k+1} ด้วยการทำซ้ำ

$$v^{(j+1)} = v_k - h\big(\omega^2 x_k + (c + h\omega^2) v^{(j)}\big), \qquad v^{(0)} = 0. \tag{12.5}$$

การส่งใน (12.5) เป็นการหดตัวด้วย

$$q = h(c + h\omega^2), \tag{12.6}$$

เพราะผลต่างของสองการทำซ้ำถูกคูณด้วย $h(c + h\omega^2)$ ทุกครั้ง.

ลองเอง: ตัวเลขของหนึ่งเฟรม

เลือก $h = 1/120$ วินาที, $\omega = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ เรเดียนต่อวินาที และ $c = 8$ ต่อวินาที. แล้ว

$$\omega^2 = 157.9136704174, \qquad q = \frac{1}{120}\Big(8 + \frac{157.9136704174}{120}\Big) = 0.0776328938.$$

เริ่มที่ $x_k = 1$ และ $v_k = 0$. จุดตรึงของ (12.4) คือ

$$v^{*} = \frac{-h\omega^2 x_k}{1 + hc + h^2\omega^2} = -1.2211461446.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

การทำซ้ำให้ค่าคลาดเคลื่อน $|v^{(j)} - v^*|$ เท่ากับ

$$0.0948011089, \quad 0.0073596844, \quad 0.0005713536, \quad 4.4355833 \times 10^{-5}, \quad 3.4434717 \times 10^{-6},$$

สำหรับ $j = 1, 2, 3, 4, 5$. ที่ $j = 7$ ค่าคลาดเคลื่อนเหลือ 2.0753343×10^{-8}. ในเกมจริง เราหยุดเมื่อค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าระดับที่ตามองไม่เห็น; ตัวเลขนี้บอกว่า 5 ถึง 7 รอบก็เพียงพอสำหรับแบบจำลองนี้.

ข้อควรระวัง

ค่า q ขึ้นกับ h. ถ้าเฟรมยาวขึ้นเป็น $h = 1/8$ วินาที จะได้ $q \approx 3.47 > 1$ และการทำซ้ำ (12.5) แยกออก แม้สมการโดยนัย (12.4) ยังมีคำตอบเดียวเพราะตัวส่วน $1 + hc + h^2\omega^2$ เป็นบวก. การมีคำตอบกับการที่การทำซ้ำจะหาคำตอบได้จึงเป็นคนละเรื่อง; ต้องตรวจ $q < 1$ ก่อนใช้การทำซ้ำ. เงื่อนไข $q < 1$ เขียนเป็น $h^2\omega^2 + hc - 1 < 0$; สำหรับ $\omega = 4\pi$ และ $c = 8$ ได้ $h < 0.0581813672$ วินาที หรือประมาณ 17.19 เฟรมต่อวินาที. ที่ $h = 1/60$ ได้ $q = 0.1771982418$ ซึ่งยังต่ำกว่า 1.

12.1.2 การหดตัวใน $\mathbb{R}^d$ และเงื่อนไขจากเมทริกซ์จาโคเบียน

ในเกม ตำแหน่งและความเร็วไม่ได้เป็นจำนวนเดียว แต่เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^d$. การส่งที่เราทำซ้ำมักหาอนุพันธ์ได้ และขนาดของจาโคเบียนบอกค่าคงตัวการหดตัวได้. ข้อเท็จจริงที่ใช้คืออสมการค่าเฉลี่ยสำหรับการส่งที่มีค่าเป็นเวกเตอร์.

บทตั้ง 12.1.2: อสมการค่าเฉลี่ยสำหรับการส่งที่หาอนุพันธ์ได้

ให้ $C \subset \mathbb{R}^d$ เป็นเซตคอนเวกซ์ปิด และให้ F หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่องบนย่านเปิดของ C. ถ้า $\|DF(z)\| \le q$ สำหรับทุก $z \in C$ แล้ว

$$\|F(x) - F(y)\| \le q\|x - y\| \qquad (x, y \in C).$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนผลต่างเป็นการอินทิกรัลของอนุพันธ์ตามเส้นตรงระหว่างสองจุด แล้วประมาณขนาดด้วยซูพรีมัมของนอร์มของเมทริกซ์จาโคเบียน.

1. **เส้นตรงอยู่ใน C.** เพราะ C คอนเวกซ์, $z(t) = y + t(x - y) \in C$ สำหรับ $0 \le t \le 1$.
2. **เขียนผลต่าง.** ตามกฎลูกโซ่,
$$F(x) - F(y) = \int_0^1 DF\big(z(t)\big)(x - y)\, dt.$$
3. **ประมาณ.** จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยมสำหรับอินทิกรัล,
$$\|F(x) - F(y)\| \le \int_0^1 \|DF(z(t))(x - y)\|\, dt \le \int_0^1 q\|x - y\|\, dt = q\|x - y\|.$$

สรุป: ถ้าเมทริกซ์จาโคเบียนมีนอร์มไม่เกิน $q < 1$ ทุกจุดของเซตคอนเวกซ์ การส่งนั้นเป็นการหดตัวด้วยค่าคงตัว q. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลองเอง: การส่งสองมิติ

ให้ $F(x,y)=\left(1+\frac{x+y}{4},\frac{x-y}{4}\right)$ บน $\mathbb{R}^2$ และใช้ $\|(x,y)\|_\infty=\max\{|x|,|y|\}$. เมทริกซ์จาโคเบียนคือ

$$DF=\begin{pmatrix}1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}.$$

สำหรับผลต่าง (a,b),

$$\|DF(a,b)\|_\infty=\frac{1}{4}\max\{|a+b|,|a-b|\}\le\frac{1}{4}(|a|+|b|)\le\frac{1}{2}\|(a,b)\|_\infty.$$

จึง $q=1/2$. จุดตรึงแก้

$$x=1+\frac{x+y}{4},\qquad y=\frac{x-y}{4},$$

ได้ $y=x/5$ และ $x=10/7$; จุดตรึงคือ $(10/7,2/7)=(1.4285714286,0.2857142857)$. เริ่มที่ $(0,0)$ ได้

$$x_1=(1,0),\qquad x_3=(1.375,0.25),\qquad x_5=(1.421875,0.28125).$$

ค่าคลาดเคลื่อนในนอร์มอนันต์ที่ $n=1,3,5$ คือ 0.4285714286, 0.0535714286 และ 0.0066964286. ทั้งสามค่าไม่เกินขอบเขต $q^n\,d(x_0,\xi)=(1/2)^n\cdot(10/7)$ ซึ่งใช้ระยะเริ่มต้นจริง $d(x_0,\xi)=10/7$. สำหรับการส่งเชิงเส้นนี้ขอบเขตดังกล่าวคมกว่าขอบเขตเริ่มต้น $2(1/2)^n$ จากทฤษฎีบทบานาค.

จำนวนรอบที่ต้องใช้ขึ้นกับ q อย่างชัดเจน. ถ้าเริ่มที่ระยะ 1.2211461446 และต้องการค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 10^{-6} สูตร $1.2211461446\,q^n\le10^{-6}$ ให้จำนวนรอบดังนี้

q	0.07763	0.5	0.9	0.99
n	6	21	134	1395

เมื่อ q เข้าใกล้ 1 จำนวนรอบเพิ่มขึ้นมากจนในทางปฏิบัติเราต้องยอมรับค่าคลาดเคลื่อนที่ใหญ่ขึ้น หรือเปลี่ยนวิธี. ตัวเลขในตารางคำนวณจากอสมการ $1.2211461446\,q^n\le10^{-6}$ โดยตรง.

12.1.3 สปริงไม่เชิงเส้น: ใช้เมทริกซ์จาโคเบียนหาค่าคงตัว

สปริงในเกมมักไม่เชิงเส้น: แรงเพิ่มเร็วขึ้นเมื่อยืดมาก. เพิ่มเทอม βv^3 เข้าไปในสมการของเฟรม,

$$v=v_{\text{old}}-h\big(\omega^2x+c\,v+\beta v^3\big).$$

ให้ $x=1$, $v_{\text{old}}=0$, $\beta=1$ และค่า h,ω,c เดิม. การส่ง $g(v)=v_{\text{old}}-h(\omega^2x+cv+\beta v^3)$ มี

$$g'(v)=-h\big(c+3\beta v^2\big).$$

บนช่วง $|v|\le2$ ได้ $|g'(v)|\le h(c+12)=1/6=0.1666666667<1$. นอกจากนี้ g ส่งช่วงนี้เข้าตัวมันเอง เพราะ

$$|g(v)|\le h\big(\omega^2+2c+8\beta\big)=1.5159472535\le2.$$

โดยบทตั้ง 12.1.2 g เป็นการหดตัวบนช่วงนี้ และมีจุดตรึงเดียว.

จุดตรึงแก้สมการกำลังสาม $h\beta v^3+(1+hc)v+h\omega^2=0$. รากจริงคือ $v^*=-1.2195306059$, และ

$$|g'(v^*)|=h(c+3\beta(v^*)^2)=0.1038480391.$$

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ขอบเขต $1/6$ จึงปลอดภัยแต่ไม่คม. การทำซ้ำจาก $v^{(0)} = 0$ ให้ค่าคลาดเคลื่อน

$$0.0964166476, \quad 0.0103035731, \quad 0.0010667782, \quad 0.0001108175,$$

สำหรับ $j = 1, 2, 3, 4$; ที่ $j = 7$ เหลือ 1.2410537×10^{-7}.

12.1.4 ผลของความยาวก้าวเวลาต่อเสถียรภาพของแบบจำลอง

การทำซ้ำภายในเฟรมกับการเลือกความยาวเฟรมเป็นคนละเงื่อนไข. การทำซ้ำถามว่าเราหา v_{k+1} ได้หรือไม่; การเลือก h ถามว่าเวลาในเกมเพี้ยนไปแค่ไหนเมื่อผ่านหลายเฟรม. ในการวิเคราะห์นี้ เราแยกโหมดแกว่งของสปริงซึ่งมีค่าลักษณะเฉพาะ

$$\lambda = -\frac{c}{2} + i\omega_d, \qquad \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} = 11.9127524283.$$

ตัวคูณต่อเฟรมของโหมดนี้คือ $e^{-ch/2}$ สำหรับคำตอบแม่นตรง, $|1 + h\lambda|$ สำหรับวิธีออยเลอร์ไปข้างหน้า และ $|1/(1 - h\lambda)|$ สำหรับวิธีออยเลอร์ถอยหลัง. ตารางต่อไปนี้เทียบค่าที่ h สามค่า.

- $h = 1/120$: ตัวคูณแม่นตรง 0.9672161005, วิธีออยเลอร์ไปข้างหน้า 0.9717507707, วิธีออยเลอร์ถอยหลัง 0.9633066987.
- $h = 1/60$: ตัวคูณแม่นตรง 0.9355069850, วิธีออยเลอร์ไปข้างหน้า 0.9542177818, วิธีออยเลอร์ถอยหลัง 0.9216694610.
- $h = 1/8$: ตัวคูณแม่นตรง 0.6065306597, วิธีออยเลอร์ไปข้างหน้า 1.5707963268, วิธีออยเลอร์ถอยหลัง 0.4731213284.

ที่ $h = 1/8$ วิธีออยเลอร์ไปข้างหน้ามีตัวคูณ $1.5708 > 1$ การแกว่งจึงขยายทุกเฟรม; วิธีออยเลอร์ถอยหลังมีตัวคูณ $0.4731 < 1$ จึงยังหน่วงทุกโหมด. ที่ $h = 1/120$ และ $h = 1/60$ วิธีออยเลอร์ถอยหลังมีตัวคูณ 0.9633 และ 0.9217 ซึ่งต่ำกว่า 1 เช่นกัน. ทั้งสองวิธีมีความคลาดเคลื่อนระดับ $O(h)$ เมื่อพิจารณาช่วงเวลาจำกัดและ h เล็ก; ข้อได้เปรียบของวิธีออยเลอร์ถอยหลังสำหรับสปริงแข็งคือความเสถียรที่ $h = 1/8$. สรุปคือ $q < 1$ รับประกันว่าการทำซ้ำภายในเฟรมลู่เข้า แต่ไม่ได้รับประกันว่าแบบจำลองเวลาแม่น.

สรุปใจความ

- การหดตัวทำให้การทำซ้ำเข้าใกล้จุดตรึง; ค่าคงตัว $q < 1$ ต้องใช้ได้พร้อมกันทุกคู่จุด.
- ทฤษฎีบทของบานาคให้จุดตรึงเดียวและการลู่เข้าของการทำซ้ำ พร้อมขอบเขตค่าคลาดเคลื่อนก่อนและหลังการคำนวณ.
- การมี $|F'| < 1$ เป็นรายจุดไม่พอ ต้องมี $q < 1$ ที่ใช้ได้พร้อมกันทุกจุด.
- สปริงในเกมแก้สมการได้ด้วยการทำซ้ำเมื่อ $q = h(c + h\omega^2) < 1$; ในแบบจำลอง $q \approx 0.07763$ จึงใช้ 5–7 รอบต่อเฟรม.

อ่านต่อ

เมื่อ $q = 1$ การหดตัวหายไป แต่การส่งไม่ขยายอาจมีจุดตรึงได้ ถ้าเซตที่ส่งเข้าตัวมันเองมีสมบัติทางเรขาคณิตที่ดีพอ. หน่วยถัดไปใช้ทฤษฎีบทของเบราเวอร์และชอเดอร์ตอบคำถามนี้ และแสดงว่าความกระชับเข้ามาแทนความหดตัวอย่างไร.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(คำนวณมือ)** ให้ $F(x) = (x+3)/4$ บน $\mathbb{R}$. จงหาจุดตรึง ค่าคงตัวการหดตัว และสูตรของ x_n เมื่อ $x_0 = 0$. จากนั้นหาค่าคลาดเคลื่อนที่ $n = 5$ และจำนวนรอบที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 10^{-6}.

2. **(ปริภูมิของฟังก์ชัน)** ให้ $F\colon C[0,1] \to C[0,1]$ นิยามโดย $(Ff)(t) = 0.3 f(t) + t^2$. จงแสดงว่า F เป็นการหดตัวในนอร์มซูพรีมัม หาจุดตรึง และหาค่าของจุดตรึงที่ $t = 1$.

3. **(ข้อความจริงหรือเท็จ)** จงตัดสินข้อความ “ถ้า $|F'(x)| < 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ แล้ว F มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว” พร้อมพิสูจน์หรือตัวอย่างค้าน.

4. **(การส่งไม่ขยาย)** ให้ $F(x) = 1 - x$ บน $[0,1]$. จงแสดงว่า F เป็นการส่งไม่ขยายแต่ไม่หดตัว มีจุดตรึงเดียว และการทำซ้ำจาก $x_0 = 0$ ไม่ลู่เข้า.

5. **(จุดตรึงโดยประมาณ)** ให้ $F(x) = 1 - x$ บน $[0,1]$, $p = 0$ และ $F_\lambda(x) = \lambda p + (1-\lambda)F(x)$. จงหาจุดตรึง ξ_λ และแสดงว่า $|F(\xi_{1/n}) - \xi_{1/n}| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$; คำนวณค่าที่ $n = 10$.

6. **(ใช้โค้ด)** ใช้ฟังก์ชัน `spring_contraction`, `spring_fixed_velocity` และ `spring_error` ใน `code/funkana/ch12.py`. จงรายงานค่า q, $v^\ast$ และค่าคลาดเคลื่อนที่ $j = 1, 3, 5, 7$ แล้วอธิบายว่าจำนวนรอบที่ต้องใช้เปลี่ยนอย่างไรเมื่อ h เล็กลง.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. จุดตรึงแก้ $x = (x+3)/4$ จึงได้ $4x = x + 3$ และ $x = 1$. ค่าคงตัวการหดตัวคือ $q = 1/4$. เขียน $e_n = x_n - 1$; แล้ว $e_{n+1} = e_n/4$ ดังนั้น
$$x_n = 1 + \frac{x_0 - 1}{4^n} = 1 - \frac{1}{4^n}.$$
ที่ $n = 5$, $x_5 = 1 - 1/1024 = 0.9990234375$ และค่าคลาดเคลื่อนคือ $1/1024 = 0.0009765625$. ต้องการ $4^{-n} < 10^{-6}$; เพราะ $4^{-9} = 3.814697 \times 10^{-6}$ และ $4^{-10} = 9.536743 \times 10^{-7}$ ต้องใช้ $n = 10$. ตัวเลขทุกตัวถูกยืนยันในแบบทดสอบ.

2. สำหรับ $f, g \in C[0,1]$,
$$\|Ff - Fg\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |0.3(f(t) - g(t))| = 0.3\,\|f - g\|_\infty.$$
จึงเป็นการหดตัวด้วย $q = 0.3$. จุดตรึงแก้ $f(t) = 0.3 f(t) + t^2$ จึงได้ $f(t) = t^2/0.7 = 10t^2/7$. ที่ $t = 1$, $f(1) = 10/7 = 1.4285714286$.

3. ข้อความเป็นเท็จ. ให้ $F(x) = x + \tfrac{\pi}{2} - \arctan x$. แล้ว $F'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \in [0,1)$ ทุก x แต่
$$F(x) - x = \frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$$
ทุก x ดังนั้น F ไม่มีจุดตรึง. ซูพรีมัมของ $|F'|$ บน $\mathbb{R}$ เท่ากับ 1 จึงไม่มี $q < 1$ ที่ใช้ได้พร้อมกันทุกจุด และทฤษฎีบทของบานาคใช้ไม่ได้.

สมบัติ Preprint · 2026-10-24

4. สำหรับ $x, y \in [0,1]$,

$$|F(x) - F(y)| = |(1-x) - (1-y)| = |x - y|.$$

จึงเป็นการส่งไม่ขยายด้วย $q = 1$ แต่ไม่มีการหดตัวที่ $q < 1$. จุดตรึงแก้ $x = 1 - x$ ได้ $x = 1/2$. ถ้า $x_0 = 0$ ลำดับคือ $0, 1, 0, 1, \ldots$ ซึ่งไม่ลู่เข้า; ถ้า $x_0 = 1/4$ ลำดับคือ $1/4, 3/4, 1/4, \ldots$ ก็ไม่ลู่เข้า. การลู่เข้าจะเกิดเฉพาะเมื่อเริ่มที่จุดตรึงเท่านั้น.

5.

$$F_\lambda(x) = (1-\lambda)(1-x)$$

เพราะ $p = 0$. จุดตรึงแก้

$$x = (1-\lambda)(1-x) \quad \Longrightarrow \quad x(2-\lambda) = 1-\lambda \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1-\lambda}{2-\lambda}.$$

เมื่อ $\lambda = 1/n$,

$$\xi_{1/n} = \frac{n-1}{2n-1}, \qquad |F(\xi_{1/n}) - \xi_{1/n}| = \left|1 - 2\xi_{1/n}\right| = \frac{1}{2n-1}.$$

ทางขวาลู่เข้า 0. ที่ $n = 10$ ค่าคือ $1/19 = 0.0526315789$.

6. จากโค้ด: $q = 0.07763289377898817$, $v^* = -1.2211461445501022$ และค่าคลาดเคลื่อนที่ $j = 1, 3, 5, 7$ คือ

$$0.0948011089, \quad 0.0005713536, \quad 3.4434717 \times 10^{-6}, \quad 2.0753343 \times 10^{-8}.$$

เมื่อ h เล็กลง $q = h(c + h\omega^2)$ เล็กลงตาม (โดยประมาณเป็นสัดส่วนกับ h เมื่อ h เล็ก) การทำซ้ำจึงหดเร็วขึ้นและใช้รอบน้อยลง. แต่ h ที่เล็กลงก็ทำให้ต้องทำหลายเฟรมมากขึ้นเพื่อให้ครอบเวลาจริงเท่าเดิม.

12.2 จุดตรึงของเบราเวอร์และชอเดอร์

ภาพรวมก่อนอ่าน

ทฤษฎีบทของบานาคต้องการให้การส่งหดระยะทุกครั้ง. แต่การส่งหลายตัวในเกมและในสมการเชิงอนุพันธ์เพียงแต่ไม่ทำให้ระยะเพิ่มขึ้น หรือเป็นเพียงการส่งต่อเนื่องบนเซตที่ปิด มีขอบเขต และคอนเวกซ์. ภาพที่ต้องจำคือ: ถ้าเราเอาแผ่นดิสก์ยืดหยุ่นมาบิดหรือพับโดยไม่ฉีก แล้ววางทับลงบนแผ่นเดิม จะมีจุดหนึ่งที่อยู่ตำแหน่งเดิม. นั่นคือทฤษฎีบทของเบราเวอร์ในสองมิติ. ในมิติอนันต์ เราไม่มีการ์ดแบบนั้น แต่ถ้าการส่งเป็นการส่งกระชับ (ภาพของเซตที่มีขอบเขตมีส่วนปิดกระชับ) ก็ได้ผลเดียวกันจากทฤษฎีบทของชอเดอร์.

ในหน่วยที่แล้วเราเห็นแล้วว่าการส่งไม่ขยายอาจมีจุดตรึงหรือไม่มีก็ได้. ก่อนใช้เครื่องมือใหม่ เรารวบรวมข้อเท็จจริงสองข้อที่จะใช้ตลอดหน่วยนี้: การส่งไม่ขยายบนเซตปิด มีขอบเขต และคอนเวกซ์มีลำดับจุดตรึงโดยประมาณเสมอ และถ้าภาพของการส่งกระชับสัมพัทธ์ ลำดับนั้นให้จุดตรึงจริง. เราจะใช้ข้อเท็จจริงเหล่านี้กับปริภูมิฮิลเบิร์ตก่อน.

ฉบับร่าง · Preprint 2026-10-24

บทตั้ง 12.2.1: การส่งไม่ขยายบนเซตปิดมีขอบเขตมีลำดับจุดตรึงโดยประมาณ

ให้ C เป็นเซตย่อยไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์ของปริภูมิบานาค และให้ $F\colon C \to C$ เป็นการส่งไม่ขยายที่ $F(C)$ มีขอบเขต. แล้วมีลำดับ (x_n) ใน C ที่

$$\|F(x_n) - x_n\| \to 0.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** นำ F มาผสมกับ p ที่ตรึงไว้ โดยให้น้ำหนักของ p น้อย ๆ; ผลที่ได้คือการหดตัว ซึ่งจุดตรึงของมันเข้าใกล้ภาพของ F เมื่อน้ำหนักนั้นเล็กลง.

1. **สร้างการส่งผสม.** เลือก $p \in C$. สำหรับ $0 < \lambda \leq 1$ ให้

   $$F_\lambda(x) = \lambda p + (1-\lambda)F(x).$$

   จุด p และ $F(x)$ ต่างอยู่ใน C; เมื่อ C คอนเวกซ์ ผลรวมนูนนี้จึงยังอยู่ใน C.

2. **F_λ หดตัว.** สำหรับ $x, y \in C$,

   $$\|F_\lambda(x) - F_\lambda(y)\| = (1-\lambda)\|F(x) - F(y)\| \leq (1-\lambda)\|x - y\|.$$

   เซตปิดในปริภูมิบานาคย่อมบริบูรณ์ และตัวคูณ $1-\lambda$ น้อยกว่าหนึ่ง; เราใช้ทฤษฎีบทของบานาคกับ F_λ ได้ว่า ξ_λ มีเพียงตัวเดียว.

3. **เลือก $\lambda = 1/n$.** ให้ $x_n = \xi_{1/n}$. จาก $F_{1/n}(x_n) = x_n$,

   $$\|F(x_n) - x_n\| = \|F(x_n) - F_{1/n}(x_n)\| = \frac{1}{n}\|p - F(x_n)\|.$$

   เพราะ $F(x_n) \in F(C)$ และ $F(C)$ มีขอบเขต $\|p - F(x_n)\| \leq M$ สำหรับบาง M. ดังนั้น $\|F(x_n) - x_n\| \leq M/n \to 0$.

สรุป: การผสม F กับจุดคงที่ด้วยน้ำหนัก $1/n$ ให้จุดที่ F ขยับน้อยลงเรื่อย ๆ. □

บทตั้ง 12.2.2: ภาพกระชับสัมพัทธ์และลำดับจุดตรึงโดยประมาณให้จุดตรึง

ให้ C เป็นเซตย่อยไม่ว่าง ปิด และคอนเวกซ์ของปริภูมิบานาค และให้ $F\colon C \to C$ ต่อเนื่อง. ถ้ามีลำดับ (x_n) ใน C ที่ $\|F(x_n) - x_n\| \to 0$ และ $F(C)$ กระชับสัมพัทธ์ แล้ว F มีจุดตรึง. โดยเฉพาะ การส่งไม่ขยาย $F\colon C \to C$ ที่มีภาพกระชับสัมพัทธ์มีจุดตรึง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** แผนคือ: ภาพที่ปิดได้กระชับทำให้เราดึงลำดับย่อยของ $F(x_n)$ ที่มีลิมิต; เนื่องจาก x_n อยู่ใกล้ $F(x_n)$ ลำดับเดียวกันจึงมีลิมิตเดียวกัน และเมื่อ F ต่อเนื่อง ลิมิตนั้นถูกตรึงอยู่กับที่.

1. **ลำดับย่อยที่ลู่เข้า.** จากสมบัติกระชับสัมพัทธ์ของ $F(C)$ เราเลือกดัชนี n_k ได้ เพื่อให้ $F(x_{n_k})$ มีลิมิตเป็นจุด ξ.

2. **$x_{n_k} \to \xi$.** จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม,

   $$\|x_{n_k} - \xi\| \leq \|x_{n_k} - F(x_{n_k})\| + \|F(x_{n_k}) - \xi\| \to 0.$$

   เพราะ C ปิดและ $x_{n_k} \in C$ จึง $\xi \in C$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

3. ξ **เป็นจุดตรึง.** เมื่อ F ต่อเนื่อง ภาพของลำดับย่อยลู่เข้าหา $F(\xi)$; แต่ภาพเดียวกันก็ลู่เข้าหา ξ ดังนั้นสองค่านี้ต้องเท่ากัน.
4. **ส่วนเพิ่มเติม.** ถ้า F ไม่ขยายและ $F(C)$ กระชับสัมพัทธ์ บทตั้งก่อนให้ลำดับจุดตรึงโดยประมาณ และสามขั้นข้างต้นให้จุดตรึง.

สรุป: ภาพที่กระชับสัมพัทธ์เปลี่ยน “เกือบเป็นจุดตรึง” ให้เป็นจุดตรึงจริง. □

ทฤษฎีบท 12.2.3: การส่งไม่ขยายบนเซตปิดมีขอบเขตคอนเวกซ์ใน L^2 มีจุดตรึง

ให้ $\emptyset \neq C \subset L^2(\Omega;\mathbb{R})$ เป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขต และให้ $F\colon C \to C$ เป็นการส่งไม่ขยาย. แล้ว F มีจุดตรึง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เริ่มจากบทตั้ง 12.2.1 ซึ่งให้ลำดับที่ภาพของ F เกือบเท่ากับตัวมัน; จากนั้นใช้สมบัติสะท้อนกลับสกัดลำดับย่อยเชิงอ่อน และปิดท้ายด้วยการคำนวณนอร์มกำลังสองเพื่อแสดงว่าลิมิตอ่อนต้องเป็นจุดตรึง.

1. **ลำดับจุดตรึงโดยประมาณ.** เพราะ C มีขอบเขตและ $F(C) \subset C$ จึงมีขอบเขต. บทตั้ง 12.2.1 ให้ลำดับ (x_n) ใน C ที่
$$\|F(x_n) - x_n\|_2 \to 0. \tag{12.7}$$
2. **ลิมิตอ่อน.** ปริภูมิ L^2 สะท้อนกลับและ (x_n) มีขอบเขต. จากสมบัติสะท้อนกลับของ L^2 เราสกัดลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนออกมาได้; เขียนลำดับย่อยนั้นใหม่ว่า (x_n) และใช้สัญลักษณ์ $x_n \rightharpoonup \xi$. เพราะ C ปิดและคอนเวกซ์ และเซตปิดคอนเวกซ์ในปริภูมินอร์มปิดเชิงอ่อน (ไม่พิสูจน์ในบทนี้) จึงได้ $\xi \in C$.
3. **กระจายนอร์มกำลังสอง.** เขียน
$$x_n - F(\xi) = (x_n - \xi) + (\xi - F(\xi)).$$
เพราะปริภูมิเป็นจริง,
$$\|x_n - F(\xi)\|_2^2 = \|x_n - \xi\|_2^2 + 2\langle x_n - \xi, \xi - F(\xi)\rangle + \|\xi - F(\xi)\|_2^2. \tag{12.8}$$
เพราะ $x_n - \xi \rightharpoonup 0$ และ $g \mapsto \langle g, \xi - F(\xi)\rangle$ เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง เทอมกลางใน (12.8) ลู่เข้า 0. ดังนั้น
$$\|x_n - F(\xi)\|_2^2 - \|x_n - \xi\|_2^2 \longrightarrow \|\xi - F(\xi)\|_2^2. \tag{12.9}$$
4. **ประมาณจากอีกทาง.** เพราะ F ไม่ขยาย,
$$\|x_n - F(\xi)\|_2 \le \|x_n - F(x_n)\|_2 + \|F(x_n) - F(\xi)\|_2 \le \|x_n - F(x_n)\|_2 + \|x_n - \xi\|_2.$$
เทอมแรกในทางขวาลู่เข้า 0 ตาม (12.7); ดังนั้น
$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\|x_n - F(\xi)\|_2 - \|x_n - \xi\|_2 \Big) \le 0.$$
เพราะ $a_n^2 - b_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n)$ และ $a_n + b_n$ มีขอบเขต,
$$\limsup_{n\to\infty} \Big(\|x_n - F(\xi)\|_2^2 - \|x_n - \xi\|_2^2 \Big) \le 0. \tag{12.10}$$
5. **เปรียบเทียบ.** จาก (12.9) และ (12.10),
$$\|\xi - F(\xi)\|_2^2 \le 0.$$
ดังนั้น $\xi = F(\xi)$.

สรุป: ลิมิตอ่อนของลำดับจุดตรึงโดยประมาณอยู่ใน C และการคำนวณนอร์มกำลังสองบังคับให้มันเป็นจุดตรึง. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

อ่านแบบเข้าใจง่าย

ทำไมต้องใช้ L^2 และการลู่เข้าแบบอ่อน? เพราะลูกบอลปิดในปริภูมิมิติอนันต์ไม่กระชับ ลำดับที่มีขอบเขตจึงไม่มีเหตุผลจะลู่เข้าตามนอร์ม. แต่ในปริภูมิฮิลเบิร์ตที่สะท้อนกลับ เรายังได้ลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อน และผลิตภัณฑ์ภายในช่วยให้เราตรวจว่าลิมิตอ่อนเป็นจุดตรึงได้. ถ้า C กระชับ การลู่เข้าแบบอ่อนก็ยกขึ้นเป็นการลู่เข้าตามนอร์ม และบทตั้ง 12.2.2 ใช้ได้ตรง ๆ.

ทฤษฎีบท 12.2.4: การทำซ้ำแบบเฉลี่ยของแมนน์ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึง

ให้ $\emptyset \neq C \subset L^2(\Omega;\mathbb{R})$ เป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขต ให้ $F\colon C \to C$ ไม่ขยาย และให้ $x_0 \in C$. นิยาม

$$x_{n+1} = \frac{x_n + F(x_n)}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

แล้ว (x_n) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงของ F.

พิสูจน์ (แนวคิด). **แนวคิด.** การเฉลี่ยทำให้ระยะถึงจุดตรึงไม่เพิ่ม และผลต่าง $F(x_n) - x_n$ ต้องหดหาย; จากนั้นใช้การคำนวณนอร์มแบบเดียวกับทฤษฎีบทก่อนเพื่อระบุลิมิตอ่อน.

1. **ระยะถึงจุดตรึงไม่เพิ่ม.** ให้ ξ เป็นจุดตรึงซึ่งมีอยู่ตามทฤษฎีบท 12.2.3. การส่ง $G(x) = (x + F(x))/2$ ไม่ขยายและ $G(\xi) = \xi$. ดังนั้น
$$\|x_{n+1} - \xi\|_2 = \|G(x_n) - G(\xi)\|_2 \le \|x_n - \xi\|_2.$$

2. $F(x_n) - x_n \to 0$. ใช้เอกลักษณ์สี่เหลี่ยมด้านขนานกับ $u = F(x_n) - F(\xi)$ และ $v = x_n - \xi$. เพราะ $u + v = 2(x_{n+1} - \xi)$ และ $u - v = F(x_n) - x_n$,
$$4\|x_{n+1} - \xi\|_2^2 + \|F(x_n) - x_n\|_2^2 = 2\|F(x_n) - F(\xi)\|_2^2 + 2\|x_n - \xi\|_2^2 \le 4\|x_n - \xi\|_2^2.$$
จึง
$$\|F(x_n) - x_n\|_2^2 \le 4\big(\|x_n - \xi\|_2^2 - \|x_{n+1} - \xi\|_2^2\big).$$
ผลบวกทางขวาเป็นอนุกรมเทเลสโคปที่มีขอบเขต; ดังนั้น $\sum_n \|F(x_n) - x_n\|_2^2 < \infty$ และเทอมทั่วไปลู่เข้า 0.

3. **ลิมิตอ่อนคือจุดตรึง.** ให้ $x_{n_k} \rightharpoonup z$. จากการคำนวณนอร์มแบบเดียวกับขั้นที่ 3--5 ของทฤษฎีบท 12.2.3 ใช้ $\|F(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \to 0$ แทน (12.7) จะได้ $z = F(z)$.

4. **ทั้งลำดับลู่เข้าจุดเดียวกัน.** ให้ $\Phi = \operatorname{Fix}(F)$; เซตนี้ปิดเพราะ F ต่อเนื่อง. เราพิสูจน์ว่า Φ คอนเวกซ์. ถ้า $u, v \in \Phi$, $0 < t < 1$ และ $w = (1-t)u + tv$, การไม่ขยายให้
$$\|F(w) - u\|_2 \le t\|v - u\|_2, \qquad \|F(w) - v\|_2 \le (1-t)\|v - u\|_2.$$
เมื่อรวมด้วยอสมการสามเหลี่ยม ต้องเกิดเครื่องหมายเท่ากันทุกขั้น. ความนูนอย่างเข้มของ L^2 ทำให้ $F(w)$ อยู่บนส่วนของเส้นตรงระหว่าง u, v; ระยะทั้งสองข้างจึงบังคับ $F(w) = w$. ดังนั้น Φ คอนเวกซ์.

   สำหรับ $y \in \Phi$, ลำดับ $\|x_n - y\|_2$ ไม่เพิ่มและมีขอบเขตล่าง จึงกำหนด
$$\varphi(y) = \lim_{n} \|x_n - y\|_2.$$
   อสมการสามเหลี่ยมย้อนกลับให้ $|\varphi(y) - \varphi(z)| \le \|y - z\|_2$; และเพราะเป็นลิมิตของฟังก์ชันนูน $y \mapsto \|x_n - y\|_2$, φ นูนบน Φ. ให้ $m = \inf_{y \in \Phi} \varphi(y)$ และเลือก $r > m$. จากนิยามอินฟิมัมมี $y \in \Phi$ ที่ $\varphi(y) < r$, ดัง

สำนักงาน · Preprint · 2026-10-24

นั้น $K = \{y \in \Phi : \varphi(y) \le r\}$ ไม่ว่าง. ถ้า $R = \sup_n \|x_n\|_2 < \infty$, สำหรับทุก $y \in K$ มี n ที่ $\|x_n - y\|_2 < r + 1$; จึง $\|y\|_2 \le R + r + 1$ และ K มีขอบเขต. จากความต่อเนื่องของ φ และความนูนของ Φ, K ปิดและคอนเวกซ์. ใน L^2 เซตปิดคอนเวกซ์เป็นเซตปิดเชิงอ่อน; ด้วยความสะท้อนกลับ K จึงกระชับเชิงอ่อน. ฟังก์ชันนูนที่ต่อเนื่องตามนอร์มเป็นกึ่งต่อเนื่องล่างเชิงอ่อน จึงมีจุด $\xi \in K$ ที่ทำให้ φ ต่ำสุดบน K และด้วย $r > m$ จุดนี้ต่ำสุดบน Φ ด้วย.

ถ้า $x_{n_k} \rightharpoonup z$, ขั้นก่อนหน้าให้ $z \in \Phi$. เอกลักษณ์นอร์มใน L^2 ให้

$$\varphi(\xi)^2 = \varphi(z)^2 + \|z - \xi\|_2^2.$$

เพราะ ξ ทำให้ φ ต่ำสุดบน Φ, $\varphi(\xi) \le \varphi(z)$; ดังนั้น $z = \xi$. ทุกลำดับย่อยที่ลู่เข้าแบบอ่อนจึงมีลิมิตเดียวกัน และความสะท้อนกลับให้ $x_n \rightharpoonup \xi$.

สรุป: การเฉลี่ยกับการไม่ขยายทำให้ผลต่างหายไป และลิมิตอ่อนทุกตัวต้องเป็นจุดตรึงตัวเดียวกัน. □

บทแทรก 12.2.5: ภาพกระชับสัมพัทธ์ทำให้การลู่เข้าเป็นตามนอร์ม

ภายใต้สมมติของทฤษฎีบท 12.2.4 ถ้า $F(C)$ กระชับสัมพัทธ์ แล้ว (x_n) ลู่เข้าตามนอร์ม.

พิสูจน์. จากทฤษฎีบท 12.2.4 เราได้ $x_n \rightharpoonup \xi$ และ $\|F(x_n) - x_n\|_2 \to 0$. เนื่องจาก $x_n \rightharpoonup \xi$ และ $\|F(x_n) - x_n\|_2 \to 0$, ลำดับ $F(x_n)$ ก็ลู่เข้าแบบอ่อนไปยัง ξ. สมมติว่ามี $\delta > 0$ และลำดับดัชนี n_j ซึ่ง $\|F(x_{n_j}) - \xi\|_2 \ge \delta$. ความกระชับสัมพัทธ์ของ $F(C)$ ให้ลำดับย่อยอีกชุดที่ลู่เข้าตามนอร์มไปยังจุด y. ลิมิตตามนอร์มเป็นลิมิตอ่อนด้วย จึง $y = \xi$, ขัดกับระยะอย่างน้อย δ. ดังนั้น $F(x_n) \to \xi$ ตามนอร์ม และเมื่อใช้ $\|F(x_n) - x_n\|_2 \to 0$ อีกครั้ง จะได้ $x_n \to \xi$ ตามนอร์ม. □

12.2.1 จากหนึ่งมิติสู่มิติจำกัด: หลักการของเบราเวอร์

ทฤษฎีบทของบานาคและทฤษฎีบทข้างต้นยังต้องใช้โครงสร้างของปริภูมิ (ความบริบูรณ์หรือผลคูณภายใน). ทฤษฎีบทของเบราเวอร์ใช้เพียงความต่อเนื่องและเรขาคณิตของเซตปลายทาง.

ทฤษฎีบท 12.2.6: ทฤษฎีบทจุดตรึงของเบราเวอร์สำหรับเซตกระชับคอนเวกซ์

สมมติว่า X เป็นปริภูมินอร์มที่มีมิติจำกัด, $C \subset X$ ไม่ว่าง กระชับ และคอนเวกซ์, และ F เป็นการส่งต่อเนื่องจาก C เข้า C. ภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้ F ต้องมีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด.

พิสูจน์. **แนวคิด.** หนึ่งมิติใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง; มิติทั่วไปลดจากเซตคอนเวกซ์ไปยังบอลด้วยการฉายใกล้สุด แล้วใช้ทฤษฎีบทเบราเวอร์สำหรับบอลเป็นผลตั้งต้นที่ไม่พิสูจน์ในบทนี้.

1. **หนึ่งมิติ.** ให้ $C = [a, b]$ และ $G(x) = F(x) - x$. เพราะ $F(a) \ge a$ และ $F(b) \le b$,

$$G(a) = F(a) - a \ge 0, \qquad G(b) = F(b) - b \le 0.$$

   G ต่อเนื่อง; ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางให้ $G(\xi) = 0$ นั่นคือ $F(\xi) = \xi$.

2. **มิติทั่วไป.** เปลี่ยนนอร์มบน X เป็นนอร์มแบบยุคลิดได้ เพราะในมิติจำกัดนอร์มทุกตัวสมมูลกัน. เลือกบอลปิด B ที่ครอบ C. การฉายใกล้สุด $P_C : B \to C$ มีค่าเดียวและต่อเนื่อง เพราะ C เป็นเซตไม่ว่างปิดคอนเวกซ์ในปริภูมิฮิลเบิร์ตมิติจำกัด. นิยาม $\widetilde{F} = F \circ P_C : B \to C \subset B$. ทฤษฎีบทจุดตรึงของเบราเวอร์สำหรับลูกบอลปิดในมิติจำกัด (ใช้เป็นผลตั้งต้นและไม่พิสูจน์ในบทนี้) ให้ $x \in B$ ที่ $\widetilde{F}(x) = x$. เนื่องจาก $\widetilde{F}(x) \in C$, ได้ $x \in C$ และ $P_C(x) = x$; ดังนั้น $F(x) = x$.

สปอยล์ Preprint 2026-10-24

สรุป: ในหนึ่งมิติเป็นการใช้ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง; มิติทั่วไปลดลงสู่กรณีบอลด้วยการฉายใกล้สุด. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง)

ทฤษฎีบทของเบราเวอร์ไม่จริงถ้าเซตไม่กระชับ. ตัวอย่างใน ℓ^2: ให้ C เป็นลูกบอลหนึ่งหน่วยปิด และ

$$F(x_1, x_2, \dots) = \big(\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_1, x_2, \dots\big).$$

เพราะ $\|F(x)\|_2^2 = (1 - \|x\|_2^2) + \|x\|_2^2 = 1$ การส่งจึงส่ง C เข้า C และต่อเนื่อง. ถ้า $F(x) = x$ แล้ว $x_1 = x_2 = \cdots$; ลำดับคงตัวเพียงตัวเดียวใน ℓ^2 คือ 0 แต่ $F(0) = (1, 0, 0, \dots) \neq 0$. จึงไม่มีจุดตรึง. ตัวอย่างนี้แสดงว่าความกระชับของเซตปลายทางใช้แทนมิติจำกัดไม่ได้.

12.2.2 ทฤษฎีบทของชอเดอร์

ในมิติอนันต์ เราแทนความกระชับของเซตด้วยความกระชับของภาพ.

นิยาม 12.2.1: การส่งกระชับ

สำหรับปริภูมินอร์ม X, Y และเซต $M \subset X$, การส่ง $F\colon M \to Y$ ได้ชื่อว่า**การส่งกระชับ** (compact map) เมื่อมีสมบัติสองข้อ: F ต่อเนื่อง; และทุกเซตย่อย $B \subset M$ ที่มีขอบเขต ภาพ $F(B)$ มีการปิดที่กระชับใน Y.

ทฤษฎีบท 12.2.7: ทฤษฎีบทจุดตรึงของชอเดอร์ ฉบับเซตกระชับ

สมมติว่า C เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของปริภูมินอร์ม X และ C กระชับและคอนเวกซ์. ถ้า F ส่ง C เข้าตัวเองและต่อเนื่อง แล้ว F มีจุดตรึง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ปกคลุมเซตกระชับด้วยลูกบอลเล็กจำนวนจำกัด สร้างการฉายเข้าสู่ผลรวมนูนของจุดศูนย์กลาง ซึ่งเป็นเซตมิติจำกัด; ใช้เบราเวอร์ที่นั่น แล้วปล่อยรัศมีลูกบอลเข้าหาศูนย์.

1. **ตาข่ายจำกัด.** ให้ $\varepsilon > 0$. เพราะ C กระชับ มีจุด $x_1, \dots, x_m \in C$ ที่
$$C \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_\varepsilon(x_j).$$
2. **ฟังก์ชันน้ำหนัก.** นิยาม $\varphi_j(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_j\|\}$ และ
$$\lambda_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)}.$$
ตัวส่วนเป็นบวกทุก $x \in C$ เพราะ x อยู่ในลูกบอลลูกใดลูกหนึ่ง. แต่ละ λ_j ต่อเนื่อง, $0 \le \lambda_j \le 1$ และ $\sum_j \lambda_j = 1$.
3. **การฉายมิติจำกัด.** ให้ $E = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}$ และ $C' = C \cap E$. เซต C' ไม่ว่าง กระชับ คอนเวกซ์ และอยู่ในปริภูมิมิติจำกัด. นิยาม
$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) x_j.$$
เพราะเป็นผลรวมนูนของจุดใน C จึง $\Phi(x) \in C'$; และ
$$\|\Phi(x) - x\| \le \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x) \|x_j - x\| < \varepsilon,$$

ฉบับร่าง . Preprint . 2026-10-24

เพราะเทอมที่มี $\lambda_j(x) > 0$ มี $\|x_j - x\| < \varepsilon$.

4. **จุดตรึงโดยประมาณ.** การส่ง $\Phi \circ F$ จาก C' เข้า C' ต่อเนื่อง. โดยทฤษฎีบท 12.2.6 มี $\xi_\varepsilon \in C'$ ที่ $\Phi(F(\xi_\varepsilon)) = \xi_\varepsilon$. ดังนั้น
$$\|F(\xi_\varepsilon) - \xi_\varepsilon\| = \|F(\xi_\varepsilon) - \Phi(F(\xi_\varepsilon))\| < \varepsilon.$$
5. **ปล่อย $\varepsilon \to 0$.** เลือก $\varepsilon = 1/n$ และ $\xi_n = \xi_{1/n}$. แล้ว $\|F(\xi_n) - \xi_n\| \to 0$. เพราะ C กระชับและ F ต่อเนื่อง ภาพ $F(C)$ กระชับ (จึงกระชับสัมพัทธ์). บทตั้ง 12.2.2 ให้ F มีจุดตรึง.

สรุป: การฉายลงเซตมิติจำกัดทำให้เบราเวอร์ใช้ได้ และการปล่อยรัศมีเข้าศูนย์ให้จุดตรึงจริง. □

ทฤษฎีบท 12.2.8: ทฤษฎีบทจุดตรึงของชอเดอร์ ฉบับการส่งกระชับ

สมมติว่าในปริภูมิบานาค C เป็นเซตที่ไม่ว่าง ปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขต. ถ้า F ส่ง C เข้าตัวเองและเป็นการส่งกระชับ แล้ว F มีจุดตรึง.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เปลี่ยนภาพของ F ให้เป็นเซตกระชับคอนเวกซ์ แล้วใช้ฉบับเซตกระชับ.

1. **ผลรวมนูนปิดของภาพกระชับ.** ให้ $C' = \overline{\mathrm{co}}F(C)$. เพราะ F กระชับและ C มีขอบเขต $F(C)$ กระชับสัมพัทธ์. เราจะเห็นว่า C' กระชับ: ให้ $\varepsilon > 0$ และเลือก $y_1, \dots, y_m$ ที่ $F(C) \subset \bigcup_j B_\varepsilon(y_j)$. ผลรวมนูนของ y_j อยู่ในเซตมิติจำกัดที่มีขอบเขต จึงมีตาข่ายจำกัด; และทุกจุดของ $\mathrm{co}\,F(C)$ อยู่ห่างจากผลรวมนูนของ y_j ไม่เกิน ε. ดังนั้น C' มีตาข่ายจำกัดทุก ε และเพราะปิดในปริภูมิบานาคจึงกระชับ.
2. **F ส่ง C' เข้าตัวเอง.** เพราะ C คอนเวกซ์และปิด, $F(C) \subset C$ และ $C' \subset C$. สำหรับ $x \in C'$ จะได้ $F(x) \in F(C) \subset C'$.
3. **ใช้ฉบับเซตกระชับ.** เซต C' ไม่ว่าง กระชับ คอนเวกซ์ และ $F\colon C' \to C'$ ต่อเนื่อง. ทฤษฎีบท 12.2.7 ให้จุดตรึง.

สรุป: ห่อภาพของ F ด้วยผลรวมนูนปิดที่กระชับ แล้วลดไปยังกรณีเซตกระชับ. □

เกร็ดเพิ่มเติม (ผู้เรียบเรียง): ผลเสริมสองข้อ

ทฤษฎีบทของเบราเดอร์–เกอเดอ–เคิร์ก. ในปริภูมิบานาคที่คอนเวกซ์เอกรูป เซตไม่ว่าง ปิด มีขอบเขต คอนเวกซ์ และการส่งไม่ขยาย $F : C \to C$ ย่อมมีจุดตรึง (Werner 2007, ทฤษฎีบท IV.7.13). เราไม่พิสูจน์ในบทนี้ เพราะต้องใช้เรขาคณิตของการคอนเวกซ์เอกรูปและขั้นตอนจำกัดที่ยาวกว่าขอบเขตของหน่วย.

ทฤษฎีบทการมีอยู่ของเปอาโน. ให้ $f\colon [-1,1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1] \to \mathbb{R}$ ต่อเนื่อง และ $|f| \le M$. ให้ $T = \min(1, 1/M)$ (ถ้า $M = 0$ ให้ $T = 1$). แล้วปัญหา $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$ มีคำตอบบน $[-T, T]$. พิสูจน์: ให้
$$C = \{y \in C[-T,T] : \|y - y_0\|_\infty \le 1\}, \qquad (Fy)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$
ถ้า $y \in C$ แล้ว $|(Fy)(t) - y_0| \le TM \le 1$ จึง $F(C) \subset C$. นอกจากนี้
$$\|Fy - Fz\|_\infty \le T \sup_{s \in [-T,T]} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|.$$
ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนกล่องปิดและมีขอบเขต จึงสม่ำเสมอต่อเนื่อง; อสมการนี้แสดงว่า F ต่อเนื่อง. ภาพ $F(C)$ มีขอบเขตสม่ำเสมอ (≤ 1) และต่อเนื่องเท่ากัน เพราะ $|(Fy)(t) - (Fy)(s)| \le M|t - s|$; โดยทฤษฎีบทอาร์เซลา–

ร่างเรียบเรียง · Preprint · 2026-10-24

อาสโคลีในบทว่าด้วยตัวดำเนินการกระชับ ส่วนปิดของภาพกระชับ. ทฤษฎีบท 12.2.8 ให้จุดตรึง y; แล้ว y หาอนุพันธ์ได้และแก้สมการเชิงอนุพันธ์. ต้นฉบับยกตัวอย่าง $y' = y^2$, $y(0) = 1$ ซึ่งคำตอบ $1/(1-t)$ ไม่มีขอบเขตเมื่อ $t \to 1$ เพื่อเตือนว่าคำตอบอาจมีเพียงช่วงสั้น.

12.2.3 ตัวอย่างที่การหดตัวใช้ไม่ได้: สมการปริพันธ์ไม่เชิงเส้น

ลองใช้ทฤษฎีบทของชอเดอร์กับสมการ

$$y(t) = 1 + \frac{1}{4}\int_0^t y(s)^2\,ds, \qquad 0 \le t \le 1.$$

ให้ $C = \{y \in C[0,1] : \|y - 1\|_\infty \le 1\}$. เซต C ปิด มีขอบเขต และคอนเวกซ์. ถ้า $y \in C$ แล้ว $|y(s)| \le 2$ และ

$$|(Fy)(t) - 1| \le \frac{1}{4}\int_0^t 4\,ds = t \le 1,$$

จึง $F(C) \subset C$. ภาพ $F(C)$ ต่อเนื่องเท่ากัน เพราะ

$$|(Fy)(t) - (Fy)(s)| \le \frac{1}{4}\Big|\int_s^t y(r)^2\,dr\Big| \le |t - s|,$$

และมีขอบเขตสม่ำเสมอ; โดยทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลี F เป็นการส่งกระชับ. ทฤษฎีบทของชอเดอร์ให้จุดตรึง.

ทำไมการหดตัวใช้ไม่ได้? สำหรับ $y, z \in C$,

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty \le \frac{1}{4}\sup_s |y(s) + z(s)|\,\|y - z\|_\infty \le \|y - z\|_\infty.$$

เพื่อเห็นว่าค่าคงตัว 1 ดีที่สุดจริง ให้ $0 < \varepsilon \le 2$ และเลือกฟังก์ชันคงตัว $y \equiv 2$, $z \equiv 2 - \varepsilon$ ใน C. แล้ว

$$\frac{\|F(y) - F(z)\|_\infty}{\|y - z\|_\infty} = \frac{\frac{1}{4}|4 - (2-\varepsilon)^2|}{\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{4} \longrightarrow 1 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

ดังนั้นค่าคงตัวลิพชิทซ์ที่ดีที่สุดบน C เท่ากับ 1 ไม่ใช่ค่าน้อยกว่า 1; ทฤษฎีบทของบานาคใช้ไม่ได้.

จุดตรึงแก้ $y' = y^2/4$ กับ $y(0) = 1$. แยกตัวแปรได้ $y(t) = 4/(4-t)$ และ $y(1) = 4/3 = 1.3333333333$. การทำซ้ำแบบปิการ์ดเริ่มที่ $y_0 = 1$ ให้

$$y_1 = 1 + \frac{t}{4}, \qquad y_2 = 1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{192}.$$

ที่ $t = 1$, $y_2(1) = 253/192 = 1.3177083333$ และค่าคลาดเคลื่อนคือ $1/64 = 0.015625$; ที่ y_3 ค่าคือ 1.3310827830 และค่าคลาดเคลื่อนเหลือ 0.0022505503. ลำดับยังลู่เข้า แต่ไม่มีการรับประกันอัตราแบบเรขาคณิตจากทฤษฎีบทของบานาค.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

สรุปใจความ

- การส่งไม่ขยายบนเซตปิด มีขอบเขต คอนเวกซ์ใน L^2 มีจุดตรึง; การพิสูจน์ใช้ลำดับจุดตรึงโดยประมาณและลิมิตอ่อน.
- การทำซ้ำแบบเฉลี่ยของแมนน์ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึง; ถ้าภาพกระชับสัมพัทธ์ การลู่เข้าเป็นตามนอร์ม.
- ทฤษฎีบทของเบราเวอร์: การส่งต่อเนื่องบนเซตกระชับคอนเวกซ์ในมิติจำกัดมีจุดตรึง.
- ทฤษฎีบทของชอเดอร์: ความกระชับของภาพแทนมิติจำกัด; ใช้กับเซตกระชับ หรือกับการส่งกระชับบนเซตปิด มีขอบเขต คอนเวกซ์.
- เปอาโนได้มาจากชอเดอร์: สมการเชิงอนุพันธ์ที่มีด้านขวาต่อเนื่องมีคำตอบในช่วงสั้น ๆ.

อ่านต่อ

ตอนนี้เรามีสองเครื่องมือ: การหดตัวให้จุดตรึงเดียวและบอกความเร็ว; เบราเวอร์และชอเดอร์ให้การมีอยู่โดยไม่ต้องมีการหดตัว. หน่วยสุดท้ายจะใช้ทั้งสองอย่างกับคะแนนความสำคัญของหน้า: เบราเวอร์บอกว่าอันดับนิ่งมีอยู่ และการหดตัวบนปริภูมิย่อยที่ผลรวมเป็นศูนย์บอกว่าการทำซ้ำลู่เข้าเร็วแค่ไหน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(คำนวณมือ)** ให้ $F(x) = x^2$ บน $[0,1]$. จงแสดงว่า F ต่อเนื่องและส่ง $[0,1]$ เข้าตัวมันเอง มีจุดตรึงสองจุด และอธิบายว่าทำไมทฤษฎีบทของบานาคใช้ไม่ได้.

2. **(การทำซ้ำแบบเฉลี่ย)** ให้ $F(x) = 1 - x$ บน $[0,1]$ และ $x_{n+1} = (x_n + F(x_n))/2$. จงแสดงว่า $x_1 = 1/2$ ทุก $x_0 \in [0,1]$ และสรุปการลู่เข้า.

3. **(ไม่มีจุดตรึง)** ให้ $F(x) = x + 1$ บน $\mathbb{R}$. จงแสดงว่า F ต่อเนื่อง ไม่ขยาย และไม่มีจุดตรึง; เงื่อนไขใดของทฤษฎีบทของเบราเวอร์ที่ขาด.

4. **(ข้อความจริงหรือเท็จ)** จงตัดสินข้อความ “การส่งต่อเนื่องจากลูกบอลหนึ่งหน่วยปิดของ ℓ^2 เข้าตัวมันเองมีจุดตรึงเสมอ” พร้อมตัวอย่างค้านหรือพิสูจน์.

5. **(การส่งกระชับ)** ให้ $F\colon C[0,1] \to C[0,1]$ นิยามโดย $(Ff)(t) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds$. จงแสดงว่า F ส่งบอลปิดรัศมี 2 เข้าตัวมันเอง เป็นการส่งกระชับ และมีจุดตรึง; หาจุดตรึงนั้น.

6. **(เปอาโน)** ให้ $y' = \sqrt{|y|}$ และ $y(0) = 0$. จงตรวจสมมติของทฤษฎีบทเปอาโน และหาคำตอบสองคำตอบที่ต่างกัน.

7. **(ชอเดอร์)** ให้ $C = \{f \in C[0,1] : 0 \le f(t) \le 1\}$ และ $(Ff)(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. จงตรวจว่า C ไม่ว่าง ปิด มีขอบเขต และคอนเวกซ์; จากนั้นแสดงว่า $F : C \to C$ เป็นการส่งกระชับ แล้วหาจุดตรึงพร้อมตรวจว่าคำตอบอยู่ใน C; จงระบุค่าคงตัวลิพชิทซ์หนึ่งค่าของ F ด้วย.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. $F(x)=x^2$ ต่อเนื่องและ $0\le x^2\le 1$ บน $[0,1]$. จุดตรึงแก้ $x=x^2$ ได้ $x=0$ หรือ $x=1$. ทฤษฎีบทของบานาคใช้ไม่ได้เพราะ $F'(x)=2x$ และ $|F'(1)|=2>1$; ไม่มี $q<1$ ที่ใช้ได้ทุกคู่. ทฤษฎีบทของเบราเวอร์ใช้ได้และบอกเพียงว่ามีจุดตรึงอย่างน้อยหนึ่งจุด ไม่ได้บอกว่ามีเพียงจุดเดียว.

2. เพราะ $F(x)=1-x$,
$$x_1=\frac{x_0+1-x_0}{2}=\frac{1}{2}.$$
หลังจากนั้น $x_n=1/2$ ทุก $n\ge 1$ เพราะ $F(1/2)=1/2$. ลำดับลู่เข้าหาจุดตรึง $1/2$ ในหนึ่งก้าว.

3. $F(x)=x+1$ ต่อเนื่องและ $|F(x)-F(y)|=|x-y|$ จึงไม่ขยาย. แต่ $F(x)-x=1>0$ ทุก x ดังนั้นไม่มีจุดตรึง. ทฤษฎีบทของเบราเวอร์ต้องการเซตปลายทางที่กระชับ (หรือมีขอบเขตในมิติจำกัด); $\mathbb{R}$ ไม่กระชับและไม่มีขอบเขต.

4. ข้อความเป็นเท็จ. ให้ C เป็นลูกบอลหนึ่งหน่วยปิดใน ℓ^2 และ
$$F(x_1,x_2,\dots)=\big(\sqrt{1-\|x\|_2^2},x_1,x_2,\dots\big).$$
แล้ว $\|F(x)\|_2=1$ ทุก $x\in C$ และ F ต่อเนื่อง. ถ้า $F(x)=x$ องค์ประกอบทั้งหมดต้องเท่ากัน; ลำดับคงตัวใน ℓ^2 มีเพียง 0 แต่ $F(0)=(1,0,0,\dots)\neq 0$. จึงไม่มีจุดตรึง. ลูกบอลปิดในมิติอนันต์ไม่กระชับ.

5. ให้ $B=\{f:\|f\|_\infty\le 2\}$. บอลนี้ไม่ว่าง ปิด มีขอบเขต และคอนเวกซ์. สำหรับ $f\in B$,
$$|(Ff)(t)|\le 1+\frac{1}{2}\int_0^t |f(s)|\,ds\le 2,$$
จึง $F(B)\subset B$. อีกทั้ง
$$\|Ff-Fg\|_\infty\le \tfrac{1}{2}\|f-g\|_\infty,\qquad |(Ff)(t)-(Ff)(s)|\le|t-s|.$$
ดังนั้น F ต่อเนื่อง และภาพมีขอบเขตสม่ำเสมอกับต่อเนื่องเท่ากัน; ทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลีในบทว่าด้วยตัวดำเนินการกระชับให้ว่า $F(B)$ กระชับสัมพัทธ์. ทฤษฎีบทของชอเดอร์ให้จุดตรึง. จุดตรึงแก้ $f(t)=1+\frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds$; หาอนุพันธ์ได้ $f'=f/2$ และ $f(0)=1$ ดังนั้น $f(t)=e^{t/2}$. ที่ $t=1$, $f(1)=e^{1/2}=1.6487212707\le 2$.

6. $f(t,y)=\sqrt{|y|}$ ต่อเนื่องบน $[-1,1]\times[-1,1]$ และ $|f|\le 1$. ทฤษฎีบทเปอาโนจึงให้คำตอบบนช่วงสั้น. คำตอบสองคำตอบคือ $y(t)=0$ และ
$$y(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ t^2/4, & t>0.\end{cases}$$
ตรวจ: สำหรับ $t>0$, $y'=t/2$ และ $\sqrt{y}=t/2$; ที่ $t=0$ ทั้งสองข้างเป็น 0. คำตอบทั้งสองต่างกันบนทุกช่วง $(0,T]$.

7. เซต C ไม่ว่างเพราะ $0\in C$; อสมการ $0\le f\le 1$ คงอยู่ภายใต้ลิมิตเอกรูปและผลรวมนูน จึง C ปิดและคอนเวกซ์ อีกทั้ง $\|f\|_\infty\le 1$. สำหรับ $f\in C$, $0\le (Ff)(t)\le t\le 1$, จึง $F(C)\subset C$, และ $\|Ff-Fg\|_\infty\le\|f-g\|_\infty$ ทำให้ F ต่อเนื่อง. นอกจากนี้
$$|(Ff)(t)-(Ff)(s)|\le|t-s|,$$
และ $F(C)$ มีขอบเขตสม่ำเสมอ; ทฤษฎีบทอาร์เซลา–อาสโคลีให้ว่า $F(C)$ กระชับสัมพัทธ์. ทฤษฎีบทของชอเดอร์จึงให้จุดตรึง. ถ้า $f=Ff$, แล้ว $f(0)=0$ และ $f'=f$; คำตอบเดียวคือ $f\equiv 0$.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

12.3 คะแนนความสำคัญของหน้า: การทำซ้ำและความเร็วการลู่เข้า

สถานการณ์สมมติ: อันดับที่ยังขยับเมื่อตัวประกอบการหน่วงใกล้หนึ่ง

สมมติว่าเรามีห้าหน้าเว็บที่เชื่อมกันเป็นวงแหวน: หน้า 1 เชื่อมไปหน้า 2, หน้า 2 ไปหน้า 3, ไปเรื่อย ๆ จนถึงหน้า 5 ซึ่งเชื่อมกลับมาหน้า 1. เพิ่มเส้นลัดหนึ่งเส้นจากหน้า 5 ไปหน้า 3. โปรแกรมจัดอันดับเริ่มด้วยอันดับเท่า ๆ กัน แล้วทำซ้ำตามเส้นเชื่อม; ในแต่ละรอบ มันเดินตามเส้นเชื่อมด้วยความน่าจะเป็น α และกระโดดไปหน้าสุ่มด้วยความน่าจะเป็น $1-\alpha$.

เมื่อ $\alpha = 0.85$ คะแนนเริ่มนิ่งเร็วกว่า; เมื่อ $\alpha = 0.99$ คะแนนยังลดช้า. สำหรับการเริ่มจากคะแนนเท่ากันทุกหน้า ค่าตกค้าง $\|x_{k+1} - x_k\|_1$ ครั้งแรกต่ำกว่า 10^{-8} ที่ดัชนี $k = 185$. ในวงแหวนล้วน อัตราจริงเท่ากับ α; เมื่อมีเส้นลัด อัตราจริงเป็นค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่ใช่ 1 ที่มีโมดูลัสมากที่สุด ซึ่งต่ำกว่า α ในตัวอย่างนี้. ขอบเขตรับประกัน α เข้าใกล้ 1 เมื่อ $\alpha \to 1$, แต่อัตราจริงของกราฟยังขึ้นกับเส้นเชื่อม.

นี่เป็นสถานการณ์สมมติและเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวิธีที่รู้จักกันในชื่อคะแนนความสำคัญของหน้า. เราไม่ได้อ้างว่าเครื่องค้นหาใดในตลาดใช้พารามิเตอร์เหล่านี้หรือทำงานอย่างนี้จริง.

ภาพรวมก่อนอ่าน

ลองนึกถึงคนเดินสุ่มบนแผนที่ของหน้าเว็บ. เขาอยู่ที่หน้าหนึ่ง; ด้วยความน่าจะเป็น α เขาเลือกเส้นเชื่อมออกจากหน้านั้นหนึ่งเส้น และด้วยความน่าจะเป็น $1-\alpha$ เขากระโดดไปหน้าสุ่มทั่วแผนที่. ถ้าเดินแบบนี้ไปนาน ๆ ความน่าจะเป็นที่เขาจะอยู่ที่แต่ละหน้าจะนิ่งอยู่ที่ค่าหนึ่ง. ค่านั้นคืออันดับของหน้า. การทำซ้ำคือการจำลองการเดินทีละก้าว; ความเร็วของการลู่เข้าคือความเร็วที่การกระจายความน่าจะเป็นเข้าหาค่าที่นิ่ง.

นิยาม 12.3.1: เมทริกซ์สโทแคสติก เมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้า และการแจกแจงสถานะคงตัว

ให้ $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่ติดลบและทุกคอลัมน์มีผลรวมเท่ากับ 1. สำหรับเมทริกซ์เช่นนี้ เราใช้ชื่อ**เมทริกซ์สโทแคสติก** (stochastic matrix). ให้ $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^{\mathsf{T}}$, $E = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$ และ $\alpha \in [0, 1)$. เราเรียก

$$G = \alpha S + (1 - \alpha) E$$

ว่า**เมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้า** (PageRank matrix) โดยเรียก α ว่า**ตัวประกอบการหน่วง** (damping factor). เวกเตอร์ความน่าจะเป็น $\pi \in \mathbb{R}^n$ ที่ $\pi_i \geq 0$, $\sum_i \pi_i = 1$ และ

$$G\pi = \pi$$

เรียกว่า**การแจกแจงสถานะคงตัว** (stationary distribution) ของ G. องค์ประกอบของ π เป็นคะแนนความสำคัญของแต่ละหน้า; การคำนวณคะแนนเหล่านี้ด้วย**วิธีกำลัง** (power method) เริ่มจากเวกเตอร์ความน่าจะเป็น x_0 แล้วทำซ้ำ $x_{k+1} = G x_k$.

อ่านแบบเข้าใจง่าย

“สโทแคสติก” ในที่นี้หมายถึงผลรวมของแต่ละคอลัมน์เป็น 1: ถ้า x เป็นเวกเตอร์ความน่าจะเป็นของตำแหน่งปัจจุบัน

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

แล้ว Sx ก็เป็นเวกเตอร์ความน่าจะเป็นของตำแหน่งถัดไป. ตัวอย่างเช่น

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก เพราะคอลัมน์แรกบวกได้ 1 และคอลัมน์ที่สองบวกได้ 1. เมทริกซ์ E ทุกคอลัมน์เท่ากับ $1/n$; มันแทนการกระโดดไปหน้าสุ่มอย่างสม่ำเสมอ. ถ้า $\alpha = 0$ การทำซ้ำจะอยู่ที่ Ex_0 หลังหนึ่งก้าว; ถ้า α ใกล้ 1 การเดินเกือบทั้งหมดเป็นไปตามเส้นเชื่อม.

บทตั้ง 12.3.1: เมทริกซ์สโทแคสติกไม่เพิ่มนอร์มหนึ่ง

ให้ S เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก และ $x \in \mathbb{C}^n$. แล้ว

$$\|Sx\|_1 \le \|x\|_1.$$

ถ้า $\sum_i x_i = 0$ และ $G = \alpha S + (1-\alpha)E$ แล้ว

$$\|Gx\|_1 \le \alpha \|x\|_1.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** ใช้ความไม่เท่ากันสามเหลี่ยมกับแต่ละแถว; ความไม่เป็นลบและผลรวมของทุกคอลัมน์เป็น 1 ทำให้ดึงค่าสัมบูรณ์ขององค์ประกอบ x ออกมาได้.

1. **นอร์มหนึ่ง.** จาก $S_{ij} \ge 0$,

$$\|Sx\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} S_{ij} x_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1.$$

2. **การหดตัวบนปริภูมิผลรวมศูนย์.** ถ้า $\sum_i x_i = 0$ แล้ว $Ex = (1/n)\mathbf{1}(\mathbf{1}^{\mathsf{T}} x) = 0$. ดังนั้น $Gx = \alpha S x$ และ

$$\|Gx\|_1 = \alpha \|Sx\|_1 \le \alpha \|x\|_1.$$

สรุป: เมทริกซ์สโทแคสติกไม่เพิ่มนอร์มหนึ่ง; เมื่อตัดองค์ประกอบที่ผลรวมเป็นศูนย์ออก เมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้าหดนอร์มนั้นด้วย α. □

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ทฤษฎีบท 12.3.2: การมีอยู่และเอกลักษณ์ของการแจกแจงสถานะคงตัว

ให้ S เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก, $0 \le \alpha < 1$ และ $G = \alpha S + (1-\alpha)E$. แล้วมีเวกเตอร์ความน่าจะเป็น π ที่ $G\pi = \pi$ เพียงตัวเดียว.

พิสูจน์. **แนวคิด.** ซิมเพล็กซ์ความน่าจะเป็นเป็นเซตกระชับคอนเวกซ์ และ G ส่งมันเข้าตัวเอง; เบราเวอร์ให้การมีอยู่. ความเป็นเอกลักษณ์ตามมาจากการหดตัวบนปริภูมิผลรวมศูนย์.

1. G **ส่งซิมเพล็กซ์เข้าตัวเอง.** ให้
$$\Delta = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \ge 0,\ \sum_i x_i = 1 \Big\}.$$
เซต Δ ไม่ว่าง กระชับ คอนเวกซ์ และอยู่ในมิติจำกัด. ถ้า $x \in \Delta$ แล้ว $(Gx)_i \ge 0$ เพราะทุกองค์ประกอบของ G ไม่ติดลบ, และ
$$\sum_i (Gx)_i = \alpha \sum_i (Sx)_i + (1-\alpha)\sum_i (Ex)_i = \alpha \cdot 1 + (1-\alpha)\cdot 1 = 1.$$
จึง $Gx \in \Delta$.

2. **การมีอยู่.** $G\colon \Delta \to \Delta$ ต่อเนื่อง. ทฤษฎีบทของเบราเวอร์ 12.2.6 ให้ $\pi \in \Delta$ ที่ $G\pi = \pi$.

3. **เอกลักษณ์.** ให้ π, π' เป็นการแจกแจงสถานะคงตัวสองตัว และ $e = \pi - \pi'$. แล้ว $\sum_i e_i = 0$ และ $Ge = e$. จากบทตั้ง 12.3.1,
$$\|e\|_1 = \|Ge\|_1 \le \alpha \|e\|_1.$$
เพราะ $\alpha < 1$ จึง $\|e\|_1 = 0$ และ $\pi = \pi'$.

สรุป: เบราเวอร์ให้การมีอยู่ และการหดตัวด้วย $\alpha < 1$ ให้ความเป็นเอกลักษณ์. □

ทฤษฎีบท 12.3.3: การลู่เข้าของวิธีกำลังสำหรับคะแนนความสำคัญของหน้า

ให้ S เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก, $0 \le \alpha < 1$, $G = \alpha S + (1-\alpha)E$ และ π เป็นการแจกแจงสถานะคงตัว. สำหรับเวกเตอร์ความน่าจะเป็น x_0 ใด ๆ ให้ $x_k = G^k x_0$. แล้ว
$$\|x_k - \pi\|_1 \le 2\alpha^k, \qquad \|x_k - \pi\|_1 \le \frac{\|x_{k+1} - x_k\|_1}{1-\alpha}.$$

พิสูจน์. **แนวคิด.** เขียนความคลาดเคลื่อนเป็นเวกเตอร์ที่ผลรวมเป็นศูนย์; มันถูกหดด้วย α ทุกก้าว. ขอบเขตที่สองได้จากการเขียนความคลาดเคลื่อนเป็นอนุกรมของผลต่างระหว่างก้าว.

1. **ความคลาดเคลื่อนมีผลรวมศูนย์.** ให้ $e_k = x_k - \pi$. เพราะ x_k และ π ต่างเป็นเวกเตอร์ความน่าจะเป็น,
$$\sum_i (e_k)_i = 1 - 1 = 0.$$
นอกจากนี้
$$e_{k+1} = x_{k+1} - \pi = Gx_k - G\pi = Ge_k.$$

สปริงเกอร์ · Preprint · 2026-10-24

2. **ขอบเขตแรก.** จากบทตั้ง 12.3.1,
$$\|e_k\|_1 \le \alpha^k \|e_0\|_1.$$
เพราะ e_0 เป็นผลต่างของเวกเตอร์ความน่าจะเป็นสองตัว, $\|e_0\|_1 \le 2$. จึงได้ขอบเขตแรก.

3. **ขอบเขตจากผลต่างระหว่างก้าว.** ให้ $r_k = x_{k+1} - x_k = (G - I)e_k$. เพราะ $e_{k+m} = G^m e_k \to 0$ เมื่อ $m \to \infty$,
$$e_k = -\sum_{m=0}^{\infty} (e_{k+m+1} - e_{k+m}) = -\sum_{m=0}^{\infty} G^m r_k.$$
ใช้บทตั้งกับแต่ละเทอม,
$$\|e_k\|_1 \le \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m \|r_k\|_1 = \frac{\|r_k\|_1}{1-\alpha}.$$

สรุป: ความคลาดเคลื่อนหดด้วย α ทุกก้าว และผลต่างระหว่างสองก้าวที่เล็กพอรับประกันความคลาดเคลื่อนที่เล็กได้. □

ในทางปฏิบัติเราไม่รู้ π จึงหยุดเมื่อค่าตกค้าง $r_k = \|x_{k+1} - x_k\|_1$ เล็ก. ถ้าต้องการรับประกัน $\|x_k - \pi\|_1 \le \varepsilon$ ให้กำหนดเกณฑ์ $r_k \le (1-\alpha)\varepsilon$. ที่ $\varepsilon = 10^{-6}$ และเริ่มจาก $x_0 = e_1$, กราฟที่มีเส้นลัดมีดัชนีแรก $k = 69$ เมื่อ $\alpha = 0.85$ (ค่าคลาดเคลื่อนจริง 8.19×10^{-8}) และ $k = 216$ เมื่อ $\alpha = 0.99$ (ค่าคลาดเคลื่อนจริง 5.70×10^{-9}). ถ้าใช้เกณฑ์ $r_k \le 10^{-6}$ โดยไม่คูณ $(1-\alpha)$ ดัชนีแรกคือ 61 และ 164 ตามลำดับ; $k = 164$ หมายถึงค่าตกค้าง $\|x_{165} - x_{164}\|_1$ หลังคำนวณ 165 ก้าวจาก x_0. เกณฑ์นี้รับประกันค่าคลาดเคลื่อนอ่อนกว่าตามตัวคูณ $1/(1-\alpha)$.

ทฤษฎีบท 12.3.4: สเปกตรัมของเมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้าและอัตราเชิงเส้นกำกับ

ให้ $n \ge 2$, S เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก, $G = \alpha S + (1-\alpha)E$ กับ $0 \le \alpha < 1$, และให้ π เป็นเวกเตอร์ความน่าจะเป็นที่ $G\pi = \pi$. แล้ว

1. 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ G และมีความเรียบง่ายเชิงพีชคณิต; ค่าลักษณะเฉพาะอื่นทุกตัว λ มี $|\lambda| \le \alpha$. ดังนั้นรัศมีสเปกตรัมคือ $r(G) = 1$.

2. ถ้า G มีฐานลักษณะเฉพาะ $v_1 = \pi, v_2, \dots, v_n$ โดย $Gv_j = \lambda_j v_j$ และ $\lambda_1 = 1$, แล้วสำหรับเวกเตอร์ความน่าจะเป็น x_0 เขียน $x_0 - \pi = \sum_{j=2}^{n} c_j v_j$ และให้ $\rho_* = \max_{2 \le j \le n} |\lambda_j|$. แล้ว
$$x_k - \pi = \sum_{j=2}^{n} c_j \lambda_j^k v_j.$$
ถ้า $x_0 \ne \pi$, อัตราเชิงเส้นกำกับของจุดเริ่มต้นนี้คือ
$$\limsup_{k \to \infty} \|x_k - \pi\|_1^{1/k} = \max_{\substack{2 \le j \le n \\ c_j \ne 0}} |\lambda_j| \le \rho_* \le \alpha.$$
ถ้า $x_0 = \pi$, ความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ทุกก้าว. ค่า ρ_* เป็นอัตราเชิงสเปกตรัมกรณีเลวร้ายที่สุด; จุดเริ่มต้นที่ไม่มีองค์ประกอบในโหมดเด่นอาจลู่เข้าเร็วกว่า.

พิสูจน์. **แนวคิด.** เวกเตอร์ π ให้ทิศทางที่คงเดิมภายใต้ G. อีกด้านหนึ่ง ผลรวมคอลัมน์ของ G ทำให้ผลรวมพิกัดถูกอนุรักษ์; บนเวกเตอร์ที่ผลรวมเป็นศูนย์ การส่งจึงเหลือเพียง αS และถูกหดด้วย α.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

1. **ค่า 1.** จากทฤษฎีบท 12.3.2 มี $G\pi = \pi$ และ $\pi \neq 0$, ดังนั้น 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะขวาของ G. เพราะ S และ E เป็นเมทริกซ์สโทแคสติก,
$$\mathbf{1}^{\mathsf{T}} G = \mathbf{1}^{\mathsf{T}}.$$

2. **ค่าลักษณะเฉพาะอื่น.** ให้ $Gx = \lambda x$ กับ $\lambda \neq 1$ และ $x \in \mathbb{C}^n$. เมื่อนำ $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$ ไปคูณทั้งสองข้าง,
$$(1-\lambda)\mathbf{1}^{\mathsf{T}} x = 0.$$
ดังนั้น $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} x = 0$, $Ex = 0$ และ $Gx = \alpha S x$. บทตั้ง 12.3.1 ใช้กับเวกเตอร์เชิงซ้อนได้ จึงให้
$$|\lambda|\,\|x\|_1 = \|Gx\|_1 = \alpha \|Sx\|_1 \le \alpha \|x\|_1.$$
เมื่อ $x \neq 0$, ได้ $|\lambda| \le \alpha$.

3. **ความเรียบง่ายของค่า 1.** ถ้า $Gx = x$, ให้ $s = \mathbf{1}^{\mathsf{T}} x$ และ $y = x - s\pi$. แล้ว $\mathbf{1}^{\mathsf{T}} y = 0$ และ $Gy = y$. อสมการการหดตัวให้ $\|y\|_1 = \|Gy\|_1 \le \alpha \|y\|_1$, จึง $y = 0$; eigenspace ของ 1 จึงเป็น $\operatorname{span}\{\pi\}$. ถ้ามี Jordan chain ยาวกว่า 1, จะมี z และ $a \neq 0$ ที่ $(G - I)z = a\pi$. คูณซ้ายด้วย $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}$ ได้ $0 = a$, ขัดแย้ง. ดังนั้น 1 เรียบง่ายเชิงพีชคณิต.

4. **รัศมีสเปกตรัม.** ค่าลักษณะเฉพาะอื่นมีโมดูลัสไม่เกิน $\alpha < 1$ และค่า 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะ จึง $r(G) = 1$ ตามนิยามรัศมีสเปกตรัมของเมทริกซ์ (Werner 2007, นิยาม VI.1.5 และทฤษฎีบท VI.1.6).

5. **อัตราขึ้นกับโหมดที่ปรากฏ.** จาก $G = VDV^{-1}$ ได้ $G^k = VD^kV^{-1}$ (Iserles 2009, A.1.5.4). เนื่องจาก $\mathbf{1}^{\mathsf{T}}(x_0 - \pi) = 0$ และ eigenvectors ที่ $\lambda_j \neq 1$ มีผลรวมศูนย์, สัมประสิทธิ์ของ $v_1 = \pi$ เป็นศูนย์. สูตรข้างต้นจึงตามมา. ในฐานลักษณะเฉพาะ นอร์มของเวกเตอร์สมมูลกับค่าสูงสุดของโมดูลัสสัมประสิทธิ์; เมื่อยกกำลัง k และใช้ $\limsup$, โหมดที่มี $c_j \neq 0$ และ $|\lambda_j|$ ใหญ่สุดเป็นตัวกำหนดอัตรา.

สรุป: ค่า 1 เป็นค่าลักษณะเฉพาะเดี่ยว; โหมดอื่นหดด้วยอัตราไม่เกิน α. อัตราจริงของจุดเริ่มต้นหนึ่งขึ้นกับโหมดที่มีองค์ประกอบไม่เป็นศูนย์. □

ลองเอง: วงแหวนห้าหน้าที่ $\alpha = 1/2$

ให้ S เป็นเมทริกซ์ของวงแหวนห้าหน้า (หน้า i เชื่อมไปหน้า $i+1$ และหน้า 5 กลับมาหน้า 1). เมทริกซ์นี้เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของพิกัด และการแจกแจงสถานะคงตัวคือ $\pi = (1/5, \dots, 1/5)$. เริ่มที่ $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$. ความคลาดเคลื่อนเริ่มต้นมีนอร์มหนึ่ง
$$\|x_0 - \pi\|_1 = \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = 1.6.$$
เพราะ $Gx = \frac{1}{2} S x + \frac{1}{10}\mathbf{1}$ บนเวกเตอร์ความน่าจะเป็น และ S เพียงหมุนตำแหน่ง,
$$\|x_k - \pi\|_1 = 1.6 \cdot (0.5)^k.$$
ที่ $k = 10$ ค่าคือ 0.0015625; ที่ $k = 20$ ค่าคือ $1.52587890625 \times 10^{-6}$. ต้องใช้ 21 รอบเพื่อให้ต่ำกว่า 10^{-6} เพราะ $1.6 \cdot 0.5^{20} > 10^{-6}$ แต่ $1.6 \cdot 0.5^{21} < 10^{-6}$.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ลองเอง: กราฟสามหน้าโดยคำนวณมือ

หน้า 1 ชี้ไปหน้า 2, หน้า 2 ชี้ไปหน้า 3 และหน้า 3 ไม่มีเส้นออก. ตามกฎที่คอลัมน์ที่ไม่มีเส้นออกเป็น $1/3$,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

ที่ $\alpha = 1/2$ การแจกแจงสถานะคงตัวคือ

$$\pi = \left(\frac{4}{17}, \frac{6}{17}, \frac{7}{17}\right) = (0.2352941176,\ 0.3529411765,\ 0.4117647059);$$

ตรวจได้ว่า $G\pi = \pi$ และผลรวมขององค์ประกอบเป็น 1. เริ่มที่ $x_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$,

$$x_1 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{18}, \frac{7}{18}\right), \qquad x_2 = \left(\frac{25}{108}, \frac{37}{108}, \frac{23}{54}\right).$$

ค่าคลาดเคลื่อน $\|x_k - \pi\|_1$ ที่ $k = 0, 1, 2$ คือ 0.1960784314, 0.0718954248 และ 0.0283224401; ที่ $k = 10$ เหลือ 7.6724145×10^{-7}. ผลต่างระหว่างก้าวครั้งแรกที่ต่ำกว่า 10^{-6} เกิดที่ $k = 10$ เช่นกัน.

ลองเอง: วงแหวนที่มีเส้นลัด

เพิ่มเส้นเชื่อมจากหน้า 5 ไปหน้า 3 (นอกจากเส้นไปหน้า 1). ที่ $\alpha = 0.85$ การแจกแจงสถานะคงตัวคือ

$$\pi = (0.1303748031,\ 0.1408185826,\ 0.2500705983,\ 0.2425600086,\ 0.2361760073).$$

หน้าที่ 3 ได้อันดับสูงสุดเพราะมีเส้นเชื่อมเข้ามาจากหน้า 2 และจากเส้นลัดของหน้า 5. ที่ $\alpha = 0.99$,

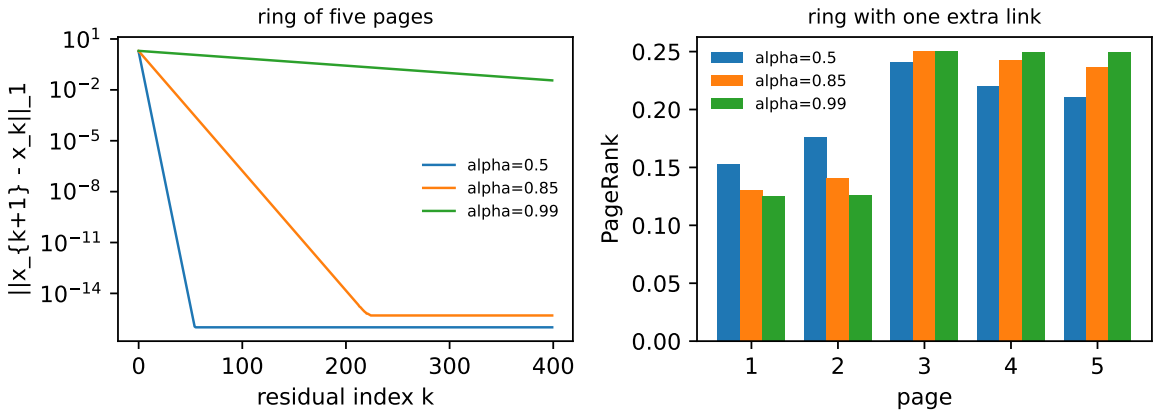
$$\pi = (0.1252861515,\ 0.1260332900,\ 0.2500591086,\ 0.2495585175,\ 0.2490629324).$$

อันดับของหน้า 4 กับหน้า 5 เกือบเท่ากัน เพราะเมื่อ α ใกล้ 1 การเดินตามเส้นเชื่อมมีน้ำหนักมากกว่าการกระโดดสุ่ม. ค่าลักษณะเฉพาะที่สองมีโมดูลัส 0.7843566129 ที่ $\alpha = 0.85$ และ 0.9135447609 ที่ $\alpha = 0.99$. ที่ $\alpha = 0.99$ ความคลาดเคลื่อนลดจาก $1.9046702856 \times 10^{-4}$ ที่รอบ 100 เหลือ $2.3286253712 \times 10^{-8}$ ที่รอบ 200; อัตราเฉลี่ยต่อรอบคือ 0.9138455433, ใกล้ค่าลักษณะเฉพาะที่สอง.

ข้อควรระวัง

สองจุดที่พลาดง่าย. อย่างแรก: $\alpha < 1$ จำเป็นสำหรับขอบเขตหดตัวที่พิสูจน์ไว้. ถ้า $\alpha = 1$ แล้ว $G = S$; บนวงแหวนห้าหน้า การทำซ้ำเพียงหมุนเวกเตอร์ไปเรื่อย ๆ และไม่ลู่เข้าถ้า x_0 ไม่สม่ำเสมอ. อย่างที่สอง: ขอบเขต $2\alpha^k$ เป็นขอบเขตที่รับประกันได้ทุกกราฟ ไม่ใช่อัตราจริงของทุกกราฟ. อัตราเชิงสเปกตรัมจริงคือโมดูลัสของค่าลักษณะเฉพาะที่ไม่ใช่ 1 ซึ่งใหญ่ที่สุดและไม่เกิน α; ในวงแหวนล้วนมีค่าเท่ากับ α, ส่วนกราฟที่มีเส้นลัดให้ค่า 0.7844 ที่ $\alpha = 0.85$ และ 0.9135 ที่ $\alpha = 0.99$. ค่านี้ไม่จำเป็นต้องเข้าใกล้ 1 เมื่อ $\alpha \to 1$; ขอบเขตรับประกัน α ต่างหากที่เข้าใกล้ 1. ถ้าต้องการทำนายจำนวนรอบ ให้ดูค่าลักษณะเฉพาะ ไม่ใช่ดูแค่ α.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24



รูปที่ 12.2: ซ้าย: ค่าตกค้าง $r_k = \|x_{k+1} - x_k\|_1$ ของวงแหวนห้าหน้าสำหรับ $\alpha = 0.5, 0.85, 0.99$; เส้นตรงบนสเกลลอการิทึมแสดงอัตราคงที่ และส่วนท้ายที่ระดับ 10^{-16} เป็นพื้นความคลาดเคลื่อนปัดเศษของการคำนวณ. ขวา: การแจกแจงสถานะคงตัวของกราฟที่มีเส้นลัดจากหน้า 5 ไปหน้า 3; เมื่อ α เพิ่มขึ้น คะแนนหน้า 1 และ 2 ลดลง, หน้า 3 เพิ่มขึ้นเมื่อ α เพิ่มจาก 0.5 ถึง 0.85 แล้วแทบคงที่, ส่วนหน้า 4 และ 5 เพิ่มขึ้น. ตัวเลขทั้งหมดมาจากโค้ดของบท.

สรุปใจความ

- เมื่อ $0 \le \alpha < 1$, มีเวกเตอร์ความน่าจะเป็น π เพียงตัวเดียวที่ $G\pi = \pi$.
- เบราเวอร์ให้การมีอยู่; การหดตัวบนปริภูมิผลรวมศูนย์ให้เอกลักษณ์.
- วิธีกำลังมีขอบเขต $\|x_k - \pi\|_1 \le 2\alpha^k$ และหยุดได้เมื่อ $r_k < (1-\alpha)\varepsilon$.
- อัตราจริงขึ้นกับกราฟและโหมดของจุดเริ่มต้น; อัตราเลวร้ายที่สุด $\rho_* = \max_{\lambda \ne 1} |\lambda| \le \alpha$, จึงอาจลู่เข้าเร็วกว่า α. ขอบเขตรับประกัน α เข้าใกล้ 1 เมื่อ $\alpha \to 1$.

แบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. **(ตรวจเมทริกซ์)** ให้กราฟสามหน้ามีเส้นเชื่อม $1 \to 2$, $2 \to 3$ และหน้า 3 ไม่มีเส้นออก. จงเขียนเมทริกซ์สโทแคสติก S ตามกฎที่คอลัมน์ที่ไม่มีเส้นออกเป็น $1/3$ และตรวจว่าทุกคอลัมน์บวกได้ 1.

2. **(คำนวณมือ)** สำหรับวงแหวนห้าหน้าและ $\alpha = 1/2$ เริ่มที่ $x_0 = (1,0,0,0,0)$. จงหา x_1, x_2, x_3 และ $\|x_k - \pi\|_1$ สำหรับ $k = 1,2,3$; ตรวจว่าตรงกับ $1.6(0.5)^k$.

3. **(นอร์มหนึ่งและผลรวมศูนย์)** จงพิสูจน์ว่า $\|Sx\|_1 \le \|x\|_1$ สำหรับเมทริกซ์สโทแคสติก S และยกตัวอย่างที่อสมการเข้มงวด. จากนั้นแสดงว่าถ้า $\sum_i x_i = 0$ แล้ว $Ex = 0$ และ $Gx = \alpha S x$.

4. **(จำนวนรอบ)** ใช้ขอบเขต $2\alpha^k \le 10^{-6}$ หาจำนวนรอบสำหรับ $\alpha = 0.5, 0.85, 0.99$. เปรียบเทียบกับค่าจริงของวงแหวนที่มีเส้นลัดที่ $\alpha = 0.99$ ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน $2.3286253712 \times 10^{-8}$ ที่รอบ 200.

5. **(ข้อความจริงหรือเท็จ)** จงตัดสินข้อความ “ถ้า $\alpha = 1$ วิธีกำลังลู่เข้าทุกกราฟ” และ “อัตราการลู่เข้าคือ $1 - \alpha$” พร้อมเหตุผลหรือตัวอย่างค้าน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. **(ใช้โค้ด)** ใช้ `pagerank_errors` และ `pagerank_eigenvalues` กับวงแหวนที่มีเส้นลัดที่ $\alpha = 0.85$. จงรายงานค่าลักษณะเฉพาะที่สอง ค่าคลาดเคลื่อนที่รอบ 50 และ 100 และอัตราเฉลี่ยต่อรอบ; เปรียบเทียบกับ α.

7. **(ใช้โค้ด: วงแหวน)** ใช้ `pagerank_errors` และ `pagerank_eigenvalues` กับวงแหวนห้าหน้าที่ $\alpha = 0.5$. จงรายงานค่าคลาดเคลื่อนที่รอบ 10 และ 20 และตรวจว่าอัตราส่วนตรงกับ α หรือไม่.

เฉลยแบบฝึกหัด (ผู้เรียบเรียง)

1. คอลัมน์ที่ 1: หน้า 1 ชี้ไปหน้า 2 จึงมี 1 ที่แถว 2; คอลัมน์ที่ 2: หน้า 2 ชี้ไปหน้า 3 จึงมี 1 ที่แถว 3; คอลัมน์ที่ 3: หน้า 3 ไม่มีเส้นออก จึงเป็น $1/3$ ทุกแถว. ดังนั้น

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

ผลรวมคอลัมน์คือ $1, 1, 1$ ตามต้องการ.

2. จาก $Sx_0 = (0, 1, 0, 0, 0)$ และ $Gx = \frac{1}{2}Sx + \frac{1}{10}\mathbf{1}$,

$$x_1 = (0.1, 0.6, 0.1, 0.1, 0.1), \quad x_2 = (0.15, 0.15, 0.4, 0.15, 0.15),$$
$$x_3 = (0.175, 0.175, 0.175, 0.3, 0.175).$$

เพราะ $\pi = (0.2, \ldots, 0.2)$,

$$\|x_1 - \pi\|_1 = 0.8, \quad \|x_2 - \pi\|_1 = 0.4, \quad \|x_3 - \pi\|_1 = 0.2,$$

ตรงกับ $1.6(0.5)^k$ สำหรับ $k = 1, 2, 3$.

3. จาก $S_{ij} \geq 0$ และ $\sum_i S_{ij} = 1$,

$$\|Sx\|_1 \leq \sum_j |x_j| \sum_i S_{ij} = \|x\|_1.$$

ตัวอย่าง strict: $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ และ $x = (1, -1)$ ให้ $Sx = 0$. ถ้า $\sum_i x_i = 0$, แล้ว

$$Ex = \frac{1}{n}\mathbf{1}(\mathbf{1}^{\mathsf{T}}x) = 0, \qquad Gx = \alpha Sx + (1-\alpha)Ex = \alpha Sx.$$

4. จาก $2\alpha^k \leq 10^{-6}$,

$$k \geq \frac{\log(10^{-6}/2)}{\log \alpha}.$$

ที่ $\alpha = 0.5$ ได้ 21; ที่ $\alpha = 0.85$ ได้ 90; ที่ $\alpha = 0.99$ ได้ 1444. ที่ $\alpha = 0.99$ ค่าจริงของวงแหวนที่มีเส้นลัดถึง 2.33×10^{-8} ภายในรอบ 200 เพราะอัตราจริงคือค่าลักษณะเฉพาะที่สอง 0.9135 ไม่ใช่ 0.99. ขอบเขตจึงปลอดภัยแต่ไม่คม.

5. ข้อแรกเป็นเท็จ: ที่ $\alpha = 1$ และวงแหวนห้าหน้า เริ่มที่ $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ลำดับคือการหมุนเวกเตอร์ไปเรื่อย ๆ ไม่ลู่เข้า. ข้อที่สองเป็นเท็จ: อัตราการลู่เข้าคือ α หรือค่าลักษณะเฉพาะที่สองซึ่งมีโมดูลัสไม่เกิน α ไม่ใช่ $1 - \alpha$. ที่ $\alpha = 0.5$ ค่าทั้งสองบังเอิญเท่ากันที่ 0.5 จึงดูเหมือนถูกเฉพาะกรณีนี้; ที่ $\alpha = 0.85$ อัตราคือ 0.85 (หรือเล็กกว่า) แต่ $1 - \alpha = 0.15$ ซึ่งผิดชัดเจน.

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

6. จากโค้ด: ค่าลักษณะเฉพาะที่สองมีโมดูลัส 0.7843566129; ความคลาดเคลื่อนที่รอบ 50 คือ $8.1906297604 \times 10^{-6}$ และที่รอบ 100 คือ $4.5412368955 \times 10^{-11}$. อัตราเฉลี่ยต่อรอบคือ

$$\left(\frac{4.5412368955 \times 10^{-11}}{8.1906297604 \times 10^{-6}}\right)^{1/50} = 0.7850135214,$$

ใกล้ 0.7843566129 และน้อยกว่า $\alpha = 0.85$.

7. สำหรับวงแหวนล้วน $\pi = (1/5, \dots, 1/5)$ และ $E(x_k - \pi) = 0$. จาก $G = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}E$ จึงได้

$$x_{k+1} - \pi = \tfrac{1}{2}S(x_k - \pi), \qquad x_k - \pi = 2^{-k}S^k(x_0 - \pi).$$

เมทริกซ์ S เพียงสับเปลี่ยนพิกัด จึงรักษานอร์มหนึ่ง. เมื่อ $x_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$,

$$\|x_0 - \pi\|_1 = \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1.6, \qquad e_k = \|x_k - \pi\|_1 = 2^{-k}\|x_0 - \pi\|_1 = 1.6(0.5)^k.$$

จากสูตรเดียวกันคำนวณได้

$$e_{10} = \frac{8}{5}\,2^{-10} = \frac{1}{640} = 0.0015625, \qquad e_{20} = \frac{8}{5}\,2^{-20} = \frac{1}{655360} = 1.52587890625 \times 10^{-6}.$$

ดัชนีทั้งสองห่างกัน 10 ก้าว; อัตราต่อก้าวจึงเป็นรากที่สิบของอัตราส่วนนี้:

$$\frac{e_{20}}{e_{10}} = \frac{(8/5)2^{-20}}{(8/5)2^{-10}} = 0.0009765625 = (0.5)^{10}, \qquad \left(\frac{e_{20}}{e_{10}}\right)^{1/10} = 0.5 = \alpha.$$

นอกจากนี้ $e_{20} > 10^{-6}$ แต่ $e_{21} = 7.62939453125 \times 10^{-7} < 10^{-6}$ จึงต้องใช้ 21 ก้าวจึงผ่านเกณฑ์นี้.

สูตรสรุป

- บานาค: $d(Fx, Fy) \le q\,d(x, y)$, $q < 1 \Rightarrow$ จุดตรึงเดียว, $d(x_n, \xi) \le \frac{q^n}{1-q}d(x_1, x_0)$.
- การส่งไม่ขยาย: $q = 1$; ต้องมีลำดับจุดตรึงโดยประมาณและภาพกระชับสัมพัทธ์จึงได้จุดตรึง.
- เบราเวอร์: C กระชับคอนเวกซ์ในมิติจำกัด, $F\colon C \to C$ ต่อเนื่อง $\Rightarrow$ จุดตรึง.
- ชอเดอร์: C กระชับคอนเวกซ์ในปริภูมินอร์ม หรือ F กระชับบนเซตปิด มีขอบเขต คอนเวกซ์ในปริภูมิบานาค $\Rightarrow$ จุดตรึง.
- คะแนนความสำคัญของหน้า: $G = \alpha S + (1-\alpha)E$, $\|Gx\|_1 \le \alpha\|x\|_1$ บนผลรวมศูนย์, $\|x_k - \pi\|_1 \le 2\alpha^k$, $r(G) = 1$.

อ่านต่อ

บทนี้จบหนังสือเล่มนี้ แต่ความคิดเรื่องจุดตรึงยังไปต่อได้อีกหลายทาง. ผู้อ่านที่สนใจการมีอยู่ของคำตอบโดยไม่มีการหดตัวอาจอ่านทฤษฎีบทของชอเดอร์และเลเรย์–ชอเดอร์ใน Werner 2007 บทที่ IV.7, หรือทฤษฎีบทจุดตรึงแบบเมตริก เช่น ไวสซิงเงอร์และคาริสตีในบทเดียวกัน. ผู้อ่านที่สนใจการจัดอันดับและแนวเดินแบบสุ่มอาจต่อด้วยทฤษฎีมาร์คอฟและวิธีเชิงตัวเลขสำหรับค่าลักษณะเฉพาะ; แบบจำลองคะแนนความสำคัญของหน้าในบทนี้เป็นเพียงจุดเริ่มต้น ไม่ใช่รายละเอียดของระบบค้นหาจริง. ทางหนึ่งที่ธรรมชาติที่สุดคือกลับไปที่สมการเชิงอนุพันธ์และสมการปริพันธ์ แล้วถามว่าเมื่อใดการส่งที่นิยามจากสมการเหล่านั้นเป็นการหดตัวหรือการส่งกระชับ.

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-24

ดรรชนี (ไทย – English)

กรวยที่มียอดที่ 0 (cone with apex 0), 232
กระชับ (compact), 31
กระชับสัมพัทธ์ (relatively compact), 243
กระชับเชิงลำดับแบบอ่อน (weakly sequentially compact), 214
กราฟ (graph), 191
กราฟถ่วงน้ำหนัก (weighted graph), 299
การฉาย (projection), 185
การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection), 74
การฉายเชิงเส้น (linear projection), 95
การทำให้คมชัด (sharpening), 138
การทำให้บริบูรณ์ (completion), 30
การประกอบ (assembly), 346
การฝังตัว (embedding), 167
การยกข้อมูลขอบ (lifting), 364
การลดเสียงรบกวน (denoising), 103
การวัด (measure), 52
การวัดนับ (counting measure), 61
การวัดปรกติ (regular measure), 174
การวัดสเปกตรัม (spectral measure), 287
การวัดโบเรลค่าใน $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-valued Borel measure), 174
การส่งกระชับ (compact map), 390
การส่งผลหาร (quotient map), 145
การส่งสมมิติ (isometric mapping), 30
การส่งเปิด (open map), 188
การส่งไม่ขยาย (nonexpansive map), 378
การหดตัว (contraction), 378
การเติมเต็มภาพ (image inpainting), 368
การแจกแจงสถานะคงตัว (stationary distribution), 395
การแบ่งสามเหลี่ยม (triangulation), 348
การแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด (quasi-uniform triangulation), 357
การแบ่งส่วนหนึ่ง (partition of unity), 69
การแบ่งแบบยอมรับได้ (admissible triangulation), 349
การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transformation), 308
การแปลงสัมพรรค (affine map), 355
กำลังสองน้อยที่สุด (least squares), 100
กึ่งต่อเนื่องล่าง (lower semicontinuous), 215
กึ่งนอร์ม (seminorm), 6
กึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite), 7
กึ่งเมตริก (semimetric), 6
ขอบลิพชิทซ์ (Lipschitz boundary), 232
คลื่นสี่เหลี่ยม (square wave), 204
ความกระชับ (compactness), 308
ความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation), 30
คอนดิชันนัมเบอร์ (condition number), 102
คะแนนความสำคัญของหน้า (PageRank), 376
คำตอบแบบอ่อน (weak solution), 338
ค่าคงตัวการหดตัว (contraction constant), 378
ค่าคงตัวเลอเบก (Lebesgue constant), 179
ค่าคงที่ลิพชิทซ์ (Lipschitz constant), 47
ค่าคงที่โฮลเดอร์ (Hölder constant), 47
ค่าตกค้าง (residual), 100
ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue), 253
ค่าเฉลี่ยเฟเยร์ (Fejér mean), 179
ค่าเทรซ (trace value), 332
ค่าเอกฐาน (singular value), 263
จาโคเบียน (Jacobian), 65
จุดตรึง (fixed point), 378
ฉาบ (cymbal), 107
ชิ้นอ้างอิง (reference element), 355
ซิกมาแอลจีบรา (σ-algebra), 52

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ซูพรีมัมนอร์ม (supremum norm), 39
ซูพรีมัมนอร์มแท้ (essential supremum norm), 53
ฐานออเออร์บัค (Auerbach basis), 207
ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis), 109
ดัชนีเฟรดโฮล์ม (Fredholm index), 254
ดิสทริบิวชัน (distribution), 307
ดิสทริบิวชันปรกติ (regular distribution), 310
ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ด (tempered distribution), 313
ดิสทริบิวชันเอกฐาน (singular distribution), 311
ดิแรกเดลตา (Dirac delta), 311
ตัวดำเนินการกระชับ (compact operator), 243
ตัวดำเนินการคูณ (multiplication operator), 288
ตัวดำเนินการฉาย (projection operator), 96
ตัวดำเนินการปิด (closed operator), 191
ตัวดำเนินการผูกพัน (adjoint), 98
ตัวดำเนินการผูกพันในตัว (self-adjoint), 98
ตัวดำเนินการมีขอบเขต (bounded operator), 139
ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล (Dirichlet Laplacian), 295
ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ (graph Laplacian), 274
ตัวดำเนินการสมมาตร (symmetric operator), 291
ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ (Hilbert--Schmidt operator), 264
ตัวดำเนินการเชิงเส้น (linear operator), 139
ตัวดำเนินการเทรซ (trace operator), 332
ตัวดำเนินการเป็นบวก (positive operator), 277
ตัวดำเนินการเฟรดโฮล์ม (Fredholm operator), 254
ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต (unbounded operator), 291
ตัวประกอบการหน่วง (damping factor), 395
ตัวรองรับ (support), 46
ตัวรองรับกระชับ (compact support), 308
ตัวแทนต่อเนื่อง (continuous representative), 308
ต่อเนื่อง (continuous), 19
ต่อเนื่องเท่ากัน (equicontinuous), 246
ต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์ (Hölder continuous), 47
ทรงกลมหน่วย (unit sphere), 31
ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเอกทิศของเบปโป เลวี (Beppo Levi theorem), 57
ทฤษฎีบทของฟูบินี (Fubini's theorem), 64
ทฤษฎีบทของโทเนลลี (Tonelli's theorem), 64
ทฤษฎีบทหลักสามข้อ (principal theorems), 179
ทฤษฎีบทเรลลิช (Rellich theorem), 326
ทอพอโลยี (topology), 15
ทอพอโลยีอ่อน-ดาว (weak-* topology), 217
ทุกที่ไม่หนาแน่น (nowhere dense), 181
นอร์ม (norm), 2
นอร์มของตัวดำเนินการ (operator norm), 141
นอร์มค่าสูงสุด (maximum norm), 4
นอร์มผลบวก (sum norm), 4
นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์ (Hilbert--Schmidt norm), 264
นอร์มแบบยุคลิด (Euclidean norm), 4
บทตั้งของฟาตู (Fatou's lemma), 59
บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม (Lax--Milgram lemma), 336
บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต (Bramble--Hilbert lemma), 357
บริบูรณ์ (complete), 27
บวกแน่นอน (positive definite), 7
บอล (ball), 13
บอลหนึ่งหน่วย (unit ball), 13
บอลเปิด (open ball), 13
ปรกติ (normal), 98
ปรากฏการณ์กิบส์ (Gibbs phenomenon), 201
ปริภูมิการวัด (measure space), 52
ปริภูมิกึ่งนอร์ม (seminormed space), 6
ปริภูมิคู่ (dual space), 149
ปริภูมิชวาร์ตซ์ (Schwartz space), 313
ปริภูมินอร์ม (normed space), 6
ปริภูมิบานาค (Banach space), 28
ปริภูมิผลคูณภายใน (inner product space), 75
ปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต (pre-Hilbert space), 7
ปริภูมิย่อย (subspace), 9
ปริภูมิย่อยคงตัว (invariant subspace), 253
ปริภูมิย่อยที่มีส่วนเติมเต็ม (complemented subspace), 206
ปริภูมิย่อยสัมพรรค (affine subspace), 234
ปริภูมิลักษณะเฉพาะ (eigenspace), 253
ปริภูมิลำดับ (sequence space), 28
ปริภูมิสะท้อนกลับ (reflexive space), 222
ปริภูมิอิงระยะทาง (metric space), 6
ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space), 28
ปริภูมิเชิงทอพอโลยี (topological space), 15

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space), 3
ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff space), 15
ปริภูมิแบบจำลอง (model subspace), 74
ปริภูมิโซโบเลฟ (Sobolev space), 307
ปริภูมิโฮลเดอร์ (Hölder space), 326
ปริภูมิไบดูอัล (bidual space), 214
ปัญหาผูกพัน (adjoint problem), 355
ผลการแปลงฟูเรียร์วิยุต (discrete Fourier transform, DFT), 127
ผลคูณภายใน (inner product), 2
ผลบวกตรง (direct sum), 9
ผลบวกย่อย (partial sum), 179
ผลบวกฮาร์มอนิก (harmonic sum), 198
พหุดัชนี (multi-index), 44
พหุนามตรีโกณมิติ (trigonometric polynomial), 203
พหุนามเป็นชิ้นดีกรีไม่เกิน k (piecewise polynomial), 349
พิกเซล (pixel), 2
พิสัย (range), 165
ฟอร์มเชิงเส้นคู่ (bilinear form), 336
ฟอร์มเซสควิลิเนียร์ (sesquilinear form), 7
ฟอร์มแอร์มีต (Hermitian form), 7
ฟังก์ชันขั้นบันได (step function), 60
ฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex function), 86
ฟังก์ชันตัดตอน (cut-off function), 321
ฟังก์ชันทดสอบ (test function), 46
ฟังก์ชันที่วัดได้ (measurable function), 52
ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์ (sublinear functional), 161
ฟังก์ชันนัลพลังงาน (energy functional), 230
ฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี (Minkowski functional), 170
ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง (continuous linear functional), 149
ฟังก์ชันรูปหมวก (hat function), 319
ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (harmonic function), 368
ฟังก์ชันเรโซลเวนต์ (resolvent), 252
ภายใน (interior), 14
ภาวะเอกพันธุ์ (homogeneity), 6
มอดุลัสความต่อเนื่อง (modulus of continuity), 330
มิติรอง (codimension), 91
มีขอบเขต (bounded), 13
รอยเมทริกซ์ (trace), 102
ระนาบเกิน (hyperplane), 170
ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal system), 108
ระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์ (complete orthonormal system), 109
ระยะทาง (distance), 6
ระยะทางระหว่างเซต (distance between sets), 13
รากที่ N ของหนึ่ง (root of unity), 127
รูปแบบอ่อน (weak form), 336
ลำดับดิแรก (Dirac sequence), 65
ลำดับดิแรกมาตรฐาน (standard Dirac sequence), 65
ลำดับมุ่งต่ำสุด (minimising sequence), 227
ลำดับโคชี (Cauchy sequence), 22
ลำดับโคชีแบบอ่อน (weak Cauchy sequence), 214
ลิมซูพีเรียม (limsup), 59
ลิมิต (limit), 18
ลู่เข้า (converge), 18
ลู่เข้าแบบอ่อน (weakly convergent), 213
ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาว (weak-* convergent), 213
วิธีกาเลอคิน (Galerkin method), 336
วิธีกำลัง (power method), 395
วิธีคอนฟอร์มมิง (conforming method), 352
วิธีตรงของแคลคูลัสของการแปรผัน (direct method of the calculus of variations), 230
วิธีสมาชิกจำกัด (finite element method), 336
วิธีหลายกริด (multigrid method), 372
สมการปรกติ (normal equations), 95
สมบัติการประมาณ (approximation property), 337
สมมูล (equivalent), 16
สมสัณฐาน (isomorphism), 145
สังวัตนาการ (convolution), 39
สัญญาณรบกวน (noise), 138
สัมประสิทธิ์ DFT (DFT coefficient), 127
สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier coefficient), 122
สเปกตรัม (spectrum), 252
สเปกตรัมจุด (point spectrum), 253
สเปกตรัมต่อเนื่อง (continuous spectrum), 253
สเปกตรัมส่วนที่เหลือ (residual spectrum), 253
ส่วนปิดคลุม (closure), 14
ส่วนเติมเต็มปิด (closed complement), 206

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก (orthogonal complement), 9
หนาแน่น (dense), 30
หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง (continuously differentiable), 44
อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series), 122
อนุพันธ์อ่อน (weak derivative), 307
อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน (distributional derivative), 312
อสมการปวงกาเร (Poincaré inequality), 230
อสมการมินคอฟสกี (Minkowski's inequality), 54
อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality), 7
อสมการเบสเซล (Bessel inequality), 107
อสมการแปรผัน (variational inequality), 234
อสมการโคชี–ชวาร์ซ (Cauchy–Schwarz inequality), 8
อัตราบิต (bitrate), 107
อันดับเต็มคอลัมน์ (full column rank), 100
อินฟิมัม (infimum), 32
เกือบทุกแห่ง (almost everywhere), 52
เคอร์เนล (kernel), 165
เคอร์เนลดีรีเคล (Dirichlet kernel), 197
เคอร์เนลปริพันธ์ (integral kernel), 248
เคอร์เนลสังวัตนาการ (convolution kernel), 154
เคอร์เนลเฟเยร์ (Fejér kernel), 202
เงื่อนไขขอบแบบดีรีเคล (Dirichlet condition), 295
เงื่อนไขมุมมากสุด (maximal angle condition), 357
เชิงตั้งฉาก (orthogonal), 9
เชิงวงรีเอกรูป (uniformly elliptic), 338
เซตคอนเวกซ์ (convex set), 86
เซตดูดกลืน (absorbing set), 170
เซตปิด (closed set), 14
เซตหมวดหมู่ที่สอง (set of second category), 181
เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง (set of first category), 181
เซตเปิด (open set), 14
เซตเรโซลเวนต์ (resolvent set), 252
เซตแยกกันได้ (separable set), 52
เทคนิคออบิน–นิทเชอ (Aubin--Nitsche technique), 355
เปลือกหุ้มคอนเวกซ์ (convex hull), 86
เมตริก (metric), 2
เมตริกเฟรเชต์ (Fréchet metric), 10
เมทริกซ์การออกแบบ (design matrix), 100
เมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้า (PageRank matrix), 395
เมทริกซ์สติฟเนส (stiffness matrix), 346
เมทริกซ์สติฟเนสเฉพาะชิ้น (element stiffness matrix), 370
เมทริกซ์สโทแคสติก (stochastic matrix), 395
เลขชี้กำลังสังยุค (conjugate exponent), 55
เลขโซโบเลฟ (Sobolev number), 328
เวกเตอร์ (vector), 3
เวกเตอร์ฟีดเลอร์ (Fiedler vector), 300
เวกเตอร์ภาระ (load vector), 346
เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (eigenvector), 253
เส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter), 13
เอกซ์ฮอสชัน (exhaustion), 44
เอกรูป (uniform), 19
เอกลักษณ์ปาร์เซวาล (Parseval identity), 107
เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram identity), 8
เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน (polarization identity), 81
แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน (functional calculus), 274
แรงกว่าหรือละเอียดกว่า (stronger or finer), 16
แอนนิฮิเลเตอร์ (annihilator), 165
โคเออร์ซีฟ (coercive), 340
โดเมน (domain), 291
โหมดสั่น (standing mode), 302

ฉบับร่าง . Preprint . 2026-10-24

ดรรชนี (English – ไทย)

$\mathbb{K}$-valued Borel measure (การวัดโบเรลค่าใน $\mathbb{K}$), 174
σ-algebra (ซิกมาแอลจีบรา), 52

absorbing set (เซตดูดกลืน), 170
adjoint (ตัวดำเนินการผูกพัน), 98
adjoint problem (ปัญหาผูกพัน), 355
admissible triangulation (การแบ่งแบบยอมรับได้), 349
affine map (การแปลงสัมพรรค), 355
affine subspace (ปริภูมิย่อยสัมพรรค), 234
almost everywhere (เกือบทุกแห่ง), 52
annihilator (แอนนิฮิเลเตอร์), 165
approximation property (สมบัติการประมาณ), 337
assembly (การประกอบ), 346
Aubin--Nitsche technique (เทคนิคออบิน–นิทเชอ), 355
Auerbach basis (ฐานออเออร์บัค), 207

ball (บอล), 13
Banach space (ปริภูมิบานาค), 28
Beppo Levi theorem (ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเอกทิศของเบปโป เลวี), 57
Bessel inequality (อสมการเบสเซล), 107
bidual space (ปริภูมิไบดูอัล), 214
bilinear form (ฟอร์มเชิงเส้นคู่), 336
bitrate (อัตราบิต), 107
bounded (มีขอบเขต), 13
bounded operator (ตัวดำเนินการมีขอบเขต), 139
Bramble--Hilbert lemma (บทตั้งแบรมเบิล–ฮิลเบิร์ต), 357

Cauchy sequence (ลำดับโคชี), 22
Cauchy–Schwarz inequality (อสมการโคชี–ชวาร์ซ), 8
closed complement (ส่วนเติมเต็มปิด), 206
closed operator (ตัวดำเนินการปิด), 191
closed set (เซตปิด), 14
closure (ส่วนปิดคลุม), 14
codimension (มิติรอง), 91
coercive (โคเออร์ซีฟ), 340
compact (กระชับ), 31
compact map (การส่งกระชับ), 390
compact operator (ตัวดำเนินการกระชับ), 243
compact support (ตัวรองรับกระชับ), 308
compactness (ความกระชับ), 308
complemented subspace (ปริภูมิย่อยที่มีส่วนเติมเต็ม), 206
complete (บริบูรณ์), 27
complete orthonormal system (ระบบเชิงตั้งฉากปรกติบริบูรณ์), 109
completion (การทำให้บริบูรณ์), 30
condition number (คอนดิชันนัมเบอร์), 102
cone with apex 0 (กรวยที่มียอดที่ 0), 232
conforming method (วิธีคอนฟอร์มมิง), 352
conjugate exponent (เลขชี้กำลังสังยุค), 55
continuous (ต่อเนื่อง), 19
continuous linear functional (ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นต่อเนื่อง), 149
continuous representative (ตัวแทนต่อเนื่อง), 308
continuous spectrum (สเปกตรัมต่อเนื่อง), 253
continuously differentiable (หาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่อง), 44
contraction (การหดตัว), 378
contraction constant (ค่าคงตัวการหดตัว), 378
converge (ลู่เข้า), 18
convex function (ฟังก์ชันคอนเวกซ์), 86
convex hull (เปลือกหุ้มคอนเวกซ์), 86

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

convex set (เซตคอนเวกซ์), 86
convolution (สังวัตนาการ), 39
convolution kernel (เคอร์เนลสังวัตนาการ), 154
counting measure (การวัดนับ), 61
cut-off function (ฟังก์ชันตัดตอน), 321
cymbal (ฉาบ), 107

damping factor (ตัวประกอบการหน่วง), 395
denoising (การลดเสียงรบกวน), 103
dense (หนาแน่น), 30
design matrix (เมทริกซ์การออกแบบ), 100
DFT coefficient (สัมประสิทธิ์ DFT), 127
diameter (เส้นผ่านศูนย์กลาง), 13
Dirac delta (ดิแรกเดลตา), 311
Dirac sequence (ลำดับดิแรก), 65
direct method of the calculus of variations (วิธีตรงของแคลคูลัสของการแปรผัน), 230
direct sum (ผลบวกตรง), 9
Dirichlet condition (เงื่อนไขขอบแบบดีรีเคล), 295
Dirichlet kernel (เคอร์เนลดีรีเคล), 197
Dirichlet Laplacian (ตัวดำเนินการลาปลาซดีรีเคล), 295
discrete Fourier transform, DFT (ผลการแปลงฟูเรียร์วิยุต), 127
distance (ระยะทาง), 6
distance between sets (ระยะทางระหว่างเซต), 13
distribution (ดิสทริบิวชัน), 307
distributional derivative (อนุพันธ์เชิงดิสทริบิวชัน), 312
domain (โดเมน), 291
dual space (ปริภูมิคู่), 149

eigenspace (ปริภูมิลักษณะเฉพาะ), 253
eigenvalue (ค่าลักษณะเฉพาะ), 253
eigenvector (เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ), 253
element stiffness matrix (เมทริกซ์สติฟเนสเฉพาะชิ้น), 370
embedding (การฝังตัว), 167
energy functional (ฟังก์ชันนัลพลังงาน), 230
equicontinuous (ต่อเนื่องเท่ากัน), 246
equivalence relation (ความสัมพันธ์สมมูล), 30
equivalent (สมมูล), 16
essential supremum norm (ซูพรีมัมนอร์มแท้), 53
Euclidean norm (นอร์มแบบยุคลิด), 4
exhaustion (เอกซ์ฮอสชัน), 44

Fatou's lemma (บทตั้งของฟาตู), 59
Fejér kernel (เคอร์เนลเฟเยร์), 202
Fejér mean (ค่าเฉลี่ยเฟเยร์), 179
Fiedler vector (เวกเตอร์ฟีดเลอร์), 300
finite element method (วิธีสมาชิกจำกัด), 336
fixed point (จุดตรึง), 378
Fourier coefficient (สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์), 122
Fourier series (อนุกรมฟูเรียร์), 122
Fourier transformation (การแปลงฟูเรียร์), 308
Fredholm index (ดัชนีเฟรดโฮล์ม), 254
Fredholm operator (ตัวดำเนินการเฟรดโฮล์ม), 254
Fréchet metric (เมตริกเฟรเชต์), 10
Fubini's theorem (ทฤษฎีบทของฟูบินี), 64
full column rank (อันดับเต็มคอลัมน์), 100
functional calculus (แคลคูลัสเชิงฟังก์ชัน), 274

Galerkin method (วิธีกาเลอคิน), 336
Gibbs phenomenon (ปรากฏการณ์กิบส์), 201
graph (กราฟ), 191
graph Laplacian (ตัวดำเนินการลาปลาซบนกราฟ), 274

harmonic function (ฟังก์ชันฮาร์มอนิก), 368
harmonic sum (ผลบวกฮาร์มอนิก), 198
hat function (ฟังก์ชันรูปหมวก), 319
Hausdorff space (ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ), 15
Hermitian form (ฟอร์มแอร์มีต), 7
Hilbert space (ปริภูมิฮิลเบิร์ต), 28
Hilbert--Schmidt norm (นอร์มฮิลเบิร์ต–ชมิดท์), 264
Hilbert--Schmidt operator (ตัวดำเนินการฮิลเบิร์ต–ชมิดท์), 264
homogeneity (ภาวะเอกพันธุ์), 6
hyperplane (ระนาบเกิน), 170
Hölder constant (ค่าคงที่โฮลเดอร์), 47
Hölder continuous (ต่อเนื่องแบบโฮลเดอร์), 47
Hölder space (ปริภูมิโฮลเดอร์), 326

image inpainting (การเติมเต็มภาพ), 368
infimum (อินฟิมัม), 32
inner product (ผลคูณภายใน), 2

ฉบับร่าง Preprint · 2026-10-21

inner product space (ปริภูมิผลคูณภายใน), 75
integral kernel (เคอร์เนลปริพันธ์), 248
interior (ภายใน), 14
invariant subspace (ปริภูมิย่อยคงตัว), 253
isometric mapping (การส่งสมมิติ), 30
isomorphism (สมสัณฐาน), 145

Jacobian (จาโคเบียน), 65

kernel (เคอร์เนล), 165

Lax--Milgram lemma (บทตั้งของแลกซ์–มิลแกรม), 336
least squares (กำลังสองน้อยที่สุด), 100
Lebesgue constant (ค่าคงตัวเลอเบก), 179
lifting (การยกข้อมูลขอบ), 364
limit (ลิมิต), 18
limsup (ลิมซูพีเรียม), 59
linear operator (ตัวดำเนินการเชิงเส้น), 139
linear projection (การฉายเชิงเส้น), 95
Lipschitz boundary (ขอบลิพชิทซ์), 232
Lipschitz constant (ค่าคงที่ลิพชิทซ์), 47
load vector (เวกเตอร์ภาระ), 346
lower semicontinuous (กึ่งต่อเนื่องล่าง), 215

maximal angle condition (เงื่อนไขมุมมากสุด), 357
maximum norm (นอร์มค่าสูงสุด), 4
measurable function (ฟังก์ชันที่วัดได้), 52
measure (การวัด), 52
measure space (ปริภูมิการวัด), 52
metric (เมตริก), 2
metric space (ปริภูมิอิงระยะทาง), 6
minimising sequence (ลำดับมุ่งต่ำสุด), 227
Minkowski functional (ฟังก์ชันนัลมินคอฟสกี), 170
Minkowski's inequality (อสมการมินคอฟสกี), 54
model subspace (ปริภูมิแบบจำลอง), 74
modulus of continuity (มอดุลัสความต่อเนื่อง), 330
multi-index (พหุดัชนี), 44
multigrid method (วิธีหลายกริด), 372
multiplication operator (ตัวดำเนินการคูณ), 288

noise (สัญญาณรบกวน), 138
nonexpansive map (การส่งไม่ขยาย), 378
norm (นอร์ม), 2
normal (ปรกติ), 98
normal equations (สมการปรกติ), 95
normed space (ปริภูมินอร์ม), 6
nowhere dense (ทุกที่ไม่หนาแน่น), 181

open ball (บอลเปิด), 13
open map (การส่งเปิด), 188
open set (เซตเปิด), 14
operator norm (นอร์มของตัวดำเนินการ), 141
orthogonal (เชิงตั้งฉาก), 9
orthogonal complement (ส่วนเติมเต็มเชิงตั้งฉาก), 9
orthogonal projection (การฉายเชิงตั้งฉาก), 74
orthonormal basis (ฐานเชิงตั้งฉากปรกติ), 109
orthonormal system (ระบบเชิงตั้งฉากปรกติ), 108

PageRank (คะแนนความสำคัญของหน้า), 376
PageRank matrix (เมทริกซ์คะแนนความสำคัญของหน้า), 395
parallelogram identity (เอกลักษณ์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน), 8
Parseval identity (เอกลักษณ์ปาร์เซวาล), 107
partial sum (ผลบวกย่อย), 179
partition of unity (การแบ่งส่วนหนึ่ง), 69
piecewise polynomial (พหุนามเป็นชิ้นดีกรีไม่เกิน k), 349
pixel (พิกเซล), 2
Poincaré inequality (อสมการปวงกาเร), 230
point spectrum (สเปกตรัมจุด), 253
polarization identity (เอกลักษณ์โพลาไรเซชัน), 81
positive definite (บวกแน่นอน), 7
positive operator (ตัวดำเนินการเป็นบวก), 277
positive semidefinite (กึ่งบวกแน่นอน), 7
power method (วิธีกำลัง), 395
pre-Hilbert space (ปริภูมิพรีฮิลเบิร์ต), 7
principal theorems (ทฤษฎีบทหลักสามข้อ), 179
projection (การฉาย), 185
projection operator (ตัวดำเนินการฉาย), 96

quasi-uniform triangulation (การแบ่งสามเหลี่ยมเกือบเท่ากันหมด), 357

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-24

quotient map (การส่งผลหาร), 145

range (พิสัย), 165
reference element (ชิ้นอ้างอิง), 355
reflexive space (ปริภูมิสะท้อนกลับ), 222
regular distribution (ดิสทริบิวชันปรกติ), 310
regular measure (การวัดปรกติ), 174
relatively compact (กระชับสัมพัทธ์), 243
Rellich theorem (ทฤษฎีบทเรลลิช), 326
residual (ค่าตกค้าง), 100
residual spectrum (สเปกตรัมส่วนที่เหลือ), 253
resolvent (ฟังก์ชันเรโซลเวนต์), 252
resolvent set (เซตเรโซลเวนต์), 252
root of unity (รากที่ N ของหนึ่ง), 127

Schwartz space (ปริภูมิชวาร์ตซ์), 313
self-adjoint (ตัวดำเนินการผูกพันในตัว), 98
semimetric (กึ่งเมตริก), 6
seminorm (กึ่งนอร์ม), 6
seminormed space (ปริภูมิกึ่งนอร์ม), 6
separable set (เซตแยกกันได้), 52
sequence space (ปริภูมิลำดับ), 28
sesquilinear form (ฟอร์มเซสควิลิเนียร์), 7
set of first category (เซตหมวดหมู่ที่หนึ่ง), 181
set of second category (เซตหมวดหมู่ที่สอง), 181
sharpening (การทำให้คมชัด), 138
singular distribution (ดิสทริบิวชันเอกฐาน), 311
singular value (ค่าเอกฐาน), 263
Sobolev number (เลขโซโบเลฟ), 328
Sobolev space (ปริภูมิโซโบเลฟ), 307
spectral measure (การวัดสเปกตรัม), 287
spectrum (สเปกตรัม), 252
square wave (คลื่นสี่เหลี่ยม), 204
standard Dirac sequence (ลำดับดิแรกมาตรฐาน), 65
standing mode (โหมดสั่น), 302
stationary distribution (การแจกแจงสถานะคงตัว), 395
step function (ฟังก์ชันขั้นบันได), 60
stiffness matrix (เมทริกซ์สติฟเนส), 346
stochastic matrix (เมทริกซ์สโทแคสติก), 395
stronger or finer (แรงกว่าหรือละเอียดกว่า), 16
sublinear functional (ฟังก์ชันนัลซับลิเนียร์), 161
subspace (ปริภูมิย่อย), 9
sum norm (นอร์มผลบวก), 4
support (ตัวรองรับ), 46
supremum norm (ซูพรีมัมนอร์ม), 39
symmetric operator (ตัวดำเนินการสมมาตร), 291

tempered distribution (ดิสทริบิวชันเทมเปอร์ด), 313
test function (ฟังก์ชันทดสอบ), 46
Tonelli's theorem (ทฤษฎีบทของโทเนลลี), 64
topological space (ปริภูมิเชิงทอพอโลยี), 15
topology (ทอพอโลยี), 15
trace (รอยเมทริกซ์), 102
trace operator (ตัวดำเนินการเทรซ), 332
trace value (ค่าเทรซ), 332
triangle inequality (อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม), 7
triangulation (การแบ่งสามเหลี่ยม), 348
trigonometric polynomial (พหุนามตรีโกณมิติ), 203

unbounded operator (ตัวดำเนินการไม่มีขอบเขต), 291
uniform (เอกรูป), 19
uniformly elliptic (เชิงวงรีเอกรูป), 338
unit ball (บอลหนึ่งหน่วย), 13
unit sphere (ทรงกลมหน่วย), 31

variational inequality (อสมการแปรผัน), 234
vector (เวกเตอร์), 3
vector space (ปริภูมิเวกเตอร์), 3

weak Cauchy sequence (ลำดับโคชีแบบอ่อน), 214
weak derivative (อนุพันธ์อ่อน), 307
weak form (รูปแบบอ่อน), 336
weak solution (คำตอบแบบอ่อน), 338
weak-* convergent (ลู่เข้าแบบอ่อน-ดาว), 213
weak-* topology (ทอพอโลยีอ่อน-ดาว), 217
weakly convergent (ลู่เข้าแบบอ่อน), 213
weakly sequentially compact (กระชับเชิงลำดับแบบอ่อน), 214
weighted graph (กราฟถ่วงน้ำหนัก), 299

ฉบับร่าง · Preprint · 2026-10-21